



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

HEITOR CASAÇOLA CINEL

**TRANSIÇÕES DE FASE E INVARIÂNCIA DE CALIBRE EM MODELOS
ESTATÍSTICOS**

Londrina
2020

HEITOR CASAÇOLA CINEL

**TRANSIÇÕES DE FASE E INVARIÂNCIA DE CALIBRE EM MODELOS
ESTATÍSTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Paula Fernanda Bienzobas

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

C574 Cinel, Heitor Casaçola.
Transições de fase e invariância de calibre em modelos estatísticos / Heitor Casaçola Cinel. - Londrina, 2020
86 f. : il.

Orientadora: Paula Fernanda Bienzobas.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Mecânica Estatística - Tese. 2. Transições de Fase - Tese. 3. Simetria de Calibre - Tese. I. Bienzobas, Paula Fernanda. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

HEITOR CASAÇOLA CINEL

**TRANSIÇÕES DE FASE E INVARIÂNCIA DE CALIBRE EM
MODELOS ESTATÍSTICOS**

Trabalho apresentado ao Departamento de Física da
Universidade Estadual de Londrina, como requisito
parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof^a. Dra. Paula Fernanda Bienzobas
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Carlos André Hernaski
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 28 de fevereiro de 2020

Agradecimentos

Agradeço a Deus e à Maria por me capacitarem a desenvolver este trabalho.

Agradeço à minha mãe Norma, meu pai Aloysio, minha irmã Karina e toda a minha família, que me ajudaram durante todo o mestrado, não medindo esforços em nenhum momento.

Agradeço à minha namorada Érica, que está comigo desde o começo da graduação, sempre escutando com atenção as explicações sobre alguma coisa nova que estou estudando (mesmo que as vezes não entenda). Obrigado por toda atenção, apoio, cuidado e, principalmente, por todo amor.

Agradeço à todos os meus amigos e colegas físicos por todas as discussões que me ajudaram a escrever o presente texto. Agradeço em especial ao Rodrigo por todas as explicações e todo o suporte técnico.

Agradeço ao Prof. Pedro e ao Prof. Carlos que aceitaram ser banca deste trabalho. Agradeço pelas correções, sugestões e principalmente por todas as conversas que tivemos como aluno e professor.

Agradeço em especial, à minha orientadora, Prof^a Paula, por toda a atenção e ajuda nas mais diversas situações. Agradeço também pela paciência (principalmente com os meus tempos verbais).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

“(...) Fortaleceu-se minha convicção de que, avaliadas pela escala temporal humana, a vida, a música e a ciência prosseguiriam para sempre, ainda que nós mesmos não sejamos mais do que visitantes transitórios ou, nas palavras de Niels Bohr, simultaneamente espectadores e atores do grande drama da vida.”

Werner Heisenberg

Resumo

O modelo de Ising é amplamente utilizado no estudo de transições de fase e fenômenos críticos. Neste trabalho apresentamos a solução exata do modelo de Ising em $d = 1$, a aproximação de Bragg-Williams e também a teoria fenomenológica de Landau. Por meio da solução exata em $d = 1$ detectamos que o modelo apresenta somente a fase paramagnética, enquanto as soluções de campo médio sugerem uma transição de fase. Em todos os casos encontramos uma simetria por inversão global dos spins e, portanto, seus estados são degenerados. Para investigar um pouco mais essa degenerescência relacionamos o modelo de Ising ao modelo ϕ^4 por uma transformação de Hubbard-Stratonovich. O estudo dessa teoria de potencial quártico permite a compreensão de como o modelo de Ising poderia sofrer uma inversão global espontaneamente. Essa inversão é analisada resolvendo a equação de movimento no espaço Euclidiano e tem como resultado a solução clássica de instanton. O modelo de Ising pode também ser estendido para o estudo de teorias com simetrias locais, que compõem uma parte importante da física. A adequação para esse caso é feita descrevendo interações entre plaquetas. Ao estudo dessa teoria, aplicamos o teorema de Elitzur e por meio de expansões em altas e baixas temperaturas de loops de Wilson detectamos duas diferentes fases. Neste trabalho ainda apresentamos a descrição quântica do modelo com simetria local, fixamos o calibre e então mapeamos uma relação de dualidade com o modelo de Ising com simetria global. Apresentamos também o modelo $O(N)$ e em seguida aprofundamos no caso específico de $N = 2$, conhecido como modelo XY . Neste caso verificamos uma transição de fase através de expansões a altas e baixas temperaturas. No contexto do modelo $O(N)$ apresentamos o teorema de Goldstone e demonstramos como o bóson de Goldstone é interpretado em um modelo com quebra espontânea de simetria. Apresentamos também a renormalização do modelo $O(N)$ para encontrar seus expoentes críticos. Por fim, construímos o modelo Abelian $U(1)$ com simetria local, que pode ser comparado à teoria eletromagnética Euclidiana discretizada. Este modelo gera interesse, pois no limite de acoplamentos fortes surge naturalmente uma fase confinante. Já no limite de acoplamentos fracos não é possível encontrar o mesmo comportamento, o que significa uma transição de fase. Analisamos também o caso de $d = 2$, em que é impossível uma quebra espontânea de simetria, portanto o modelo apresenta somente uma fase.

Palavras-chave: 1. Física Estatística. 2. Transições de Fase 3. Invariância de Calibre CINEL, Heitor Casaçola. **Transições de Fase e Invariância de Calibre em Modelos Estatísticos.** 2020. Dissertação de Mestrado em Física – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

Abstract

The Ising Model is largely utilized in the study of phase transition and critical phenomena. In the present work we show the exact solution in $d = 1$, the Bragg-Williams approximation and Landau phenomenological theory. In the exact one, we found only the paramagnetic phase, while in two mean fields solutions there is a phase transition. In all cases the system have a symmetry by a global inversion of spins, therefore, its states are degenerated. Intending to investigate more about this degenerescence, we relate the Ising Model to ϕ^4 Model performing the Hubbard-Stratonovich transformation. Studying the quartic potential allow us to understand how the Ising Model could spontaneously flip all spins at same time. This flip is analised solving the motion equations in the Euclidian space and the result is the classical action of Instanton. The Ising model also can be extended to the study of theories with gauge symmetry, that form an important part of Physics. The adequation for this case is made describing interactions between plaquets. In this study we apply the Elitzur's theorem and, using high and low temperature expansions of Wilson loops we could detect two different phases in this model. From this theory is also presented a duality relation of the quantum version with the global symmetric Ising model by fixing the gauge. Following, we presented the $O(N)$ models and then we focussed in the specific case $N = 2$, known as XY model. In this case we verify a phase transition through high and low temperatures. In the $O(N)$ models context we introduced the Goldstone theorem and demonstrated how to interpret the Goldstone bóson in a model with spontaneous symmetry breaking. We also shown the $O(N)$ model renormalization and this critical exponents. Lastely, we constructed the Abelian $U(1)$ Gauge Model, which is related to Euclidian lattice eletromagnetic theory. There is interest in the model because in the strong coupling limit naturally raises a confining phase. In the weak coupling limit we could not to find the same behaviour, that means a phase transition. The $d = 2$ case is also analised, in which is impossible a spontaneous symmetry breaking, therefore, the model exhibits only one phase.

Keywords: 1. Statistical Physics 2. Phase Transition 3. Gauge Symmetry.

CINEL, Heitor Casaçola. **Phase Transition and Gauge Invariance in Statistical Models**. 2020. Masters of Science in Physics Thesis – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplos de redes unidimensionais.	4
Figura 2 – Análise gráfica da Eq. (2.25).	8
Figura 3 – Gráficos do Potencial $F(\varphi)$	9
Figura 4 – Inversão do potencial $V(x)$ pela transformação $t \rightarrow -it$	19
Figura 5 – Solução da equação de movimento.	20
Figura 6 – Disposição de n Instantons no eixo temporal.	24
Figura 7 – Representação 2d da rede com variáveis nos links e de um plaquete.	28
Figura 8 – Representação da transformação dos links da rede conectados a um sítio.	28
Figura 9 – Representação de plaquetes frustrados em $d = 2$ e em $d = 3$ para um link invertido e dois links invertidos no mesmo plaquete.	31
Figura 10 – Representação de duas configurações degeneradas em $d = 2$	32
Figura 11 – Representação de diferentes trajetórias que contribuem para $C(n)$ no caso de $d = 2$	43
Figura 12 – Representação de uma onda de torção.	44
Figura 13 – Representação de θ sobre os links da rede.	66
Figura 14 – Representação da ambiguidade na descrição das variáveis.	66
Figura 15 – Contorno fechado C	68
Figura 16 – Contorno fechado e os plaquetes internos.	70
Figura 17 – Exemplo de como os pontos x e y podem se situar em um contorno bidimensional.	73
Figura 18 – Linha destacada para o cálculo de \mathcal{A}_1	74
Figura 19 – Contorno C ao qual a corrente J_μ se desloca.	76

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELO DE ISING	3
2.1	Teorias na Rede e o Modelo de Ising	3
2.2	Solução Exata em $d = 1$	4
2.3	Aproximação de Bragg-Williams	6
2.4	Fenomenologia de Landau	8
2.5	Transformação de Hubbard-Stratonovich	9
3	INSTANTONS	15
3.1	Integração Funcional	15
3.1.1	Conexão com a Mecânica Estatística	17
3.2	Solução de Instantons	18
3.3	Contribuição de Multi-Instantons	23
4	MODELO DE ISING COM SIMETRIA LOCAL	27
4.1	Construção do Modelo com Simetria Local e Impossibilidade de Quebra Espontânea de Simetria	27
4.2	Expansão à Altas Temperaturas	29
4.3	Expansão à Baixas Temperaturas	31
4.3.1	Análise da Degenerescência em $d = 2$	32
4.4	Mapeamento da Hamiltoniana Quântica 3D com Simetria Local	34
5	MODELOS $O(N)$	39
5.1	Modelos $O(N)$	39
5.2	Modelo XY	40
5.2.1	Limite de Altas Temperaturas	42
5.2.2	Limite de Baixas Temperaturas	43
5.3	Bóson de Goldstone	45
5.4	Grupo de Renormalização	48
5.4.1	Propagador, Leis de Escala e Expoentes Críticos	48
5.4.2	Renormalização do Modelo $O(N)$	56
6	MODELO ABELIANO $U(1)$ COM SIMETRIA LOCAL	65
6.1	Construção do Modelo com Simetria Local	65
6.2	Limite de Acoplamentos Fortes	69
6.3	Limite de Acoplamentos Fracos	70

6.4	Potencial Para Cargas Estáticas e Confinamento	75
6.5	Caso $d = 2$	77
7	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	83

1 Introdução

A partir de meados do século XIX, modelos microscópicos do magnetismo estavam em ascensão e, utilizando a ideia de partículas indivisíveis portadoras de momentos magnéticos intrínsecos, desejavam explicar as propriedades macroscópicas dos materiais [1]. O modelo de Ising surgiu em 1920 como uma proposta de explicar o ferromagnetismo nos materiais e se trata de uma evolução destas teorias e conceitos da época. Em 1925, Ernest Ising apresentou a solução exata em uma dimensão do modelo de interação entre primeiros vizinhos, que viria a ser conhecido como modelo de Ising [2]. O resultado obtido em $d = 1$ descreve uma única fase para este modelo, diferente dos resultados posteriores de soluções de campo médio e da solução exata em $d = 2$, obtida por Onsager em 1944 [3, 4].

Hoje em dia o modelo de Ising possui diversas aplicações e é um “*toy model*” da mecânica estatística utilizado no estudo de transições de fase e fenômenos críticos. A partir desse modelo, outros foram derivados, como o modelo de Ising com Simetria Local (ou Z_2 *Gauge Theory*), o modelo XY , o modelo Esférico e o modelo $O(N)$.

No presente trabalho apresentamos alguns destes modelos e demonstramos que são relevantes ainda hoje. A primeira parte foca no modelo de Ising e sua versão com simetria local. Iniciamos apresentando a solução exata do modelo de Ising em $d = 1$, a aproximação de Bragg-Williams e também a teoria fenomenológica de Landau [5, 6]. Por meio da solução exata em $d = 1$ detectamos que o modelo apresenta somente a fase paramagnética, enquanto as soluções de campo médio sugerem uma transição de fase. Em todos os casos existe uma simetria por inversão global dos spins e, portanto, seus estados são degenerados. Para analisar melhor essa degenerescência, relacionamos o modelo de Ising ao modelo ϕ^4 por uma transformação de Hubbard-Stratonovich. Em geral, os modelos de campos podem ser mapeados em teorias em redes. Este mapa é feito relacionando o “*cutoff*” a altas energias com o parâmetro de rede do modelo, tal que o limite de altas energias no modelo de campos é equivalente à teoria na rede no limite do contínuo. Uma vez que esta relação é feita, algumas ferramentas de mecânica estatística podem ser aplicadas a fim de retirar informações do problema original [7].

Ao analisar os níveis de menor energia da teoria de potencial quártico, é possível notar que o modelo de Ising tem somente dois estados permitidos e estes são separados por uma região classicamente proibida. Tais estados referem-se ao ordenamento total positivo e negativo que, embora sejam separados por uma região proibida no mínimo de energia, uma transição de um estado totalmente ordenado para outro também totalmente ordenado não tem gasto energético. Neste caso, a transição só é possível a partir de um tunelamento e a probabilidade de transição pode ser dimensionada pela ação clássica de um instanton [8, 9].

Em seguida, apresentamos um estudo do modelo de Ising com simetria local, proposto por Wegner em 1971 [10]. Ao estudo dessa teoria, aplica-se o teorema de Elitzur, segundo o qual o valor esperado de quantidades que não apresentam a simetria local da hamiltoniana serão sempre nulos [11]. Deste modo, a magnetização deixa de ser um parâmetro de ordem adequado para a análise deste modelo, uma vez que esta é nula, não sendo capaz de detectar uma transição de fase. Entretanto, por meio de expansões em altas e baixas temperaturas de uma quantidade adequada é possível detectar duas diferentes fases neste modelo, chamadas de fases topológicas. Esta quantidade se trata de um contorno fechado, conhecido como “loop de Wilson”, por ter sido proposto por Kenneth Wilson em 1974 no contexto de confinamento de quarks [12]. Neste trabalho ainda é discutida uma conexão com o modelo de Ising de simetria global, cuja solução exata já é conhecida, a partir de uma fixação de uma fixação de calibre.

A segunda parte deste trabalho é dedicada aos modelos derivados do modelo de Ising. Um destes derivados, o modelo $O(N)$ foi proposto em 1968 por Stanley como uma generalização dos modelos de spin [13]. Este modelo considera variáveis de spin N -dimensionais, e descreve o modelo de Ising, o modelo XY e o modelo de Heisenberg para $N = 1, 2$ e 3 respectivamente. Apresentamos este modelo e em seguida aprofundamos no caso específico do modelo XY, que é um modelo com simetria de calibre. Para este modelo detectamos uma transição de fase através de expansões a altas e baixas temperaturas. No contexto do modelo $O(N)$ apresentamos o teorema de Goldstone e demonstramos como o bóson de Goldstone é interpretado em um modelo com quebra espontânea de simetria. Apresentamos também a renormalização do modelo $O(N)$ para encontrar seus expoentes críticos.

Apresentamos por fim o modelo Abelian $U(1)$ com simetria local, equivalente ao modelo XY com simetria local, que pode ser comparado à teoria eletromagnética Euclidiana discretizada [14]. Neste contexto realizamos expansões para acoplamentos fortes e fracos (analogamente à altas e baixas temperaturas) e encontramos decaimentos com lei de área e de perímetro, respectivamente, o que significa uma transição de fase. Ao fim demonstramos que o potencial para interação partículas-antipartículas apresenta uma estrutura confinante. Esta estrutura surge naturalmente na teoria de calibre na rede, levantando o interesse em seu estudo [12, 15, 16, 17]. Analisamos também o caso de $d = 2$ em que é impossível uma quebra espontânea de simetria, portanto o modelo apresenta somente uma fase.

2 Modelo de Ising

Neste capítulo introduzimos o conceito de teorias na rede no estudo da mecânica estatística apresentando o modelo de Ising. Em seguida apresentamos a solução exata do modelo de Ising em $d = 1$, demonstrando que esta não apresenta transição de fase. Em contraste com a última solução, apresentaremos a aproximação de Bragg-Williams e a teoria fenomenológica de Landau em que é possível detectar transição de fase. Neste capítulo ainda discutiremos a transformação de Hubbard-Stratonovich e então faremos o mapeamento exato do modelo de Ising no modelo ϕ^4 .

2.1 Teorias na Rede e o Modelo de Ising

Para construir uma teoria estatística de interação entre spins, que ocupam diferentes sítios em uma rede d -dimensional, podemos definir uma hamiltoniana

$$\mathcal{H} = - \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - H \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (2.1)$$

em que σ_i pode assumir os valores ± 1 , J_{ij} descreve a energia de interação entre os spins localizados nos sítios i e j , H se trata de um campo externo que interage com o sistema e a primeira soma é sobre todos os possíveis pares de spins em uma rede com N sítios. Essa é a descrição mais geral sobre interações entre pares. Entretanto, podemos restringir a hamiltoniana para interações de curto alcance, considerando que os spins interagem fortemente entre os primeiros vizinhos com a mesma energia J e desprezando as outras interações. Essa consideração é o que caracteriza o modelo de Ising, expressado por

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - H \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (2.2)$$

tal que a notação $\langle i, j \rangle$ no somatório representa a soma sobre interações de primeiros vizinhos. A energia de interação J caracteriza o modelo de Ising como ferromagnético ou antiferromagnético para os casos de $J > 0$ e $J < 0$, respectivamente. No caso ferromagnético, os níveis de menor energia ocorrem quando os spins se ordenam paralelamente, enquanto no caso de interações antiferromagnéticas as configurações de ordenamento antiparalelas levam à menor energia. Tomando o caso ferromagnético unidimensional, os estados de menor energia estão representados pelas figuras 1a e 1b, enquanto um estado desordenado está representado pela figura 1c. Neste caso, o ordenamento de todos os spins para cima ou todos para baixo são dois estados degenerados do nível de menor energia do modelo de Ising. Essa degenerescência está associada à simetria por inversão global e ocorre em todos os estados do sistema.

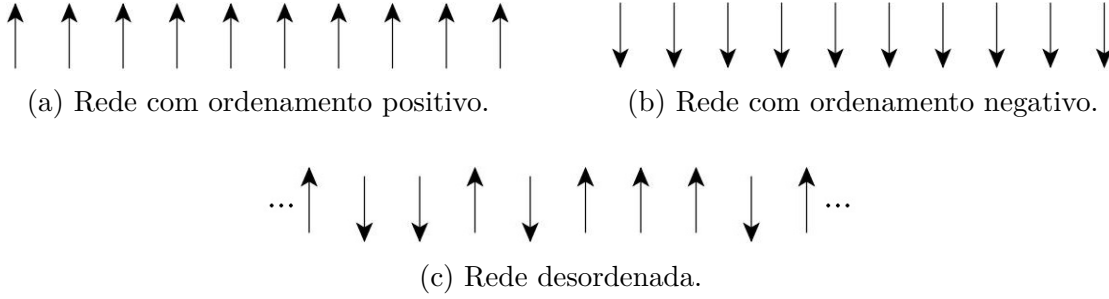


Figura 1 – Exemplos de redes unidimensionais.

2.2 Solução Exata em $d = 1$

Dada a hamiltoniana de Ising, eq (2.2), podemos resolver o modelo em $d = 1$ considerando condições periódicas de contorno, $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, [18, 19]. Por conveniência escrevemos a função de partição em uma forma mais simétrica,

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \sum_{\{\sigma_i\}} e^{K \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{L}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i + \sigma_{i+1})} \\
 &= \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{i=1}^N e^{K \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{L}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1})}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $K \equiv \beta J$, $L \equiv \beta H$ e $\beta \equiv 1/(k_B T)$. Adotamos o método de matriz de transferência definindo a matriz

$$\mathbf{T}(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \equiv \begin{bmatrix} e^{K+L} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-L} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

cuja as entradas são os valores possíveis que $e^{K \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{L}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1})}$ pode assumir conforme as combinações de $\sigma_i = \pm 1$ e $\sigma_{i+1} = \pm 1$. É fácil notar que qualquer i resulta na mesma matriz e, portanto, o produtório nos leva à $\mathbf{T}(\sigma_i, \sigma_{i+1})^N$. Por fim, ao considerarmos condições periódicas de contorno, a função de partição pode ser expressa como

$$Z_N = \text{Tr}(\mathbf{T}^N). \tag{2.5}$$

A matriz \mathbf{T} pode ser escrita em uma forma diagonal,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_0^N & 0 \\ 0 & \lambda_1^N \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

em que λ_0 e λ_1 são os autovalores de \mathbf{D} . Por meio de transformações ortogonais \mathbf{U} , tais que $\mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}$, e então

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \text{Tr}(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U})^N \\
 &= \text{Tr}(\mathbf{D})^N \\
 &= \text{Tr} \begin{bmatrix} \lambda_0^N & 0 \\ 0 & \lambda_1^N \end{bmatrix} \\
 &= \lambda_0^N + \lambda_1^N.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Através da equação $\det(\mathbf{T} - \lambda) = 0$, podemos encontrar os autovalores de \mathbf{T} , sendo eles

$$\lambda_0 = e^K \cosh L + \left[e^{2K} \cosh^2 L - 2 \sinh(2K) \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

e

$$\lambda_1 = e^K \cosh L - \left[e^{2K} \cosh^2 L - 2 \sinh(2K) \right]^{1/2}. \quad (2.9)$$

No caso de campo nulo, $L = 0$, os autovalores se tornam

$$\lambda_0 = 2 \cosh K \quad \text{e} \quad \lambda_1 = 2 \sinh K. \quad (2.10)$$

Podemos notar que o sistema apresenta uma degenerescência quando $K \rightarrow \infty$, ou seja, no limite $T \rightarrow 0$. Essa degenerescência está relacionada ao ordenamento total do sistema no estado fundamental (todos os spins para cima ou todos para baixo). Para o caso de K finito obtemos $\lambda_0 > \lambda_1$, relação que vale mesmo para $H \neq 0$, e tomando o limite termodinâmico, $N \rightarrow \infty$, encontramos

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_0^N \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^N \right\} \\ &= \lambda_0^N + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^N. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A partir da equação (2.11) podemos obter a energia livre do sistema,

$$\begin{aligned} g(T, H) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln Z_N}{\beta N} \right] \\ &\approx -\frac{\ln \lambda_0}{\beta}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

e, então, é possível obter também a magnetização,

$$m(T, H) = -\frac{d g(T, H)}{d H} \quad (2.13)$$

$$= \frac{\sinh(\beta H)}{\left[\sinh^2(\beta H) + \exp(-4\beta J) \right]^{(1/2)}}. \quad (2.14)$$

Neste caso, a magnetização é nula na ausência de um campo externo, ou seja, o modelo não exibe transição de fase em $d = 1$ para temperatura finita. Para entender o que ocorre em $T = 0$ é conveniente calcular a correlação entre dois spins na ausência de campo externo, pois neste caso a magnetização é indeterminada. Considerando que $\sigma_i \sigma_i = 1$, podemos introduzir a variável $t_i = \sigma_i \sigma_{i+1}$ a fim de obter

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \sigma_{i+2} \dots \sigma_{j-1} \sigma_{j-1} \sigma_j \rangle = \langle t_i t_{i+1} \dots t_{j-1} \rangle. \quad (2.15)$$

Em termos de t_i a correlação se fatoriza (assim como a função de partição) e podemos encontrar

$$\begin{aligned}
\langle t_i t_{i+1} \dots t_{j-1} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{t_i\}} \left(\prod_{a=i}^{j-1} t_a e^{K t_a} \right) \left(\prod_{a=i}^{j-1} e^{K t_a} \right) \\
&= \prod_{a=i}^{j-1} \frac{\sum_{\{t_i\}} t_a e^{K t_a}}{\sum_{\{t_i\}} e^{K t_a}} \\
&= \left[\frac{e^K - e^{-K}}{e^K + e^{-K}} \right]^{|j-i|} \\
&= \tanh^{|j-i|} (K).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Este resultado pode ser reescrito como

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \exp [|j-i| \ln \tanh (K)]. \tag{2.17}$$

Desta forma fica destacado que para qualquer valor finito de T a correlação decai exponencialmente com a distância entre os pontos, entretanto, para $T = 0$ (isso significa $K \rightarrow \infty$) a correlação não mais decai com a distância, apresentando um comportamento diferente e os spins passam a estar correlacionados independentemente da distância em que se encontram um do outro [20].

2.3 Aproximação de Bragg-Williams

É interessante ressaltar que, partindo da mesma hamiltoniana de Ising, um cálculo de campo médio em d dimensões leva a resultados que apresentam a fase ferromagnética e transição de fase a campo nulo enquanto o cálculo exato em $d = 1$ não apresenta tal resultado, como vimos na seção 2.2.

Uma outra proposta para o modelo de Ising é a aproximação de campo médio de Bragg-Williams, em que é possível encontrar uma transição de fase [5]. Para esta solução, partimos da hamiltoniana do modelo de Ising, Eq. (2.2), consideramos

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = m^2, \tag{2.18}$$

o que significa desprezar flutuações, e propomos de início

$$N_+ - N_- = mN, \tag{2.19}$$

em que m é a magnetização média por spin, N_+ e N_- são os números de spins que assumem respectivamente os valores $+1$ e -1 . Portanto, $N_+ + N_- = N$, ou seja, o total de spins do sistema.

A energia total é encontrada por

$$U = \langle \mathcal{H} \rangle = -J \sum_{\langle ij \rangle} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - H \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle. \quad (2.20)$$

Como a primeira soma da equação (2.20) corre sobre todos os pares de primeiros vizinhos (em uma rede d dimensional com N spins tem um total de dN pares), a energia livre assume a forma

$$U = -JdNm^2 - HNm. \quad (2.21)$$

A entropia é encontrada pela equação $S = k_B \ln \Omega$, em que Ω é a quantidade de micro-estados acessíveis. Logo,

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \left[\frac{N!}{N_+! N_-!} \right] \\ &= Nk_B \ln(2) - Nk_B [(1+m) \ln(1+m) + (1-m) \ln(1-m)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pelas relações termodinâmicas, podemos obter também a energia livre por spin,

$$\begin{aligned} g(T, H; m) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} (U - TS) \right) \\ &= -Jdm^2 - Hm - \frac{1}{\beta} \ln(2) \\ &\quad + \frac{1}{2\beta} [(1+m) \ln(1+m) + (1-m) \ln(1-m)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como é natural que o sistema se acomode nos valores mínimos de energia, podemos obter os valores de m que levam a esse estado,

$$\frac{\partial g}{\partial m} = -2Jdm - H + \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+m}{1-m} \right) = 0, \quad (2.24)$$

ou seja

$$m = \tanh(2\beta Jdm - \beta H). \quad (2.25)$$

Esta é uma equação auto consistente, diferente do resultado encontrado na solução exata do modelo de Ising em $d = 1$. A solução para a Eq. (2.25) para campo nulo, $H = 0$, esboçada graficamente na figura 2, reflete o comportamento da magnetização. Para $2\beta Jd < 1$, o único valor que m pode assumir é 0, caracterizando um estado paramagnético e no caso de $2\beta Jd > 1$, m assume dois valores simétricos não nulos, caracterizando uma fase ferromagnética. Portanto o modelo apresenta dois comportamentos distintos, o que reconhecemos como uma transição de fase. Notando que o ponto que separa essas fases é $2\beta Jd = 1$, encontramos a temperatura crítica como $k_B T_c = 2Jd$.

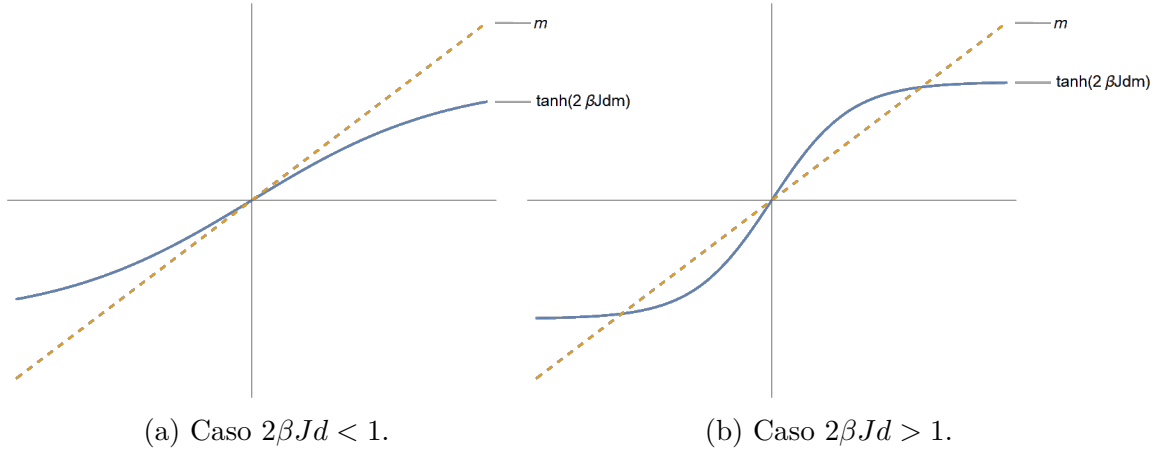


Figura 2 – Análise gráfica da Eq. (2.25). As figuras 2a e 2b mostram os gráficos para o lado direito da Eq. (2.25) a campo nulo em função de m e uma reta tracejada representando o lado esquerdo. As intersecções das curvas com a reta são os valores que satisfazem a equação.

2.4 Fenomenologia de Landau

A fim de uma melhor compreensão dos fenômenos de transição de fase contínuas, em 1937, Landau propôs uma teoria baseada no conceito de parâmetro de ordem e na expansão da energia livre em quantidades invariantes do parâmetro de ordem [6]. O parâmetro de ordem é uma quantidade que muitas vezes pode ser definida e descreve a forma como ocorre a transição de fase. Em geral, este parâmetro assume valores diferentes de zero para fases menos simétricas e igual a zero em fases mais simétricas [18, 21]. Um exemplo de parâmetro de ordem é a magnetização para o modelo de Ising: na fase ferromagnética (ordenada) temos $m \neq 0$; e na fase paramagnética (desordenada) temos $m = 0$. Para um caso simples, consideremos um parâmetro de ordem escalar φ e então teremos a expansão da energia livre como

$$F(\varphi) = a_0 + a\varphi + \frac{b}{2}\varphi^2 + \frac{c}{3}\varphi^3 + \frac{d}{4}\varphi^4 + \dots, \quad (2.26)$$

em que a_0 , a , b , c e d são parâmetros que podem depender das variáveis termodinâmicas do sistema (temperatura, pressão...). Vale ressaltar que o parâmetro de ordem não precisa ser um escalar, mas a expansão da energia livre necessita ser em termos de quantidades invariantes. À princípio, em sistemas físicos podemos ter termos de todas as ordens, mas para essa análise é suficiente assumirmos termos até quarta ordem. Então, para garantir que a energia seja uma função que tenha pontos de mínimo, a condição $d > 0$ é suficiente. Em diversos sistemas, a fenomenologia de Landau pode descrever transições de fase contínuas. Entretanto, por simplicidade, focaremos na fenomenologia de sistemas magnéticos que apresentam degenerescência por uma inversão global, como o modelo de Ising. Neste caso, a energia livre deve ser invariante pela transformação

$$\varphi \rightarrow -\varphi, \quad (2.27)$$

portanto, $a = 0$ e $c = 0$. Sob estas condições, $F(\varphi)$ pode ser descrito graficamente como na figura 3. O parâmetro a_o representa a energia no ponto mínimo, é um valor constante que simplesmente desloca a energia livre para valores mais altos ou mais baixos, portanto tomaremos $a_o = 0$.

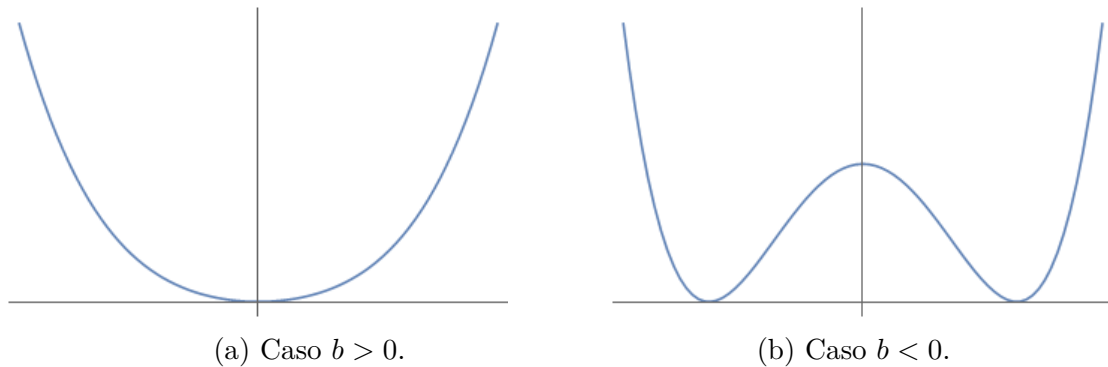


Figura 3 – Gráficos do Potencial $F(\varphi)$.

Os pontos φ_{min} que minimizam $F(\varphi)$ devem satisfazer

$$\left. \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{min}} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{min}} > 0. \quad (2.28)$$

Encontramos então como pontos de mínimo $\varphi = 0$ com a condição de $b > 0$ e $\varphi = \pm\sqrt{\frac{-b}{d}}$ com a condição de $b < 0$. É possível associar um parâmetro de temperatura T à b , ou seja $b \rightarrow b(T) = (T - T_c)b_o$, tal que b_o é uma constante positiva e T_c é a temperatura crítica. Deste modo para $T > T_c$ temos $b(T) > 0$ e conseqüentemente $F(\varphi)$ tem um único mínimo em $\phi = 0$ e para $T < T_c$ temos $b(T) < 0$ e então existem dois pontos de mínimo simétricos em $\varphi_+ = +\sqrt{\frac{|b|}{d}}$ e em $\varphi_- = -\sqrt{\frac{|b|}{d}}$.

Deste modo, concluímos que o potencial quártico do tipo

$$V(\varphi) = (T - T_c)b_o\varphi^2 + d\varphi^4 \quad (2.29)$$

descreve uma transição de fase contínua entre as fases ferromagnética e paramagnética para $T < T_c$ e $T > T_c$, respectivamente.

No caso da solução exata em $d = 1$ apresentada na seção 2.2, podemos compatibilizar os resultados tomando $T_c = 0$ e então teremos sempre $T > T_c$, ou seja, a fase paramagnética.

2.5 Transformação de Hubbard-Stratonovich

O objetivo da transformação de Hubbard-Stratonovich é obter uma teoria de campos a partir de uma teoria discretizada. Por meio desta transformação, o modelo de Ising pode ser formalmente mapeado em um problema de campo contínuo. Essa proposta se trata basicamente de aplicar uma identidade gaussiana nas variáveis em questão [22].

Para uma hamiltoniana do tipo

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n J_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (2.30)$$

obtemos a seguinte função de partição

$$Z = 2^{-N} \sum_{\{\sigma_i\}=\pm 1} e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \sigma_i \sigma_j}, \quad (2.31)$$

em que $K_{ij} = \beta J_{ij}$. A matriz J é responsável por descrever o tipo de interação, por exemplo, no caso do modelo de Ising de campo médio temos $J_{ij} = J/2N$, para o caso de interações entre primeiros vizinhos temos $J_{ij} = J\delta_{i,j\pm 1}$, etc. Ao definirmos $\tilde{K} \equiv K_o\mathbb{I} + K_{ij}$, a função de partição pode ser reescrita como

$$Z = 2^{-N} e^{-K_o N/2} \sum_{\{\sigma_i\}=\pm 1} e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \tilde{K}_{ij} \sigma_i \sigma_j}. \quad (2.32)$$

Considerando a integral funcional

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T M \varphi + \varphi \sigma},$$

em que σ e φ são dois vetores N dimensionais com todas as suas entradas reais, M é uma matriz $N \times N$ positiva definida e

$$\int \mathcal{D}\varphi \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^N d\varphi_i \right). \quad (2.33)$$

A partir de integrais do tipo gaussiana, podemos encontrar

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T M \varphi + \varphi \sigma} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det M}} e^{\frac{1}{2}\sigma^T M^{-1}\sigma}, \quad (2.34)$$

que é uma identidade válida para toda matriz M .

Sendo $K_o x_i \geq \sum_j K_{ij} x_j$ para qualquer vetor positivo x , \tilde{K} será uma matriz positiva definida, portanto podemos aplicar a identidade da Eq. (2.34) na Eq. (2.32), e encontrar

$$Z = 2^{-N} e^{-K_o N/2} (2\pi)^{-N/2} \sqrt{\det \tilde{K}^{-1}} \sum_{\{\sigma_i\}=\pm 1} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi + \varphi \sigma}. \quad (2.35)$$

Como a soma sobre as configurações de σ_i estão desacopladas,

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma_i\}=\pm 1} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi + \varphi \sigma} &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi} \sum_{\{\sigma_i\}=\pm 1} e^{\sum_i \sigma_i \varphi_i} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi} \prod_i^N (e^{\varphi_i} + e^{-\varphi_i}) \\ &= 2^N \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi} \prod_i^N \cosh(\varphi_i) \\ &= 2^N \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi + \sum_i^N \ln[\cosh(\varphi_i)]}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} Z &= e^{-K_o N/2} (2\pi)^{-N/2} (\det \tilde{K})^{-1/2} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi + \sum_i^N \ln [\cosh(\varphi_i)]} \\ &= \mathcal{A} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi^T \tilde{K}^{-1} \varphi + \sum_i^N \ln [\cosh(\varphi_i)]}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

em que $\mathcal{A} \equiv e^{-K_o N/2} (2\pi)^{-N/2} (\det \tilde{K})^{-1/2}$.

Até este ponto, a transformação é geral, isto é, podemos relacionar qualquer problema descrito por variável que assuma valores ± 1 a um problema de campos clássicos segundo essa descrição. Seja

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{-1} &= (K_o \mathbb{I} + K)^{-1} \\ &= K_o^{-1} (\mathbb{I} - K_o^{-1} K)^{-1} \\ &= K_o^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-K/K_o)^n, \end{aligned} \quad (2.38)$$

podemos aproximar o resultado para

$$\tilde{K}^{-1} \approx K_o^{-1} \mathbb{I} - K. \quad (2.39)$$

Para justificar essa aproximação, podemos considerar um sistema de poucos sítios, tal que

$$K = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d & e & f \\ b & 0 & b & c & d & e \\ c & b & 0 & b & c & d \\ d & c & b & 0 & b & e \\ e & d & c & b & 0 & b \\ f & e & d & c & b & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

em que b representa a interação entre primeiros vizinhos, c entre segundos e etc. Neste caso, considerar interações de primeiros vizinhos quer dizer que as interações do tipo c , d , e e f não são da mesma ordem que b , portanto a contribuição dominante será

$$K \approx \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Além disso, como $b/K_o < 1$, podemos aproximar para o primeiro termo da expansão, levando ao resultado descrito na equação (2.39). Considerando interações de segundos

vizinhos, além de manter o parâmetro c , é necessário considerar termos de $(b/K_o)^2$, assim como para terceiros vizinhos temos termos cúbicos e assim por diante. Como estamos interessados no modelo de Ising, agora podemos analisar o caso de interações de primeiros vizinhos, ou seja, $K \approx b \delta_{i,j\pm 1}$. Desta forma, encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \varphi_i \tilde{K}_{ij}^{-1} \varphi_j &= K_o^{-1} \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 - K_o^{-1} \sum_{\langle i,j \rangle} \varphi_i \varphi_j \\ &= K_o^{-1} \sum_{i=1}^N (\varphi_i^2 + \varphi_i^2 - 2\varphi_i \varphi_{i+1}) - NK_o^{-1} \\ &= K_o^{-1} \sum_{i=1}^N a^2 \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{a} \right)^2 - NK_o^{-1}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que a é o parâmetro da rede. Podemos notar que este termo é o responsável pelas derivadas que podem aparecer na teoria no limite do contínuo, já que este é o único termo que envolve interações entre diferentes sítios. Caso fosse considerado interações de segundos vizinhos ou outros, encontraríamos derivadas de ordens mais altas.

A contribuição do potencial pode ser encontrada pelo termo

$$\ln(\cosh \varphi_i) = \ln\left(1 + \frac{\varphi_i^2}{2} + \frac{\varphi_i^4}{4!} + \mathcal{O}(\varphi_i^6)\right). \quad (2.43)$$

No limite em que tomamos o espaçamento entre os sítios pequeno o suficiente para considerar φ_i como um campo contínuo, ou seja, $a \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$, obtemos

$$i \rightarrow \vec{r}, \quad \varphi_i \rightarrow \phi(\vec{r}) \quad e \quad \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{a} \right) \rightarrow \nabla \phi(\vec{r}). \quad (2.44)$$

Portanto teremos a função de partição do modelo de Ising escrita como

$$Z = \tilde{N} \int \mathcal{D}\phi(\vec{r}) e^{-\int d^d r \left\{ (\nabla \phi(\vec{r}))^2 - m\phi^2(\vec{r}) - \lambda\phi^4(\vec{r}) + \mathcal{O}(\phi^6(\vec{r})) \right\}}, \quad (2.45)$$

em que \tilde{N} são as constantes de normalização que não participam da integração.

Se considerarmos a ação adimensional completa,

$$\mathcal{S} = \int d^d r \left\{ (\nabla \phi(\vec{r}))^2 - \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \phi^i \right\}, \quad (2.46)$$

em que a soma em i temos uma série infinita, em que α_i são as constantes de acoplamento. Como o campo ϕ tem dimensão $(d-2)/2$ em unidades de massa, os parâmetros α_i tem dimensões $i + d(1-i/2)$. Podemos definir constantes de acoplamento adimensionais $\lambda_i = \Lambda^{-i-d(1-i/2)} \alpha_i$, em que $\Lambda = 1/a$, e então

$$\mathcal{S} = \int d^d r \left\{ (\nabla \phi(\vec{r}))^2 - \lambda_i \Lambda^{i+d(1-i/2)} \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \right\}. \quad (2.47)$$

A integração nos modos de energia $E < \Lambda$ levam à

$$\lambda_i \Lambda^{i+d(1-i/2)} \int d^d r \phi^i = \lambda_i (E/\Lambda)^{-i-d(1-i/2)}. \quad (2.48)$$

Deste modo, os termos que implicam $[-i - d(1 - i/2)] > 0$ contribuem cada vez menos na ação conforme $(E/\Lambda) < 1$ e se tornam irrelevantes. Os termos com $[-i - d(1 - i/2)] = 0$ contribuem sempre na mesma forma na ação independente da escala de energia (ou seja, efetivamente contribuem a baixas temperaturas), são os termos marginais e, por fim, os termos $-i - d(1 - i/2) < 0$ são os mais importantes a baixas energias, portanto são os termos relevantes [23].

Se considerarmos o caso $d = 4$, os termos em que $-i - 4(1 - i/2) > 0$ serão irrelevantes, ou seja, $i > 4$. Isso quer dizer que podemos desprezar os termos de ordem (ϕ_i^6) e de ordens mais altas, que se tornam operadores não renormalizáveis. Por fim, encontramos

$$Z = \tilde{N} \int \mathcal{D}\phi(\vec{r}) e^{-\int d^4r \{(\nabla\phi(\vec{r}))^2 - m\phi^2(\vec{r}) - \lambda\phi^4(\vec{r})\}}, \quad (2.49)$$

ou seja, podemos concluir que o modelo ϕ^4 é a teoria de campos que descreve o modelo de Ising em $d = 4$.

3 Instantons

Utilizando o conceito de integração funcional, nosso objetivo é analisar a possibilidade de inversão global espontânea no modelo de Ising e calcular o propagador entre esses estados. Nesse sentido, apresentamos a solução clássica de instantons e também a contribuição de multi-instantons.

3.1 Integração Funcional

O objeto central de estudo da mecânica estatística é a função de partição, da qual podemos extrair diversas outras quantidades de interesse físico, como energia livre, magnetização, susceptibilidade magnética, calor específico, dentre outros. A função de partição também pode fazer o papel do propagador de um operador de evolução temporal Euclidiano, conectando problemas da mecânica estatística a modelos de teorias de campos.

Para construir essa conexão, primeiramente devemos definir o propagador. Dada uma hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (3.1)$$

em que p é o momento, m a massa e $V(x)$ um potencial que depende somente da variável de posição x , podemos escrever o operador de evolução temporal para um pequeno intervalo de tempo ϵ como

$$T(\epsilon) \equiv \exp \left\{ -\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + V(x) \right) \right\} \approx \exp \left\{ -\frac{i\epsilon p^2}{2\hbar m} \right\} \exp \left\{ -\frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \right\}, \quad (3.2)$$

considerando que as contribuições provenientes do comutador de p e $V(x)$ são proporcionais a $\epsilon^2 \ll 1$. Sendo um intervalo de tempo $t = N\epsilon$, em que N é um número inteiro, podemos escrever a evolução do estado $x(0) \equiv x_0$ até $x(t) \equiv x_N$ como

$$\langle x_N | e^{-i\frac{\mathcal{H}}{\hbar}t} | x_0 \rangle = \langle x_N | \underbrace{\exp \left\{ -i\frac{\mathcal{H}\epsilon}{\hbar} \right\} \dots \exp \left\{ -i\frac{\mathcal{H}\epsilon}{\hbar} \right\}}_{N \text{ vezes}} | x_0 \rangle. \quad (3.3)$$

Entre cada exponencial pode ser inserida uma relação de completeza,

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i |x_i\rangle \langle x_i|, \quad (3.4)$$

o que resulta em

$$\langle x_N | e^{-i\frac{\mathcal{H}}{\hbar}t} | x_0 \rangle = \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \langle x_i | \exp \left\{ -i\frac{\mathcal{H}\epsilon}{\hbar} \right\} | x_{i-1} \rangle, \quad (3.5)$$

ou seja, em um produto de N integrais com a mesma forma.

O termo a ser integrado pode ser reescrito conforme a aproximação feita na equação (3.2) e pode ser inserida uma relação de completeza na base de momentos, a fim de encontrar

$$\begin{aligned} \langle x_i | e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)} | x_{i-1} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \langle x_i | p \rangle \langle p | e^{-i\frac{p^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_{i-1} \rangle e^{-i\frac{V(x_i)\epsilon}{\hbar}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-i\frac{\hbar}{\epsilon}\left[\frac{p^2}{2m}+V(x_i)\epsilon-p(x_i-x_{i-1})\right]}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo

$$\langle x_i | p \rangle = \frac{e^{-i\frac{px_i}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.7)$$

A integração na equação (3.6) tem forma gaussiana e resulta em

$$\langle x_i | e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)} | x_{i-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} \exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{\epsilon^2}-V(x_i)\right]\right\}. \quad (3.8)$$

Neste caso, o propagador pode ser reescrito como

$$\langle x_N | e^{-i\frac{\hbar}{\epsilon}t} | x_0 \rangle = \int \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{\epsilon^2}-V(x_i)\right]\right\}, \quad (3.9)$$

com a seguinte medida de integração

$$\int \mathcal{D}x \equiv \left(\frac{m}{2i\pi\epsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\prod_{i=1}^{N-1} \int dx_i\right). \quad (3.10)$$

A partir do limite do contínuo, $N \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$, da Eq. (3.9) podemos interpretar o somatório como uma integração e o termo no expoente passa a ser exatamente a integral no tempo da Lagrangiana, ou seja, a ação do sistema ($S[x]$),

$$\begin{aligned} \langle x_N | e^{-i\frac{\hbar}{\epsilon}t} | x_0 \rangle &= \int \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt \mathcal{L}(x, \dot{x})\right\} \\ &= \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Portanto, podemos concluir que a probabilidade da partícula chegar a um estado x_N , partindo de x_0 pode ser encontrada a partir da integração funcional da exponencial da ação. Se tratando de uma exponencial complexa, a contribuição da integração será maior na região em que $S[x]$ for mínimo, pois o termo $\frac{i}{\hbar}$ faz com que essa integral oscile muito, contribuindo menos nessas regiões. Este resultado é compatível com nossa experiência, pois as trajetórias clássicas são aquelas que minimizam a ação, portanto as mais relevantes para calcular essa probabilidade de transição. Isso também implica que podemos fazer expansões em torno da trajetória clássica para obter os principais termos do problema proposto.

Todo esse desenvolvimento poderia ter sido feito utilizando uma rotação de Wick, que é do tipo $t \rightarrow -i\tau$ e o resultado final seria

$$\langle x_N | e^{-\frac{\mathcal{H}}{\hbar}\tau} | x_0 \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{\hbar}S_E[x]}, \quad (3.12)$$

sendo $S_E[x]$ a ação Euclidiana,

$$S_E[x] \equiv \int d\tau \mathcal{L}_E = \int d\tau \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x), \quad (3.13)$$

em que \mathcal{L}_E é a lagrangiana Euclidiana do sistema e \dot{x} agora é definido como $\dot{x} \equiv dx/d\tau$. Vale observar que neste caso também temos as maiores contribuições quando $S_E[x]$ é mínima.

3.1.1 Conexão com a Mecânica Estatística

A partir da identificação $1/(k_B T) = it$ podemos relacionar o operador de evolução temporal com o peso de Boltzmann,

$$e^{-it\mathcal{H}} = e^{-\frac{1}{k_B T}\mathcal{H}}, \quad (3.14)$$

o que nos sugere uma relação entre o propagador da mecânica quântica com a função de partição na mecânica estatística.

A função de partição é definida como a soma sobre todas configurações do sistema,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_j \exp(-\beta E_j) \\ &= \sum_j \langle j | e^{-\beta\mathcal{H}} | j \rangle \\ &= \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que E_j é a energia de um dado estado j , $\beta = 1/(k_B T)$ e $\langle j |$ é a base que diagonaliza \mathcal{H} , a hamiltoniana do sistema.

Por outro lado, a amplitude de transição de um estado q para um estado q' no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = -i\beta$ é

$$\begin{aligned} K(q', -i\beta; q, 0) &= \langle q' | e^{-i(-i\beta)\mathcal{H}} | q \rangle \\ &= \langle q' | e^{-\beta\mathcal{H}} \sum_j | j \rangle \langle j | | q \rangle \\ &= \sum_j e^{-\beta E_j} \langle q' | | j \rangle \langle j | | q \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se impormos $q = q'$ e integramos em todo o espaço de q , encontramos

$$\begin{aligned} \int dq K(q, -i\beta; q, 0) &= \sum_j e^{-\beta E_j} \langle j | \int dq | q \rangle \langle q' | | j \rangle \\ &= \sum_j e^{-\beta E_j} = Z, \end{aligned} \quad (3.17)$$

ou seja, conduzindo à própria função de partição do sistema [20, 24].

A função de partição surge naturalmente na mecânica estatística como um fator de normalização das probabilidades. Para tanto ela é definida como a partir da soma sobre todas as configurações acessíveis do sistema termodinâmico (de onde surge seu nome em alemão: “*Zustandssumme*”). A identificação $t = -i\beta$, ou seja, a associação de β ao parâmetro que permite a evolução dos estados, permite a descrição dessa soma via integrais de trajetórias.

Como os vetores $|j\rangle$ podem representar também spins, tomemos por exemplo o caso de spin $\frac{1}{2}$ em uma base que diagonalize a hamiltoniana. Neste caso $|j\rangle$ pode assumir somente dois estados, sem um estado intermediário entre ambos. Estes dois estados de spin são estados bem definidos e que não são ligados por uma trajetória. Portanto, a integração funcional para variáveis de spin requer uma interpretação um pouco mais geral do que uma integração exatamente de “trajetórias”, sendo de fato integração sobre todas configurações que o sistema possa assumir [20].

3.2 Solução de Instantons

No modelo de Ising, não há gasto energético para inverter todos os spins de uma só vez, mesmo que um estado só possa chegar à outro através de um tunelamento, pois estes estados se encontram no mesmo nível de energia. Naturalmente pode ser questionado qual a probabilidade de todos os spins inverterem espontaneamente. Transformando o modelo de Ising em uma teoria quártica, a resposta dessa pergunta será então o propagador, como será demonstrado abaixo.

A amplitude de probabilidade de transição de um estado centrado em $x = -a$ para outro centrado em $x = a$ durante um intervalo de tempo T é

$$\langle a | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} T} | -a \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x))}. \quad (3.18)$$

O potencial

$$V(x) = \frac{g^2}{8} (x^2 - a^2)^2 \quad (3.19)$$

tem mínimos em $x = \pm a$. Para o caso de $E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) = 0$ não podemos fazer expansões em torno da trajetória clássica, uma vez que a barreira de potencial impede que existam tais trajetórias. Neste caso, uma opção é levarmos nosso cálculo ao espaço Euclidiano por meio de uma transformação $t \rightarrow -it$ [8, 9]. Desta forma, $\dot{x}^2 \rightarrow -\dot{x}^2$, e o expoente se transforma com

$$i \int dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) \rightarrow - \int dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right) \equiv - \mathcal{S}_E, \quad (3.20)$$

ou seja, a transformação da coordenada temporal efetivamente inverte o potencial na ação, conforme representado na figura 4. A definição de \mathcal{S}_E é o que chamaremos de ação Euclidiana.

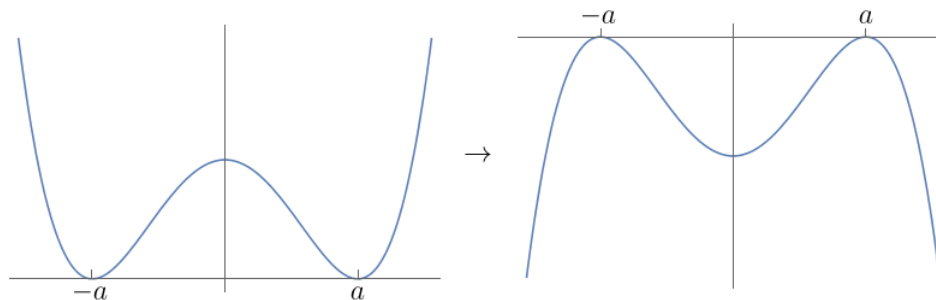


Figura 4 – Inversão do potencial $V(x)$ pela transformação $t \rightarrow -it$.

Agora, para o potencial invertido, podemos encontrar uma trajetória que minimize a \mathcal{S}_E e que conecta os pontos $x = -a$ e $x = a$. A transformação na variável temporal é uma rotação de Wick. Essa transformação é um artifício matemático que facilita os cálculos levando um problema do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano. Do ponto de vista do plano complexo da variável t , desde que não haja nenhum polo no primeiro e no terceiro quadrante, a integral de caminho deve ser nula, portanto são equivalentes as integrações em $Re(t)$ ou em $Im(t)$, e a transformação $t \rightarrow -it$ pode ser aplicada [25]. Como o potencial proposto se trata de uma função analítica, a rotação de Wick pode ser aplicada.

A equação de movimento de \mathcal{S}_E tem a forma

$$m\ddot{x}_{cl} - \frac{g^2}{2}(x_{cl}^2 - a^2)x_{cl} = 0 \quad (3.21)$$

e a solução desta equação é

$$x_{cl}(t) = \pm a \tanh \frac{\omega(t - t_c)}{2}, \quad (3.22)$$

tal que $m\omega^2 = g^2a^2$ e o rótulo adicionado à função $x(t)$ é por se tratar da trajetória clássica. A função $x_{cl}(t)$, expressada graficamente na Figura 5, tem como característica a aproximação assintótica do ponto $\pm a$ conforme $t \rightarrow \pm\infty$. Entretanto, a maior parte da transição entre estes dois pontos efetivamente ocorre em um intervalo muito curto do eixo t , centralizado em $t = t_c$.

Segundo Coleman [9], esta solução é conhecida como “solução de Instanton” devido à ‘t Hooft, o qual utilizou o final “-on” em referência as soluções de partículas para campos clássicos (como *solitons*) e o início “*instan-*” por ser localizada no tempo. Pela mesma razão, Polyakov sugeriu o nome “*pseudoparticles*”, que também pode ser encontrado na literatura, bem como são encontrados os nomes “soluções de *kink*” para a solução que recebe o sinal positivo e “anti-instanton” ou “anti-kink” para a solução que recebe o sinal negativo.

Os limites assintóticos de $x_{cl}(t)$ são os pontos de mínimo do potencial $V(x)$. Assumindo que o sistema não tem energia maior que a barreira de potencial que separa estes dois pontos, essa transição representa um tunelamento. Portanto, permitindo a evolução

no limite de $t \rightarrow \infty$, esta solução descreve que, se ocorrer, a transição de um estado localizado em $x = -a$ para outro localizado em $x = a$ será instantânea (em um intervalo muito curto de tempo) e bem localizada no eixo t . A constante t_c define o centro da transição e não pode ser determinada de uma forma geral, surgindo como um reflexo da invariância translacional temporal.

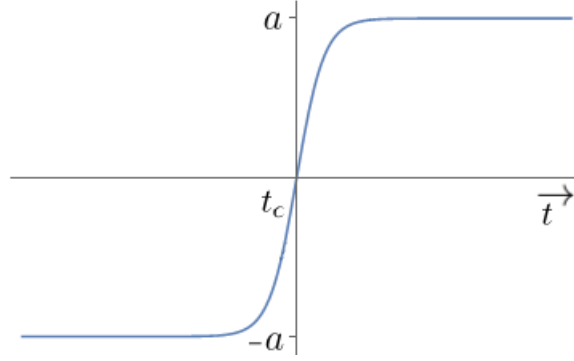


Figura 5 – Solução da equação de movimento.

Para encontrar uma expressão para a (3.18), podemos expandir a ação Euclidiana em torno da trajetória clássica até segunda ordem. Assumindo uma pequena perturbação em torno das trajetórias clássicas,

$$x(t) = x_{cl}(t) + \eta(t), \quad (3.23)$$

podemos expandir a ação em

$$\mathcal{S}_E[x] \approx \mathcal{S}_E[x_{cl}] + \frac{1}{2} \int \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \frac{\delta^2 \mathcal{S}_E[x_{cl}]}{\delta x_{cl}(t_1) \delta x_{cl}(t_2)} \eta(t_2). \quad (3.24)$$

A partir da trajetória clássica, dado que $E = 0$ implica em

$$V(x_{cl}) = \frac{m}{2} \dot{x}_{cl}^2, \quad (3.25)$$

a ação Euclidiana assume a forma

$$\mathcal{S}_E[x_{cl}] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt m \dot{x}_{cl}^2 = m \int_{-a}^{+a} dx_{cl} \sqrt{\frac{2}{m} V(x)}, \quad (3.26)$$

e portanto, definindo $\mathcal{S}_o \equiv \mathcal{S}_E[x_{cl}]$ obtemos

$$\mathcal{S}_o = \frac{m\omega}{2a} \int_{-a}^{+a} dx_{cl} (x_{cl}^2 - a^2) = \frac{2m^2\omega^3}{3g^2}. \quad (3.27)$$

Ao expandir a ação em torno da trajetória clássica, a nossa variável de integração $\mathcal{D}x$ passa a ser $\mathcal{D}\eta$, já que $x_{cl}(t)$ se trata de uma trajetória única e bem definida. Deste modo, podemos escrever o propagador de um único instanton como

$$\langle a | e^{-\frac{1}{\hbar} \mathcal{H}T} | -a \rangle_o \approx N e^{-\frac{2m^2\omega^3}{3g^2\hbar}} \int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \frac{\delta^2 \mathcal{S}_E[x_{cl}]}{\delta x_{cl}(t_1) \delta x_{cl}(t_2)} \eta(t_2)}. \quad (3.28)$$

Para realizar a integração, podemos expandir a nossa variável $\eta(t)$ em um conjunto completo de funções ψ_n . Primeiramente, notamos que a expressão no expoente pode ser entendida como a atuação de um operador sobre a função $\eta(t)$, pois

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{S}_E[x_{cl}]}{\delta x_{cl}(t_1) \delta x_{cl}(t_2)} &= \int dt \frac{\delta^2}{\delta x_{cl}(t_1) \delta x_{cl}(t_2)} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + V(x) \right] \\ &= \int dt \delta(t - t_1) \left(-m \frac{d^2}{dt^2} + V''(x(t)) \right) \delta(t - t_2) \\ &= \left(-m \frac{d^2}{dt_1^2} + V''(x(t_1)) \right) \delta(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Logo o termo completo toma a forma

$$\int \int dt dt_1 \eta(t) \frac{\delta^2 \mathcal{S}_E[x_{cl}]}{\delta x_{cl}(t) \delta x_{cl}(t_1)} \eta(t_1) = \int dt \eta(t) \mathcal{O}(t) \eta(t), \quad (3.30)$$

com

$$\mathcal{O}(t) \equiv \left(-m \frac{d^2}{dt^2} + V''(x(t)) \right). \quad (3.31)$$

Sendo $\psi_n(t)$ uma base completa de autoestados ortonormais do operador $\mathcal{O}(t)$, tal que $\mathcal{O}(t)\psi_n(t) = \lambda_n \psi_n(t)$, podemos escrever a função $\eta(t)$ como

$$\eta(t) = \sum_{n \geq 0} c_n \psi_n(t), \quad (3.32)$$

em que c_n são os coeficientes da soma. Então, obtemos

$$\int dt \sum_{n, m \geq 0} c_n \psi_n(t) \mathcal{O}(t) c_m \psi_m(t) = \sum_{n \geq 0} (c_n)^2 \lambda_n. \quad (3.33)$$

A última integração funcional poderia ser operada segundo a identidade gaussiana

$$\int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int dt \eta(t) \mathcal{O}(t) \eta(t)} = \int \prod_{n \geq 0} dc_n e^{-\sum_{n \geq 0} (c_n)^2 \lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{O}(t)}}. \quad (3.34)$$

Entretanto, derivando a equação de movimento em relação ao tempo podemos encontrar

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d}{dt} \dot{x}_{cl}(t) - V'(x_{cl}) \right) = \left(m \frac{d^2}{dt^2} - V''(x_{cl}) \right) \dot{x}_{cl}(t) = \mathcal{O}(t) \dot{x}_{cl}(t) = 0. \quad (3.35)$$

Ou seja, a função $\dot{x}_{cl}(t) \propto \psi_o(t)$ é uma das funções $\psi_n(t)$ cujo autovalor é igual a zero. Este fato implica $\det \mathcal{O}(t) = 0$, o que configura uma divergência ao nosso propagador. Uma opção é extrair da integração todas as informações físicas possíveis, isolando somente a divergência. O que pode ser obtido então é

$$\int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int dt \eta(t) \mathcal{O}(t) \eta(t)} = \int \prod_{n \geq 0} dc_n e^{-\sum_{n \geq 0} (c_n)^2 \lambda_n} = \int \prod_{n > 0} dc_n e^{-\sum_{n > 0} (c_n)^2 \lambda_n} \int_{-\infty}^{+\infty} dc_o. \quad (3.36)$$

Para encontrarmos o parâmetro c_o a partir da equação (3.23) utilizamos a ortogonalidade das funções que compõem $\eta(t)$,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt x(t+t_c)\psi_o(t) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt [x_{cl}(t+t_c) + \eta(t+t_c)] \psi_o(t) \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \left[x_{cl}(t+t_c) + \sum_{n \geq 0} c_n \psi_n(t+t_c) \right] \psi_o(t) \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{cl}(t)\psi_o(t)dt + c_o. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A função $\psi_o(t)$ é encontrada normalizando $\dot{x}_{cl}(t)$, Eq. (3.22),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |\dot{x}_{cl}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \frac{a\omega}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\omega(t-tc)}{2} \right) \right|^2 = \frac{2a^2\omega}{3}, \quad (3.38)$$

tal que

$$\psi_o(t) = \sqrt{\frac{m}{\mathcal{S}_o}} \dot{x}_{cl}(t). \quad (3.39)$$

Sabendo que

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) = \int_{x_{cl}(-\frac{T}{2})}^{x_{cl}(\frac{T}{2})} dx_{cl} x_{cl}(t) = 0, \quad (3.40)$$

podemos encontrar agora

$$c_o = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt x(t+t_c)\psi_o(t). \quad (3.41)$$

Ou seja, a integração será determinada em termos de t_c , logo $c_o = c_o(t_c)$. Para mudar a variável de integração c_o para t_c na Eq. (3.36), precisamos calcular o jacobiano,

$$\begin{aligned} \frac{dc_o(t_c)}{dt_c} &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \frac{dx(t+t_c)}{dt} \psi_o(t) \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \left(\frac{dx_{cl}(t)}{dt} + \sum_n c_n \frac{d\psi_n(t)}{dt} \right) \psi_o(t) \\ &= \left(\frac{\mathcal{S}_o}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt |\psi_o(t)|^2 + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt c_o \frac{d\psi_o(t)}{dt} \psi_o(t) \\ &\quad + \sum_{n>0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt c_n \frac{d\psi_n(t)}{dt} \psi_o(t) \\ &= \left(\frac{\mathcal{S}_o}{m} \right)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\hbar). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \langle a | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}T} | -a \rangle_o &\approx N e^{-\frac{1}{\hbar} \mathcal{S}_o} \left(\frac{\mathcal{S}_o}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \int \prod_{n>0} dc_n e^{\sum_{n>0} (c_n)^2 \lambda_n} \int dt_c \\ &\approx \frac{N}{\sqrt{\det' \mathcal{O}(t)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \mathcal{S}_o} \left(\frac{\mathcal{S}_o}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt_c, \end{aligned} \quad (3.43)$$

em que $\det' \mathcal{O}(t)$ é o produto dos autovalores de $\mathcal{O}(t)$, a menos do autovalor nulo, e $T \rightarrow \infty$. Nesta última expressão é possível observar explicitamente que a divergência está relacionada com a variável t_c , ou seja, com o centro do instanton que pode se posicionar em qualquer ponto do eixo temporal. O determinante sem o autovalor nulo pode ser calculado e é expresso por

$$\begin{aligned} \frac{N}{\sqrt{\det' \mathcal{O}(t)}} &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} K \frac{N}{\sqrt{\det \left[\frac{1}{\hbar} \left(-m \frac{d^2}{dt^2} + m\omega^2 \right) \right]}} \\ &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} K \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{\omega T}{2}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

em que utilizamos na última passagem o resultado conhecido do propagador de um oscilador harmônico. Por conveniência definimos

$$r \equiv \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} K e^{-\frac{1}{\hbar} \mathcal{S}_0} \quad (3.45)$$

para obter o propagador na forma

$$\langle a | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}T} | -a \rangle_o = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \right) r \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt_c. \quad (3.46)$$

É possível observar então que a solução do propagador de um potencial quártico é o produto de dois termos, o primeiro (entre parênteses) é exatamente a contribuição de um oscilador harmônico e o segundo é a contribuição de um instanton.

3.3 Contribuição de Multi-Instantons

Considerando um sistema inicialmente centrado em $x(t_i) = -a$, vimos que pela ação de um instanton este sistema pode evoluir para $x(t_f) = +a$. Entretanto, o sistema pode chegar a mesma configuração pela ação de um instanton, um anti-instanton e mais um instanton, ou seja, ir para a configuração $x(t_1) = +a$, retornar para $x(t_2) = -a$ e então ir novamente para $x(t_f) = +a$. É possível notar que a ação de um instanton seguida de um anti-instanton retorna o sistema para a configuração inicial, independente de quantas vezes essa sequência ocorra. Portanto, ao calcular o propagador deste sistema devemos levar em conta todas essas possibilidades e somar sobre todas as configurações possíveis: um único instanton; um instanton e um anti-instanton (possibilidade do sistema se encontrar ao fim com a configuração inicial); um par instanton e anti-instanton seguido por mais um instanton e assim por diante.

Para calcular o propagador de n instantons, podemos considerar n pontos sobre o eixo temporal entre $-T/2$ e $+T/2$, tal que $-T/2 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T/2$ e centralizamos em cada ponto um instanton, conforme a figura 6.

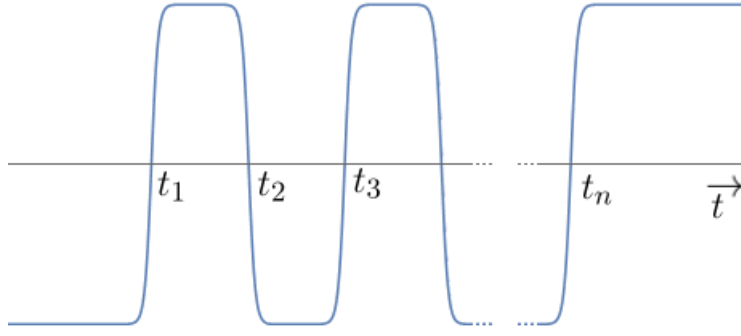


Figura 6 – Disposição de n Instantons no eixo temporal.

Para o caso do instanton centrado em t_n , observamos que os limites de integração são $T/2$ e t_{n-1} . Já o instanton centrado em t_{n-1} terá como limites $T/2$ e t_{n-2} e assim por diante até a última integração, centrada em t_1 , que será integrada sobre todo o espaço entre $-T/2$ à $+T/2$. Deste modo, no propagador a contribuição que antes era de um único instanton passa a ser

$$r \int_{-T/2}^{T/2} dt_c \rightarrow r^n \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{t_1}^{T/2} dt_2 \int_{t_2}^{T/2} dt_3 \cdots \int_{t_{n-1}}^{T/2} dt_n = r^n \frac{T^n}{n!}. \quad (3.47)$$

Podemos agora, a partir do último resultado, somar todas as contribuições de multi instantons. Sempre que n for par o sistema inicia e termina na mesma posição logo

$$\begin{aligned} \langle a | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}T} | a \rangle &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{T^n}{n!} \\ &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \right) \cos(rT). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Já para n ímpar o estado final será sempre diferente do inicial tal que

$$\begin{aligned} \langle -a | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}T} | a \rangle &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{T^n}{n!} \\ &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \right) \sin(rT). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Definindo $E_{\pm} = \hbar(\omega/2 \pm r)$, podemos encontrar uma expressão geral

$$\langle \pm a | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}T} | -a \rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-E_-} \mp e^{-E_+}}{2} \right). \quad (3.50)$$

Assumindo grandes valores para T (tempo longo), identificando os estados de mínima energia da Hamiltoniana como $|\pm\rangle$, tal que $\mathcal{H}|\pm\rangle = E_{\pm}|\pm\rangle$, escrevemos a relação de completudeza como $\mathbb{I} = |-\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|$, e encontramos então

$$\langle \pm a | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}T} | -a \rangle = e^{-E_-} \langle \pm a | - \rangle \langle - | - a \rangle + e^{-E_+} \langle \pm a | + \rangle \langle + | - a \rangle. \quad (3.51)$$

Comparando agora as equações (3.50) e (3.51) podemos concluir que

$$|\langle \pm a | + \rangle|^2 = |\langle \pm a | - \rangle|^2 = \langle a | - \rangle \langle - | - a \rangle = -\langle a | + \rangle \langle + | - a \rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.52)$$

ou seja, os autoestados de energia mínima são combinações pares e ímpares de estados de osciladores harmônicos centrados nos pontos $x = +a$ e em $x = -a$. Podemos notar que entre estes estados (as combinações pares e ímpares) há uma diferença de energia que pode ser determinada por

$$\Delta E = E_+ - E_- = 4\omega^{\frac{3}{2}} a \sqrt{2m\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}S_0}. \quad (3.53)$$

Essa diferença de energia entre dois estados, que a princípio pareciam ser degenerados, se deve à diferença de penetração na barreira de potencial. Do ponto de vista dos estados simétrico e antissimétrico (construídos como combinação linear dos estados fundamentais), a penetração na barreira de potencial quebra a degenerescência elevando a energia do estado que tem combinação ímpar, logo encontramos a combinação par como o estado fundamental [9]. Entretanto, não se trata de uma quebra espontânea de simetria, este resultado demonstra que, como há possibilidade de tunelamento, os dois estados classicamente separados estão, na realidade, conectados.

4 Modelo de Ising com Simetria Local

Neste capítulo construiremos o modelo de Ising com simetria local a partir de quantidades que são invariantes pela inversão dos links conectados à um sítio. Neste modelo, introduziremos o teorema de Elitzur analisando que $\langle \sigma \rangle$ vai a zero sempre, demonstrando a impossibilidade da quebra espontânea de simetria. A partir de expansões à altas e baixas temperaturas, detectaremos que, para $d \geq 3$ este modelo apresenta uma transição de fase. Demonstraremos também que este modelo em $d = 2$ não apresenta transição de fase e pode ser mapeado no modelo de Ising de simetria global em $d = 1$. Por fim, discutiremos uma relação de dualidade entre os modelos com simetria local em $d = 3$ e de simetria global em $d = 2$.

4.1 Construção do Modelo com Simetria Local e Impossibilidade de Quebra Espontânea de Simetria

No fim da década de 1960 e início da década 1970, havia um grande interesse em explicar o fenômeno de confinamento de quarks¹. Uma das principais linhas de estudo utilizava o conceito de liberdade assintótica no contexto de grupo de renormalização de teorias não abelianas [27, 28]. Em contraponto foram desenvolvidas teorias de calibre na rede que expressavam resultados similares através de expansões em altas e baixas temperaturas (ou acoplamentos fortes e fracos) [12]. Um modelo simples com simetria local na rede se trata do modelo de Ising, proposto por Wegner em 1971, que apresenta uma relação de dualidade com o modelo de Ising convencional [10].

Para implementar a simetria local no modelo de Ising, primeiramente construímos uma rede com spins situados nos links e não mais nos sítios. Para cada primeiro vizinho de um sítio n temos um link $\sigma(n, \hat{\mu})$, em que $\hat{\mu}$ é o vetor unitário que especifica a direção em que se encontra o vizinho. Os links $\sigma(n, \hat{\mu})$ podem assumir os valores $+1$ ou -1 e serão as variáveis de interesse [14, 7]. A figura 7 esboça a rede com as novas variáveis.

O produto de todos os links que formam um contorno mínimo é chamado de plaquete, e pode ser representado por

$$\prod_{\ell \in p} \sigma_\ell = \sigma(n, \hat{x})\sigma(n + \hat{x}, \hat{y})\sigma(n + \hat{x} + \hat{y}, -\hat{x})\sigma(n + \hat{y}, -\hat{y}) = \pm 1, \quad (4.1)$$

em que σ_ℓ é uma notação compacta para descrever os links e p refere-se a um plaquete. Portanto o produto corre sobre todos os links pertencentes a um plaquete. A inversão de um spin nesta rede equivale a inverter todos os links conectados à um sítio, conforme

¹ Em 2005 foi feito um relato histórico interessante por Wilson [26], disponível em arXiv:hep-lat/0412043

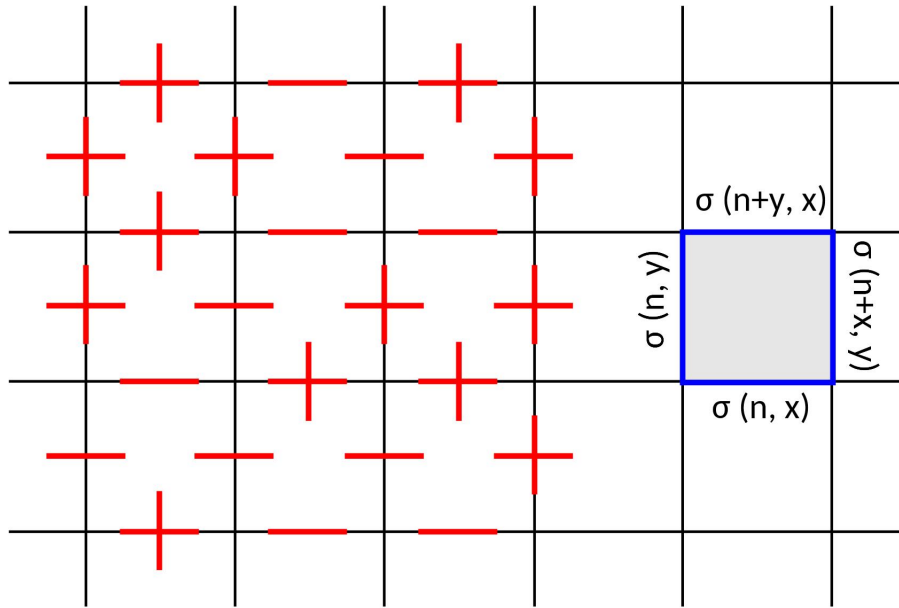


Figura 7 – Representação 2d da rede com variáveis nos links e de um plaquete. Os sinais + e - representam os valores de $\sigma(n, \hat{\mu})$ e o contorno em destaque representa um plaquete. Neste caso as direções de $\hat{\mu}$ podem ser somente \hat{x} e \hat{y} , e $\sigma(n + \hat{x} + \hat{y}, -\hat{x})$ é equivalente à $\sigma(n + \hat{y}, \hat{x})$ bem como $\sigma(n + \hat{y}, -\hat{y})$ é equivalente à $\sigma(n, \hat{y})$.

demonstrado na figura 8. Como um plaquete tem sempre dois links que se conectam ao mesmo sítio, esta inversão não afeta o produto dos links de um plaquete. Esta será a quantidade invariante por transformações de calibre que utilizaremos para construir a hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = -J \sum_p \prod_{\ell \in p} \sigma_\ell - H \sum_{n, \hat{\mu}} \sigma(n, \hat{\mu}), \quad (4.2)$$

em que H é o campo externo.

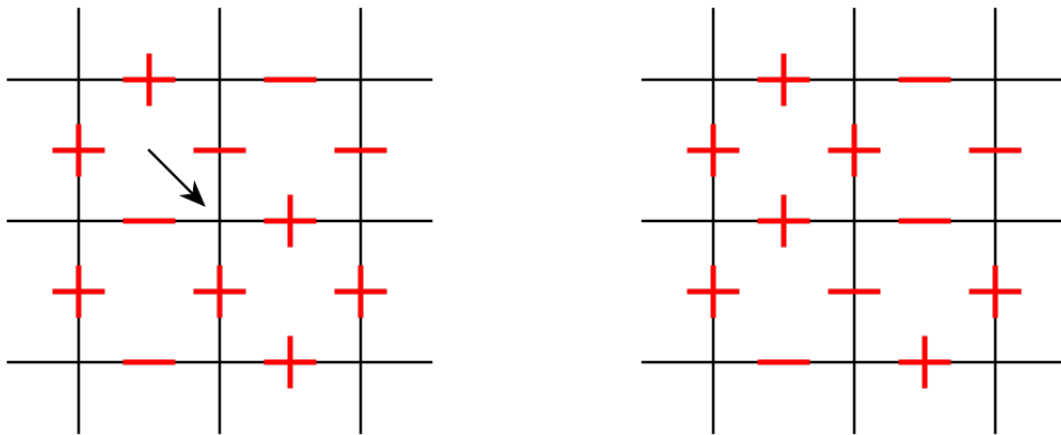


Figura 8 – Representação da transformação dos links da rede conectados ao sítio indicado pela seta.

Em analogia com o modelo de Ising usual (simetria global), podemos calcular a

quantidade

$$\langle \sigma(n_i, \nu) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma(n_i, \nu) \exp \left[\beta J \sum_p \prod_{\ell \in p} \sigma_\ell + H \sum_{n, \hat{\mu}} \sigma(n, \mu) \right]. \quad (4.3)$$

Aplicando uma transformação local nos links que partem de n_i ,

$$\sigma(n_i, \nu) \longrightarrow \sigma(n_i, \nu)' = -\sigma(n_i, \nu), \quad (4.4)$$

encontramos no expoente uma variação no termo de campo proporcional à

$$\delta\sigma = \sigma'(\ell) - \sigma(\ell), \quad (4.5)$$

ou seja,

$$\delta\sigma(n, \nu) = \begin{cases} -2\sigma(n, \nu) & \text{caso seja } n = n_i \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.6)$$

e devido a simetria, o termo de interação entre plaquetas não se altera. Então, o valor médio transformado, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(n_i, \nu) \rangle &= -\frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma(n_i, \nu) \exp \left[\beta J \sum_p \prod_{\ell \in p} \sigma_\ell + H \sum_{n, \hat{\mu}} \sigma(n, \mu) - 2H \sum_{\hat{\mu}} \sigma(n_o, \mu) \right] \\ &= \langle -\sigma(n_i, \nu) e^{-2H \sum_{\hat{\mu}} \sigma(n_i, \mu)} \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Podemos notar que a diferença do valor médio antes e depois da transformação é

$$\begin{aligned} \left| \langle \sigma'(n_i, \nu) \rangle - \langle \sigma(n_i, \nu) \rangle \right| &= \left| \langle -\sigma(n_i, \nu) e^{-2H \sum_{\hat{\mu}} \sigma(n_i, \mu)} \rangle - \langle \sigma(n_i, \nu) \rangle \right| \\ &= \left| \langle -\sigma(n_i, \nu) \rangle \left| e^{-4dH} - 1 \right| \right|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

No limite $H \rightarrow 0$, notamos que $\langle \sigma'(n_i, \nu) \rangle = -\langle \sigma(n_i, \nu) \rangle = 0$, ou seja, o valor esperado do parâmetro de ordem do sistema é nulo independente da variação de outros parâmetros [7, 14]. Esta é uma forma de demonstrar o teorema de Elitzur o qual afirma que, dada uma teoria com simetria local, é impossível uma quebra espontânea dessa simetria, e isso implica que parâmetros de ordem que não refletem a simetria do problema são sempre nulos [11]. Entretanto ainda é possível a existência de diferentes fases, que podem ser analisadas por parâmetros que apresentem a mesma simetria da hamiltoniana.

4.2 Expansão à Altas Temperaturas

Podemos analisar o comportamento deste sistema por meio de expansões de uma quantidade invariante por transformações locais. A quantidade a ser analisada é a correlação de links que compõem um contorno fechado C ,

$$\left\langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \right\rangle, \quad (4.9)$$

também conhecida como “loop de Wilson”. Essa quantidade é invariante de calibre e no limite do menor contorno possível retornamos ao caso de um plaquete.

Primeiramente, consideramos temperaturas altas o suficiente para que os spins não se ordenem espontaneamente. A partir desse ponto consideramos as menores estruturas que podem ser formadas com as interações entre links que, em ordem crescente, são: um plaquete, dois plaquetes vizinhos, dois plaquetes separados e assim por diante. É conveniente expandirmos o peso de cada plaquete como

$$\begin{aligned}
\exp \left[\beta \prod_{\ell \in p} \sigma(\ell) \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\beta \prod_{\ell \in p} \sigma(\ell)]^n}{n!} \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n=\text{par}}}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} + \prod_{\ell \in p} \sigma(\ell) \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{ímpar}}}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \\
&= \cosh(\beta) + \prod_{\ell \in p} \sigma(\ell) \sinh(\beta) \\
&= \cosh(\beta) \left[1 + \prod_{\ell \in p} \sigma(\ell) \tanh(\beta) \right]. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Dessa forma, a correlação do nosso contorno invariante, considerando somente a primeira contribuição, é

$$\langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle = \frac{\sum_{\{\sigma\}} \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \prod_p \left[1 + \tanh \left(\beta \prod_{\ell \in p} \sigma(\ell) \right) \right]}{\sum_{\{\sigma\}} \prod_p \left[1 + \tanh \left(\beta \prod_{\ell \in p} \sigma(\ell) \right) \right]}. \tag{4.11}$$

Podemos notar que

$$\sum_{\{\sigma\}} \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) = \prod_{\ell \in C} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma_\ell = 0, \tag{4.12}$$

o que significa que todas os termos ímpares terão contribuições nulas. No limite de altas temperaturas o argumento da \tanh é pequeno o suficiente para que possamos expandir,

$$\tanh \left(\beta \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \right) = \left(\beta \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \right) - \frac{1}{3} \left(\beta \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\beta \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \right)^5 + \dots \tag{4.13}$$

e então realizar o produto nos p plaquetes. Portanto, o produto dos links do contorno precisam ser multiplicados por termos provenientes da expansão da \tanh , para obter $\sigma^2(\ell)$ para todo ℓ pertencente ao contorno para gerar contribuições não nulas. Como os termos provenientes da expansão são também plaquetes, os links internos também precisam ser repetidos para que sejam obtidas contribuições não nulas. Desta forma, em altas temperaturas é necessário o produto de todos os plaquetes contidos no contorno para que sejam obtidas contribuições efetivas. Este produto é alcançado em ordem de $(\tanh \beta)^{N_p C}$ em

que N_{pC} é a quantidade de plaquetes contidos em C , e a primeira contribuição é

$$\begin{aligned} \langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle &\propto (\tanh \beta)^{N_{pC}} + \mathcal{O}((\tanh \beta)^{N_{pC}}), \\ &= e^{N_{pC} \ln \tanh \beta} + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Interpretando a quantidade de plaquetes interna ao contorno como sua área, ou seja, $A \approx N_{pC}$, podemos concluir que $\langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle$ se comporta como $e^{-f(\beta)A}$, por isso o comportamento é conhecido como “*area law*” (lei de área).

4.3 Expansão à Baixas Temperaturas

Para a expansão à baixas temperaturas teremos efeitos diferentes em $d = 2$ e em $d > 2$, portanto esses casos serão analisados separadamente. Consideremos inicialmente $d > 2$ e temperaturas baixas o suficiente para encontrarmos todos os spins com a mesma orientação que, arbitrariamente, tomamos como $+1$. A expansão agora se trata de analisar contribuições que variam minimamente a energia partindo da configuração totalmente ordenada. Quando um único link é invertido, $2(d - 1)$ plaquetes terão o seu valor invertido, o que chamaremos de frustrados e este caso é a primeira contribuição. A próxima contribuição se dá quando dois links de um mesmo plaquete são invertidos, então $(4d - 6)$ plaquetes são frustrados, em seguida dois links invertidos que não pertençam ao mesmo plaquete... . Na figura 9 podemos observar como a inversão dos links afetam os plaquetes.

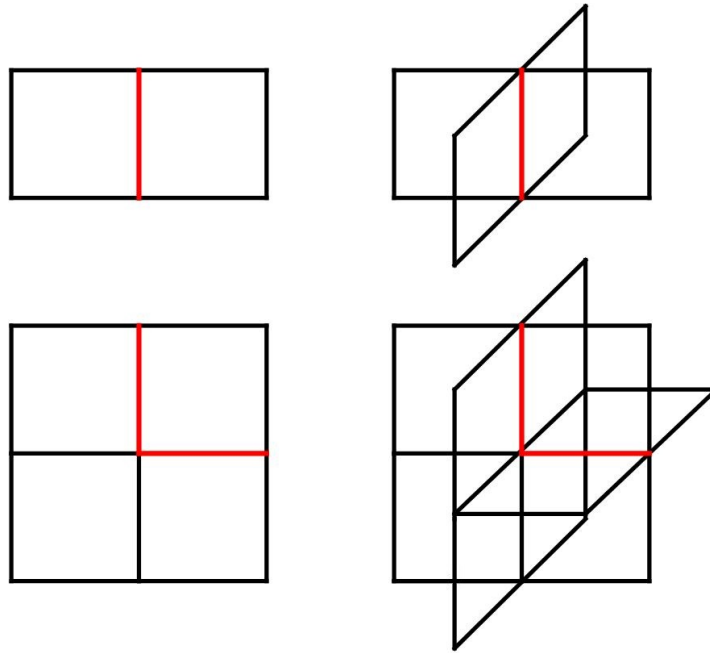


Figura 9 – Representação de plaquetes frustrados em $d = 2$ ao lado esquerdo e em $d = 3$ ao lado direito para um link invertido acima e dois links invertidos no mesmo plaquete abaixo.

A expansão nesses termos será então

$$\begin{aligned} \langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle &= \frac{e^{\beta N_p} + [(N_\ell - L) - L] e^{\beta\{[N_p - 2(d-1)] - 2(d-1)\}} + \dots}{e^{\beta N_p} + N_\ell e^{\beta\{[N_p - 2(d-1)] - 2(d-1)\}} + \dots} \\ &= \frac{1 + (N_\ell - 2L)e^{-4(d-1)\beta} + \dots}{1 + N_\ell e^{-4(d-1)\beta} + \dots}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que L é o comprimento do contorno e N_ℓ é a quantidade total de links do sistema.

Os termos do numerador e do denominador podem ser identificados como uma séries de funções exponenciais,

$$\begin{aligned} \langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle &= \frac{\sum_n e^{-n\beta 4(d-1)} (N_\ell - 2L)^n / n!}{\sum_n e^{-n\beta 4(d-1)} (N_\ell)^n / n!} \\ &= \exp[-2Le^{-4(d-1)\beta}] = e^{H(-\beta)L}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

e então notamos que para baixas temperaturas a correlação se comporta como uma exponencial que decai com o perímetro L .

Esse procedimento de expansões nos mostra que o modelo muda seu comportamento de acordo com a faixa de temperatura analisada. Como consequência, podemos afirmar que há uma transição de fase nesse sistema, ou seja, uma transição de fase sem uma quebra espontânea de simetria [7, 14].

4.3.1 Análise da Degenerescência em $d = 2$

Quando expandimos a correlação em altas temperaturas, foi possível obter um resultado independente da dimensão. Entretanto, para baixas temperaturas, evitamos trabalhar com $d = 2$ pois esse caso apresenta uma degenerescência especial que não está presente em dimensões maiores. Trata-se do caso de dois links invertidos que podem gerar a mesma energia que n links paralelos invertidos, conforme representado na figura 10.

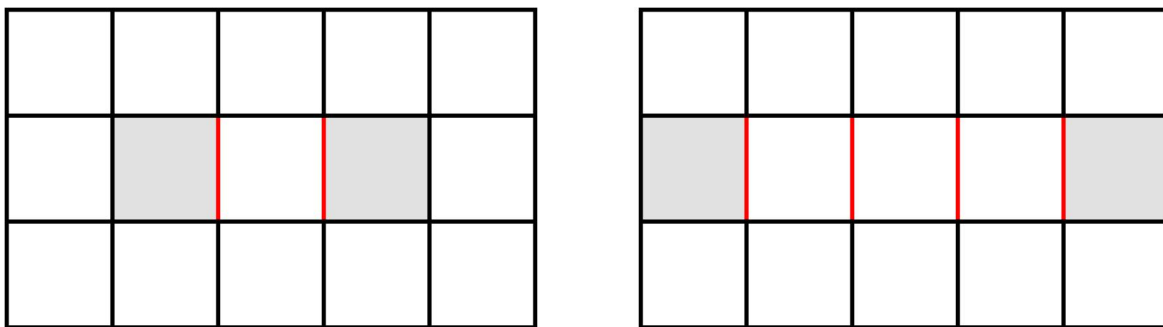


Figura 10 – Representação de duas configurações degeneradas em $d = 2$.

No caso de n links paralelos invertidos, tomando um contorno C que contenha somente um dos plaquetes frustrados, a correlação terá uma quantidade ímpar de links

invertidos. Podemos encontrar N_c configurações, em que N_c é a quantidade de links contidos no contorno C , que levam para esse caso. Portanto, a correlação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle &\simeq \frac{1 + (N - 2N_c)e^{-4\beta} + \dots}{1 + Ne^{-4\beta} + \dots}, \\ &= \exp[-2e^{-4\beta} N_c]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Essa correlação depende de N_c que, no limite termodinâmico, $N_c \approx 2A$, ou seja,

$$\langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle \simeq \exp[H(\beta)A]. \quad (4.18)$$

Portanto, podemos dizer que para $d = 2$ o modelo não apresenta transição de fase, pois a correlação tem o mesmo comportamento para altas e baixas temperaturas.

Podemos ainda relacionar uma dessas dimensões à dimensão temporal $\hat{\tau}$ e fixar $\sigma(n, \hat{\tau}) = 1$. Realizar tal imposição é equivalente a fazer transformações locais na rede de modo a ordenar todos os links de uma direção sem fazer alterações na energia do sistema. Fixando o calibre, a ação do sistema se resume à

$$S = -J \sum_{n, \hat{x}} \sigma(n, \hat{x}) \sigma(n + \tau, \hat{x}). \quad (4.19)$$

Essa hamiltoniana expressa exatamente o modelo de Ising em 1D com simetria global na ausência de campo externo.

Podemos observar que um contorno quadrado de lados R e T , nas direções \hat{x} e $\hat{\tau}$ respectivamente, é

$$\prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) = \prod_{j=0}^R \sigma(n + jx, \hat{x}) \sigma(n + T\tau + jx, \hat{x}). \quad (4.20)$$

Como todos os links que contribuem efetivamente estão agora na direção \hat{x} , podemos simplificar a notação somente localizando os links de forma que $\sigma(jx + i\tau, \hat{x}) \rightarrow \sigma(i, j)$. Dessa forma, reescrevemos a correlação como

$$\langle \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \rangle = \prod_{j=0}^R \langle \sigma(0, jx) \sigma(T, jx) \rangle = \langle \sigma(0, jx) \sigma(T, jx) \rangle^R = \left[e^{-\frac{T}{\xi}} \right]^R = e^{-A/\xi}, \quad (4.21)$$

em que $A = RT$ e o valor de $\langle \sigma(0, jx) \sigma(T, jx) \rangle$ já é conhecido do modelo de Ising em 1D. Podemos então afirmar a equivalência,

$$\text{Modelo com Simetria local 2D} \Leftrightarrow \text{Modelo de Ising 1D}, \quad (4.22)$$

em relação ao ordenamento dos plaquetes e spins (em cada caso) em relação à transição de fase, que não ocorre em ambos [14].

4.4 Mapeamento da Hamiltoniana Quântica 3D com Simetria Local

Para relacionar o modelo com simetria local em 3D a um modelo quântico, primeiramente passaremos a interpretar os σ como vetores de dois estados, um associado ao valor $+1$ e outro ao -1 . Fixamos então o calibre temporal como $\sigma(n, \hat{\tau}) = 1$ e a ação pode ser escrita separando os plaquetes p_τ que têm ligações na direção $\hat{\tau}$ e em plaquetes com ligações somente espaciais (p_s), nas direções representadas genericamente por \hat{x} ,

$$S = -J_\tau \sum_{p_\tau} \prod_{\ell \in p_\tau} \sigma_\ell - J_s \sum_{p_s} \prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell. \quad (4.23)$$

O termo temporal pode ser reescrito em

$$-J_\tau \sum_{p_\tau} \prod_{\ell \in p_\tau} \sigma_\ell = \frac{J_\tau}{2} \sum_{p_\tau} [\sigma(n + \tau, \hat{x}) - \sigma(n, \hat{x})]^2, \quad (4.24)$$

a menos de um termo constante adicional. Então, a ação pode ser redefinida como

$$S = \frac{J_\tau}{2} \sum_{n, \hat{x}} [\sigma(n + \tau, \hat{x}) - \sigma(n, \hat{x})]^2 - J_s \sum_{p_s} \prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell, \quad (4.25)$$

e a função de partição como

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ \frac{-\beta J_\tau}{2} \sum_{n, \hat{x}} [\sigma(n + \tau, \hat{x}) - \sigma(n, \hat{x})]^2 \right\} \exp \left\{ \beta J_s \sum_{p_s} \prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell \right\}, \quad (4.26)$$

em que a soma do termo temporal representa que \hat{x} pode assumir duas direções espaciais.

Observando o termo temporal, as diferentes configurações que pode assumir a quantidade $\exp \{-\beta J_\tau / 2 [\sigma(n + \tau, \hat{x}) - \sigma(n, \hat{x})]\}$ podem ser interpretadas como uma matriz

$$T^\tau = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\beta J_\tau} \\ e^{-2\beta J_\tau} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

A partir da matriz de Pauli σ^x , podemos obter a relação

$$(\cosh \theta)^{-1} e^{\theta \sigma^x} = \begin{pmatrix} 1 & \tanh \theta \\ \tanh \theta & 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

e então podemos reescrever a matriz temporal como

$$T^\tau = (\cosh(\tilde{K}_\tau))^{-1} \exp(\tilde{K}_\tau \sigma_{n, \hat{x}}^x), \quad (4.29)$$

em que $\sigma_{n, \hat{x}}^x = \sigma^x \sigma(n, \hat{x})$ e $\tanh \tilde{K}_\tau \equiv e^{-2\beta J_\tau}$.

Já no termo espacial da ação, podemos notar que $\prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell$ depende somente das variáveis σ_ℓ . Podemos utilizar as matrizes de Pauli para escrever este termo como $\prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell^z$, em que $\sigma_\ell^z = \sigma^z \sigma_\ell$. Essa construção nos leva a função de partição

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\sigma\}} \prod_{n, \hat{x}} T^\tau(\sigma_{n, \hat{x}}^x) \exp \left\{ \beta J_s \sum_{p_s} \prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell^z \right\} \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \left(\cosh(\tilde{K}_\tau) \right)^{-1} \exp \left\{ \tilde{K}_\tau \sum_{n, \hat{x}} \sigma_{n, \hat{x}}^x + \beta J_s \sum_{p_s} \prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell^z \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tomando $\beta J_s / \tilde{K}_\tau = \lambda$, podemos enfim escrever a Hamiltoniana quântica em 3D na forma

$$\mathcal{H}_q = - \sum_{n, \hat{x}} \sigma_{n, \hat{x}}^x - \lambda \sum_{n, \hat{x}} \prod_{\ell \in p_s} \sigma_\ell^z. \quad (4.31)$$

Podemos agora definir um operador $G(n)$ como

$$G(n) = \prod_{\pm \hat{x}} \sigma^x(n, \hat{x}), \quad (4.32)$$

ou seja, um operador que atue σ^x em cada link espacial conectado do sítio n . O efeito desse operador é equivalente a inversão de um spin no sítio n . A ação desse operador sobre um plaquete com links denominados $\ell = 1, 2, 3$ e 4 , em que 1 e 2 estão ligados ao sítio n , será

$$\begin{aligned} G(n) \prod_{\ell \in p_s} \sigma^z(n, \hat{x}) G^{-1}(n) &= (\sigma_1^x \sigma_1^z \sigma_1^x) (\sigma_2^x \sigma_2^z \sigma_2^x) \sigma_3^z \sigma_4^z \\ &= (-\sigma_1^z) (-\sigma_2^z) \sigma_3^z \sigma_4^z \\ &= \prod_{\ell \in p_s} \sigma^z(n, \hat{x}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como $G(n)$ comuta também com o primeiro termo de \mathcal{H}_q , podemos afirmar que $[\mathcal{H}_q, G(n)] = 0$. Assim, a hamiltoniana preserva a simetria de calibre e pelo teorema de Elitzur o espaço de Hilbert formado pelos estados também será invariante por operadores que fazem transformações locais,

$$G(n) |\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (4.34)$$

Desta forma, uma quebra espontânea de simetria não é possível, o que podemos confirmar em

$$\begin{aligned} \langle \psi | \sigma^z(n, \hat{x}) | \psi \rangle &= \langle \psi | G^{-1}(n) G(n) \sigma^z(n, \hat{x}) G^{-1}(n) G(n) | \psi \rangle \\ &= - \langle \psi | \sigma^z(n, \hat{x}) | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (4.35)$$

e portanto $\langle \psi | \sigma^z(n, \hat{x}) | \psi \rangle = 0$.

Segundo a equação (4.34), o operador $G(n)$ pode ser visto como uma identidade. Escrevendo explicitamente $G(n)$ nas direções \hat{x} e \hat{y} , obtemos

$$\mathbb{I} = \sigma^x(n, \hat{x})\sigma^x(n, -\hat{x})\sigma^x(n, \hat{y})\sigma^x(n, -\hat{y}) \quad (4.36)$$

e podemos isolar um dos termos a esquerda, por exemplo $\sigma^x(n, \hat{y})$, para encontrar

$$\sigma^x(n, \hat{y}) = \sigma^x(n, \hat{x})\sigma^x(n, -\hat{x})\sigma^x(n - y, \hat{y}). \quad (4.37)$$

Realizando o mesmo procedimento para isolar $\sigma^x(n - \hat{y}, \hat{y})$ é possível obter

$$\sigma^x(n, \hat{y}) = \sigma^x(n, \hat{x})\sigma^x(n, -\hat{x})\sigma^x(n - y, \hat{x})\sigma^x(n - y, -\hat{x})\sigma^x(n - y, -\hat{y}). \quad (4.38)$$

Este processo pode ser aplicado recursivamente a fim de obter uma expressão para $\sigma^x(n, \hat{y})$ que depende somente de links na direção \hat{x} .

Eliminando toda a dependência de $\sigma^x(n, \hat{y})$ de \mathcal{H}_q , vemos que $[\mathcal{H}_q, \sigma^z(n, \hat{y})] = 0$. Portanto, podemos fixar

$$\sigma^z(n, \hat{y}) = 1, \quad (4.39)$$

sem alterar o sistema. Essas manipulações nos levam a uma hamiltoniana quântica com dependência explícita somente de $\sigma^x(n, \hat{x})$ e $\sigma^z(n, \hat{x})$. Podemos ainda construir uma rede em que um sítio n^* seja dual a um plaquete p e então definir dois novos operadores para a rede dual,

$$\mu^x(n^*) = \prod_{\ell \in p} \sigma^z \quad \text{e} \quad \mu^z(n^*) = \prod_{n' \geq 0} \sigma^x(n - n'\hat{y}, \hat{x}), \quad (4.40)$$

que satisfazem a relação $[\mu^x(n^*)]^2 = [\mu^z(n^*)]^2 = 1$ e as regras de comutação para $m^* \neq n^*$ e de anticomutação em n^*

$$[\mu^x(n^*), \mu^z(m^*)] = \{\mu^x(n^*), \mu^z(n^*)\} = 0. \quad (4.41)$$

O operador $\mu^z(n^*)$ pode ser interpretado como um operador de desordem (ou operador de torção) pois o efeito da atuação deste na rede inicial é a inversão de todos os links até o sítio n . Podemos também recuperar termos de $\sigma^x(n, \hat{x})$ com o operador $\mu^z(n^*)$ segundo

$$\mu^z(n^*)\mu^z(n^* - 1) = \sigma^x(n, \hat{x}). \quad (4.42)$$

Nesse sentido, a hamiltoniana da (4.31) assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_q &= - \sum_{n^*, \ell} \mu^z(n^*)\mu^z(n^* + \ell) - \lambda \sum_{n^*} \mu^x(n^*) \\ &= \lambda \left[- \sum_{n^*} \mu^x(n^*) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n^*, \ell} \mu^z(n^*)\mu^z(n^* + \ell) \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

que nos leva a

$$\mathcal{H}_{\text{Simetria Local}}(\lambda) = \lambda \mathcal{H}_{\text{Ising Quântico}}(\lambda^{-1}). \quad (4.44)$$

que é a relação de dualidade entre os modelos quânticos tridimensionais [14].

Sabendo que $\lambda^{-1} \sim T$, conseguimos então um mapa do comportamento do modelo de Ising com Simetria Local à baixas (altas) temperaturas no comportamento do modelo de Ising de simetria global quântico à altas (baixas) temperaturas. Então é possível caracterizar uma transição de fase no modelo com simetria a temperatura T_c . Na rede dual, encontramos um parâmetro de ordem local que podemos associar à um parâmetro de ordem estendido (ou “não local”) modelo com simetria local,

$$\langle 0 | \mu^x(n^*) | 0 \rangle = \langle 0 | \prod_{n' \geq 0} \sigma^x(n - n'y, \hat{x}) | 0 \rangle, \quad (4.45)$$

ou seja, podemos afirmar que

$$\langle 0 | \prod_{n' \geq 0} \sigma^x(n - n'y, \hat{x}) | 0 \rangle \begin{cases} = 0 & \text{para } \lambda \gg 1 \\ \neq 0 & \text{para } \lambda \ll 1 \end{cases}. \quad (4.46)$$

Um parâmetro de ordem que não vai a zero não contradiz o teorema de Elitzur, já que este apresenta simetria local como a hamiltoniana. Para $\lambda \gg 1$ (ou seja, baixas temperaturas) o valor esperado do operador de desordem é zero, o que significa que nesta fase o estado não apresenta torções na sua rede e os links se encontram ordenados. Já para $\lambda \ll 1$ (ou seja, altas temperaturas), o valor esperado diferente de zero leva a interpretação de que esta fase se trata de um condensado de *kinks*, ou seja, de torções da rede, o que também pode ser reconhecido como a fase desordenada.

5 Modelos $O(N)$

Neste capítulo apresentamos algumas formas dos modelos $O(N)$ que, diferente do modelo de Ising, apresentam simetrias contínuas. No contexto deste modelo abordamos o teorema de Goldstone e investigamos como o bóson de Goldstone pode ser encontrado a partir de uma quebra espontânea de simetria. Além disso, estudamos o modelo XY , que se trata de um caso específico do modelo $O(N)$. Em particular verificamos a existência de diferentes fases em $d > 2$. Como o modelo apresenta simetria local, analogamente ao caso do modelo de Ising com simetria local, calculamos a função de correlação de uma quantidade que também apresenta tal simetria local por expansões a altas e baixas temperaturas. Ao fim do capítulo apresentamos as leis de escala e o procedimento de renormalização de uma forma geral do modelo $O(N)$ e calculamos os expoentes críticos.

5.1 Modelos $O(N)$

Os modelos $O(N)$ podem ser construídos em uma rede com N campos escalares reais dispostos em cada sítio de modo que a energia livre apresente simetria $O(N)$. A construção mais simples é arranjar os campos em um vetor de N componentes,

$$\Phi(\vec{x}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N), \quad (5.1)$$

tal que as quantidades escalares construídas a partir de $\Phi(\vec{x})$ invariantes por rotações N dimensionais, $R \in O(N)$, são adequadas para comporem a energia livre,

$$F[\Phi] = \int d^d x \left[\frac{\gamma}{2} \nabla \Phi(\vec{x}) \cdot \nabla \Phi(\vec{x}) + \frac{\mu^2}{2} \Phi(\vec{x}) \cdot \Phi(\vec{x}) + g (\Phi(\vec{x}) \cdot \Phi(\vec{x}))^2 + \dots \right], \quad (5.2)$$

em que

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = \partial_i \phi_a \partial_i \phi_a, \quad (5.3)$$

sendo i o índice de coordenadas espaciais, ϕ_a e ϕ_b se tratam da a -ésima e b -ésima componentes de $\Phi(\vec{x})$, respectivamente, e a e b assumem valores de 1 à N .

Podemos verificar que $F[\Phi]$ é um invariante. Considerando

$$\phi'_a = R_{ab} \phi_b, \quad (5.4)$$

temos

$$\begin{aligned} \phi_a \phi_a &= R_{ab} \phi_b R_{ac} \phi_c \\ &= \phi_b \phi_b, \end{aligned} \quad (5.5)$$

desde que R seja ortonormal,

$$R_{ba}R_{ac} = \delta_{bc}, \quad (5.6)$$

ou, como convencionalmente é encontrado,

$$R^T R = \mathbb{I}. \quad (5.7)$$

Portanto basta

$$\nabla(R\Phi) = R\nabla\Phi, \quad (5.8)$$

ou seja, as rotações não dependerem da posição, mas se tratarem de uma rotação interna nas componentes do vetor $\Phi(\vec{x})$, para que $F[\Phi]$ seja um invariante [29, 30].

A partir do modelo $O(N)$ podemos encontrar alguns casos recorrentes na literatura [13]. O modelo $O(1)$ trata-se do modelo de Ising, apresentado no capítulo 2. O caso $O(2)$ trata-se do modelo XY que descrevemos a seguir. Embora não tenha sido abordado no presente trabalho, o modelo $O(3)$ trata-se do modelo de Heisenberg, que aborda spins com três graus de liberdade.

5.2 Modelo XY

O modelo XY pode ser definido a partir de produtos de dois vetores unitários situados em sítios vizinhos. Em analogia ao modelo de Ising, se trata de uma generalização das variáveis de spin para o caso que representam um vetor unitário descrito em um plano. A hamiltoniana neste caso é

$$H = -J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}') \quad (5.9)$$

em que a soma ocorre sobre os primeiros vizinhos, $\vec{n}(\vec{r})$ é o vetor unitário referente ao sítio localizado por \vec{r} e vamos considerar $J > 0$. Este modelo pode ser definido em uma rede d dimensional, entretanto as variáveis $\vec{n}(\vec{r})$ serão sempre definidas em um plano (e por isso nomeado XY). Definindo os mesmos vetores de base para todos os planos, \hat{i} e \hat{j} , as variáveis \vec{n} podem ser decompostas e então podemos reescrever o produto em termos da diferença angular dos vetores,

$$\begin{aligned} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}') &= (\hat{i} \cos(\theta) + \hat{j} \sin(\theta)) \cdot (\hat{i} \cos(\theta') + \hat{j} \sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \\ &= \cos(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que θ se trata do ângulo de $\vec{n}(\vec{r})$ em relação a um eixo coordenado comum a todos as variáveis \vec{n} . Assim podemos reescrever a hamiltoniana (5.9) como

$$H = -J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \cos(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}')), \quad (5.11)$$

pois desta forma fica evidente que o modelo é invariante por uma transformação que rotaciona todos os $\vec{n}(\vec{r})$ em um mesmo ângulo,

$$\mathcal{G}(\theta(\vec{r})) = \theta(\vec{r}) + \theta_o, \quad (5.12)$$

visto que a diferença entre os ângulos $\theta(\vec{r})$ e $\theta(\vec{r}')$ é mantida. Essa transformação é equivalente a reparametrizar o eixo coordenado à qual o ângulo θ é medido e trata de uma simetria global do sistema. Este modelo apresenta também uma simetria por transformações

$$\mathcal{T}(\theta(\vec{r})) = \theta(\vec{r}) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.13)$$

Entretanto, diferente da rotação global, essa transformação pode ser aplicada à qualquer variável do modelo o mantendo invariante. Portanto, trata-se de uma simetria local.

Considerando variáveis contínuas, a função de partição é dada por

$$\begin{aligned} Z(K) &= \int \prod_{\vec{r}} dn(\vec{r}) \exp \left[K \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}') \right] \\ &= \int \prod_{\vec{r}} \frac{d\theta(\vec{r})}{2\pi} \exp \left[K \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \cos(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}')) \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

em que $K = \beta J$ e as variáveis θ são integradas no intervalo de 0 e 2π .

Pelo teorema de Elitzur, o valor esperado de quantidades que não tenham a invariância do modelo vão a zero, assim uma quantidade adequada para investigar a existência de fases neste modelo deve ser invariante pela transformação (5.13). Vamos analisar a quantidade

$$G_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}') = \langle e^{i\lambda\theta(\vec{r})} e^{i\kappa\theta(\vec{r}')} \rangle \quad (5.15)$$

em que λ e κ são constantes que podem assumir somente valores inteiros para que a periodicidade em intervalos de 2π seja mantida. Aplicando a transformação (5.12),

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \left(G_{\lambda\kappa}(\vec{r} - \vec{r}') \right) &= \langle e^{i\lambda\theta(\vec{r})} e^{i\kappa\theta(\vec{r}')} e^{i\theta_o(\lambda+\kappa)} \rangle \\ &= e^{i\theta_o(\lambda+\kappa)} G_{\lambda\kappa}(\vec{r} - \vec{r}'), \end{aligned} \quad (5.16)$$

podemos verificar que $G_{\lambda\kappa}(\vec{r} - \vec{r}')$ é invariante pela transformação global,

$$G_{\lambda\kappa}(\vec{r} - \vec{r}') = e^{i\theta_o(\lambda+\kappa)} G_{\lambda\kappa}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (5.17)$$

somente se

$$G_{\lambda\kappa}(\vec{r} - \vec{r}') = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda + \kappa = 0. \quad (5.18)$$

Por conveniência escolhemos a solução não trivial mais simples, $\lambda = -\kappa = 1$ e omitimos os subíndices de $G_{\lambda\kappa}(\vec{r} - \vec{r}')$. Notando que $G(\vec{r} - \vec{r}')$ depende somente da diferença entre

os vetores, centralizamos a origem no ponto \vec{r} , e renomeamos a diferença entre os vetores como $(\vec{r}' - \vec{r}) \rightarrow \vec{r}$, tal que

$$G(\vec{r}) = \langle e^{i(\theta(\vec{0}) - \theta(\vec{r}))} \rangle. \quad (5.19)$$

A quantidade definida na equação (5.19) é invariante local e a partir dela podemos analisar o comportamento no limite de altas e baixas temperaturas.

5.2.1 Limite de Altas Temperaturas

No limite de altas temperaturas temos $K \sim 1/(k_B T) \rightarrow 0$, portanto $G(\vec{r})$ pode ser expandido em potências de K ,

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{r}} \frac{d\theta(\vec{r})}{2\pi} e^{i(\theta(\vec{0}) - \theta(\vec{r}))} e^{K \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \cos(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}'))} \\ &= \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{r}} \frac{d\theta(\vec{r})}{2\pi} e^{i(\theta(\vec{0}) - \theta(\vec{r}))} \prod_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} (1 + K \cos(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}')) + \dots) \\ &= \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{r}} \frac{d\theta(\vec{r})}{2\pi} e^{i(\theta(\vec{0}) - \theta(\vec{r}))} \\ &\times \prod_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \left[1 + \frac{K}{2} \left(e^{i(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}'))} + e^{-i(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}'))} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Como

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} = 0, \quad (5.21)$$

o termo dominante da expansão é aquele em que as exponenciais se cancelam, gerando um fator de K^n ,

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{r}} \frac{d\theta(\vec{r})}{2\pi} e^{i(\theta(\vec{0}) - \theta(\vec{r}))} \\ &\times \left[K e^{i(\theta(\vec{1}) - \theta(\vec{0}))} K e^{-i(\theta(\vec{2}) - \theta(\vec{1}))} \dots K e^{-i(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}-\vec{1}))} \right] \\ &= \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{r}} \frac{d\theta(\vec{r})}{2\pi} (C(n) K^n + \mathcal{O}(K^{n+1})), \end{aligned} \quad (5.22)$$

em que n é o número de vetores unitários que precisam ser somados para chegar ao ponto \vec{r} partindo da origem e $C(n)$, conhecido como “*Manhattan distance*”, é a quantidade de menores trajetórias possíveis entre esses pontos. Três exemplos de diferentes caminhos que compõe $C(n)$ estão representados na figura 11. Vale ressaltar que quando os pontos são colineares existe somente uma trajetória mínima entre os pontos.

Podemos definir

$$\xi(K) \equiv \ln^{-1}(K^{-1}), \quad (5.23)$$

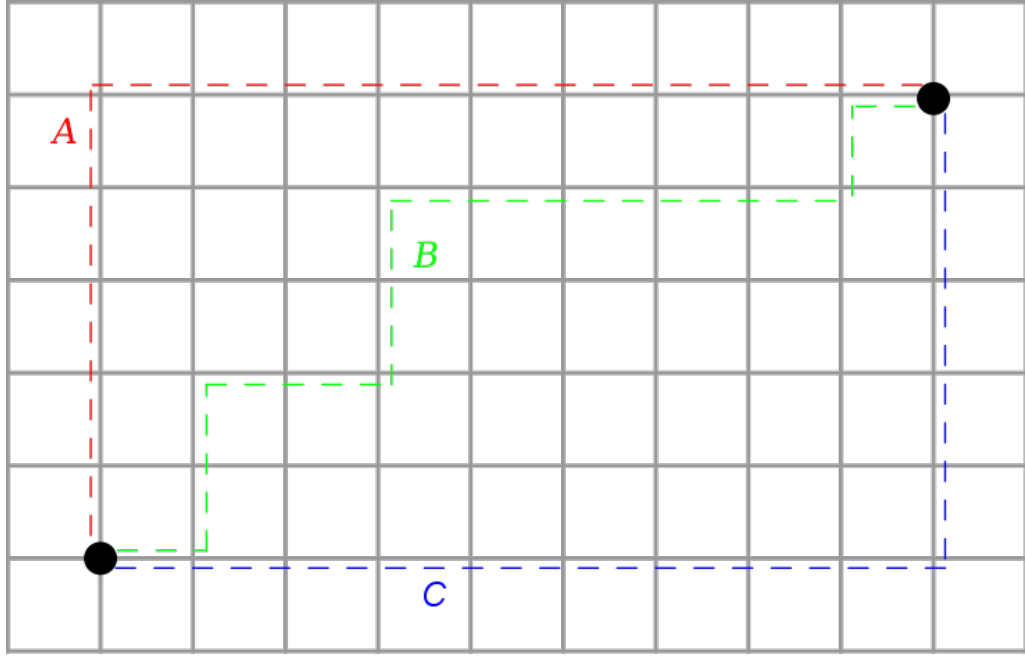


Figura 11 – Representação de diferentes trajetórias que contribuem para $C(n)$ no caso de $d = 2$.

e então teremos

$$K^n = \exp \left[-\frac{n}{\xi(K)} \right] \quad (5.24)$$

e, por fim, a correlação pode ser reescrita como

$$G(\vec{r}) = e^{-n/\xi(K)} [1 + \mathcal{O}(K)], \quad (5.25)$$

ou seja, decai exponencialmente com a distância entre os pontos.

5.2.2 Limite de Baixas Temperaturas

Para o caso de baixas temperaturas, consideramos que os spins estão em uma fase ordenada, tal que

$$\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}') \ll 1 \quad \text{e} \quad K \gg 1. \quad (5.26)$$

Neste caso, podemos expandir $\cos(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}'))$ para ângulos pequenos,

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} K \cos(\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}')) \right] &= \exp \left[\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} K \left(1 - \frac{1}{2} (\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}'))^2 + \dots \right) \right] \\ &\approx \exp \left[\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} K \right] \exp \left[- \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \frac{a^2 K}{2} \left(\frac{\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r}')}{a} \right)^2 \right] \\ &\approx \mathcal{A} \exp \left[- \sum_{\vec{r}} \sum_i \frac{a^2 K}{2} \left(\frac{\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r} + \hat{a}_i)}{a} \right)^2 \right] \\ &\approx \mathcal{A} \exp \left[- \frac{K}{2} \int d^d r (\nabla \theta(\vec{r}))^2 \right], \end{aligned} \quad (5.27)$$

em que \mathcal{A} é a coleção de parâmetros constantes, a é o parâmetro da rede, \hat{a}_i são os vetores de base da rede e o índice i refere-se as possíveis direções da rede. No limite do contínuo a somatória entre primeiros vizinhos pode ser convertida na integral do gradiente de $\theta(r)$. Vale destacar que deste modo fica evidente a invariância por transformações de calibre do tipo

$$\theta(\vec{r}) \rightarrow \theta(\vec{r}) + \theta_o, \quad (5.28)$$

em que θ_o é um parâmetro que não depende de \vec{r} .

No caso do modelo de Ising em d dimensões em um estado totalmente ordenado, no limite de baixas temperaturas a primeira perturbação se trata da inversão de um único spin e tem custo energético proporcional à quantidade de vizinhos. Fazendo uma análise semelhante no modelo XY, esta perturbação representa um spin rotacionado por um ângulo π . Entretanto, como as variáveis \vec{n} são contínuas, ao invés de discretas, podemos perturbar todos os vetores de uma região L^d , tal que em pequenas distâncias temos sempre uma transformação suave, mas a grandes distâncias identificamos uma rotação completa de 2π , como uma onda de torção, conforme demonstrado na figura 12.

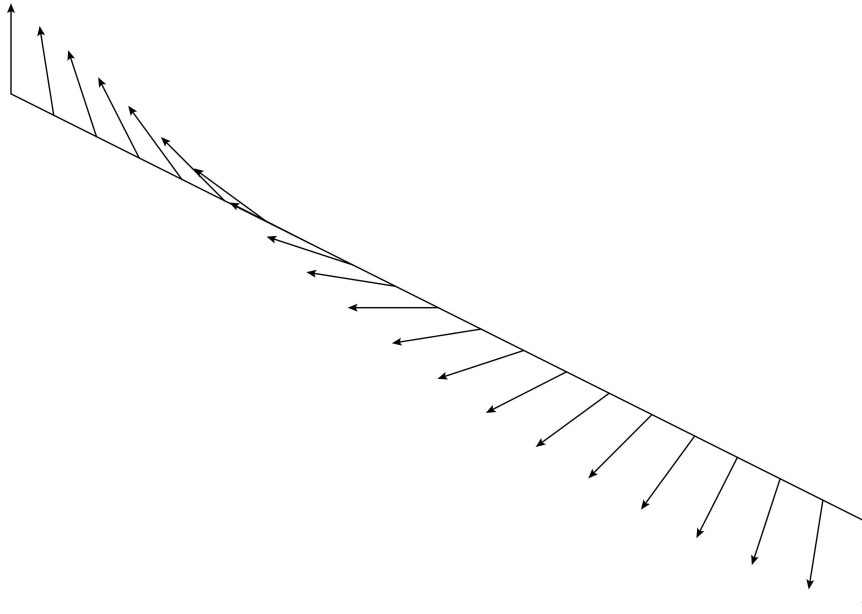


Figura 12 – Representação de uma onda de torção.

No caso de uma torção completa, como encontrado pela expansão (5.27), a densidade de custo energético é proporcional à

$$\begin{aligned} \delta E &\approx \int d^d r (\nabla \theta(\vec{r}))^2 \\ &\sim L^{d-2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

A partir desta análise dimensional, é possível notar que:

- em $d > 2$ as excitações devem ser suprimidas em pequenas regiões, ou seja, L deve ser pequeno, para que o custo energético seja baixo. Deste modo, pequenas excitações são permitidas por flutuações de energia, sem que a ordem do sistema seja afetada;
- em $d < 2$ as excitações se espalham por longas regiões, mantendo o custo energético baixo. Assim, qualquer perturbação no sistema afeta sua ordem e um ordenamento rígido é impossível;
- em $d = 2$ temos o caso marginal que requer uma análise mais cuidadosa.

O teorema de Hohenberg-Mermin-Wagner diz que em $d \leq 2$ nenhuma simetria contínua pode ser quebrada espontaneamente [31, 32]. Posteriormente à esses resultados, Coleman apresentou argumentos mais rigorosos e estabeleceu o mesmo resultado no contexto de teoria de campos relativísticos [33].

Considerando o resultado qualitativo da Eq. (5.29) em $d > 2$, que nos indica que as excitações devem ser suprimidas, podemos concluir que o sistema se encontra fortemente correlacionado a baixas temperaturas diferente do caso encontrado para altas temperaturas, indicando, portanto, uma transição de fase. O cálculo explícito em $d = 2$ demonstra que a função de correlação decai com potências da distância,

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{r^{\eta(K)}}, \quad (5.30)$$

portando continua indo a zero no limite em que $r \rightarrow \infty$ para temperatura finita, o que indica que não há correlação há longas distâncias [22, 14, 20]. Mesmo a correlação indo a zero tanto a altas quanto a baixas temperaturas, a não analiticidade do decaimento indica que há uma transição de fase. Neste caso trata-se de uma transição de fase mesmo sem quebra espontânea de simetria, ou seja, não está associada ao parâmetro de ordem, conhecida como transição de Kosterlitz-Thouless.

5.3 Bóson de Goldstone

Como vimos na Seção 2.4, para um potencial quártico a quebra espontânea de uma simetria leva à um estado em que a energia mínima tem somente duas possibilidades,

$$\langle \phi \rangle = +\sqrt{\frac{|b|}{d}} \quad \text{ou} \quad \langle \phi \rangle = -\sqrt{\frac{|b|}{d}}. \quad (5.31)$$

Pela relação do modelo de Ising com o modelo ϕ^4 , podemos entender que a quebra de simetria, ao definir dois valores possíveis para o estado fundamental, impõe uma restrição aos campos ϕ . Entretanto, os dois valores se alteram por um sinal, que é um reflexo da simetria por uma inversão global. Isso quer dizer que essa restrição está relacionada com

a magnitude do valor de $\langle \phi \rangle$, mas ainda resta um grau de liberdade relacionado à direção em que a maioria dos spins se ordenam.

Podemos analisar também o modelo XY, em que ocorre um resultado semelhante. No caso $d = 3$ e baixas temperaturas, os spins tendem a se ordenar na mesma direção. Como vimos na Eq. (5.2) a energia livre, para $N = 2$, pode ser escrita como

$$F[\psi] = \int d^d x \frac{\gamma}{2} (\nabla \psi^\dagger(x)) \cdot (\nabla \psi(x)) - \frac{\mu^2}{2} |\psi(x)|^2 + g |\psi(x)|^4, \quad (5.32)$$

em que $\psi(x)$ é um campo complexo. Como estamos interessados em fazer uma analogia com o modelo ϕ^4 , mantemos apenas termos até quarta ordem. Neste caso, vemos que o potencial é

$$V(x) = -\frac{\mu^2}{2} |\psi(x)|^2 + \frac{g}{4} |\psi(x)|^4, \quad (5.33)$$

e se parametrizarmos o campo complexo em

$$\psi(x) = M(x)e^{i\theta(x)}, \quad (5.34)$$

obtemos um potencial quártico semelhante como da fenomenologia de Landau apresentada anteriormente, Eq. (2.29),

$$V(x) = -\frac{\mu^2}{2} M^2(x) + \frac{g}{4} M^4(x). \quad (5.35)$$

Deste modo, sabemos que a partir de uma quebra espontânea de simetria o estado fundamental assume os valores

$$\langle |\psi| \rangle = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{g}} \equiv M_o. \quad (5.36)$$

Ao escrever a energia livre em termos da parametrização do campo complexo obtemos

$$\begin{aligned} F[M, \theta] &= \int d^d x \frac{\gamma}{2} \nabla (M(x)e^{-i\theta(x)}) \cdot \nabla (M(x)e^{i\theta(x)}) + \frac{\mu^2}{2} M^2(x) + \frac{g}{4} M^4(x) \\ &= \int d^d x \frac{\gamma}{2} [(\nabla M(x)) e^{-i\theta(x)} - iM(x) (\nabla \theta(x)) e^{-i\theta(x)}] \cdot [(\nabla M(x)) e^{+i\theta(x)} + \\ &\quad + iM(x) (\nabla \theta(x)) e^{+i\theta(x)}] + \frac{\mu^2}{2} M^2(x) + \frac{g}{4} M^4(x) \\ &= \int d^d x \frac{\gamma}{2} M^2(x) (\nabla \theta(x))^2 + \frac{\gamma}{2} (\nabla M(x))^2 + \frac{\mu^2}{2} M^2(x) + \frac{g}{4} M^4(x), \end{aligned} \quad (5.37)$$

tal que a partir de uma perturbação em torno do estado fundamental,

$$M(x) = M_o + \tilde{M}(x), \quad (5.38)$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
F[\tilde{M}, \theta] &= \int d^d x \frac{\gamma}{2} (M_o + \tilde{M}(x))^2 (\nabla\theta(x))^2 + \frac{\gamma}{2} (\nabla\tilde{M}(x))^2 + \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2} (M_o + \tilde{M}(x))^2 + \frac{g}{4} (M_o + \tilde{M}(x))^4 \\
&= \int d^d x \frac{\gamma}{2} (M_o + \tilde{M}(x))^2 (\nabla\theta(x))^2 + \frac{\gamma}{2} (\nabla\tilde{M}(x))^2 + \\
&\quad + a_o + a\tilde{M}(x) + b\tilde{M}^2(x) + c\tilde{M}^3(x) + \frac{g}{4}\tilde{M}^4(x), \tag{5.39}
\end{aligned}$$

em que a_o , a , b e c são novos parâmetros construídos a partir de μ e g . Podemos observar que o termo de fase apresenta somente uma parte cinética, $(\nabla\theta(x))^2$, e nunca termos como θ^2 ou θ^4 . A conclusão que podemos tomar é que em torno do mínimo do potencial, o termo de fase se comporta como um grau de liberdade.

Se seguirmos o mesmo procedimento para o caso $O(3)$, podemos parametrizar o campo Φ em coordenadas esféricas,

$$\Phi(x) = M(x) (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)), \tag{5.40}$$

tal que

$$\Phi^2(x) = M^2(x), \tag{5.41}$$

ou seja, temos novamente o potencial quártico. Ao expandirmos a energia livre em torno dos valores mínimos do potencial, encontramos

$$\begin{aligned}
F[\tilde{M}, \theta, \varphi] &= \int d^d x \frac{\gamma}{2} (M_o + \tilde{M}(x))^2 [(\nabla\theta(x))^2 + \sin^2(\theta) (\nabla\varphi(x))^2] + \frac{\gamma}{2} (\nabla\tilde{M}(x))^2 \\
&\quad + a_o + a\tilde{M}(x) + b\tilde{M}^2(x) + c\tilde{M}^3(x) + \frac{g}{4}\tilde{M}^4(x), \tag{5.42}
\end{aligned}$$

ou seja temos novamente uma parte da energia livre que apresenta somente termos cinéticos, conseqüentemente, dois graus de liberdade. Neste caso, as flutuações em torno do estado fundamental correspondem à uma superfície esférica S^2 com métrica $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

Esses dois casos exemplificam o teorema de Goldstone, que diz: em qualquer sistema, a quebra espontânea de uma simetria contínua gera a possibilidade de excitações sem gap (*gapless*). Esse tipo de excitação é conhecida como bóson de Goldstone. Para cada gerador das simetrias que foram quebradas, um modo de excitação pode surgir, ou seja, temos um bóson de Goldstone para cada gerador de simetria quebrado [29].

Na linguagem de teoria de grupos os modelos $O(N)$ são descritos por vetores do tipo $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ com simetria $O(N)$. A quebra espontânea de simetria fixa um grau de liberdade, e então o vetor passa a ser do tipo $\Phi = (M_o, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1})$, e a simetria passa a ser $O(N-1)$. Dos estados que se distribuem sobre uma variedade \mathbb{R}^N , os que representam o estado fundamental estão compreendidos no coset

$$S^{N-1} = \frac{O(N)}{O(N-1)}. \tag{5.43}$$

A quantidade de bósons de Goldstone geradas a partir da quebra espontânea de simetria é

$$\begin{aligned} \#b. \text{ Goldstone} &= \#\text{Geradores } O(N) - \#\text{Geradores } O(N-1) \\ &= \frac{1}{2}N(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)(N-2) \\ &= N-1. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Este resultado é compatível com o encontrado para o modelo XY, $N=2$, portanto um único bóson, e no modelo $O(3)$ com dois bósons.

5.4 Grupo de Renormalização

Motivado pelo interesse na quebra espontânea de simetria, é natural surgir o questionamento sobre as transições de fases nos modelos $O(N)$. A transição de fase de um modelo pode ser caracterizada pela não analiticidade das quantidades termodinâmicas em torno da temperatura crítica T_c . Estas não analiticidades são governadas pelos expoentes críticos [21].

Dado um conjunto de expoentes críticos, obtém-se a descrição de toda uma classe de universalidade. Isto quer dizer que todos os modelos que têm o mesmo conjunto de expoentes críticos apresentam o mesmo tipo de comportamento em torno do ponto de transição, portanto pertencem a mesma classe de universalidade [34, 35]. O que difere estes modelos, além da escala de energia, são os detalhes microscópicos não relacionados às simetrias. Para identificar a relação entre estes modelos, foi desenvolvida nas décadas de 1960 e 1970, principalmente por Kenneth Wilson, Michael Fisher e Leo Kadanoff, uma poderosa ferramenta chamada de Grupo de renormalização.

5.4.1 Propagador, Leis de Escala e Expoentes Críticos

Como apresentado na seção 2.4, o parâmetro que acompanha o termo quadrático carrega certa informação de transição de fase e dependência de temperatura. Representamos de uma forma geral este parâmetro como

$$\mu_o^2 \approx t^\nu, \tag{5.45}$$

em que $t \equiv |T - T_c|$ e ν é um expoente crítico.

Para uma energia livre do tipo

$$F[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} \left(\gamma (\nabla \phi(\vec{x}))^2 + \mu^2 \phi^2(\vec{x}) \right), \tag{5.46}$$

que é a parte livre da teoria de potencial quártico, adicionamos um termo de campo externo $H(\vec{x})$ e ao fim tomamos o limite em que este campo se anule, $H(\vec{x}) \rightarrow 0$, mantendo a teoria original inalterada,

$$F[\phi] = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \left[(\gamma \nabla \phi(\vec{x}))^2 + \mu^2 \phi^2(\vec{x}) + H(\vec{x}) \phi(x) \right] \Bigg|_{H(\vec{x})=0}. \tag{5.47}$$

Assim a função de partição assume a forma

$$Z[H] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\beta \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \left[\frac{\gamma}{2} (\nabla\phi(\vec{x}))^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2(\vec{x}) + H(\vec{x})\phi(\vec{x}) \right] \right] \Big|_{H(\vec{x})=0}. \quad (5.48)$$

A partir da Eq. (5.48) verificamos como a função de correlação de dois pontos pode ser escrita como derivadas funcionais,

$$\begin{aligned} \langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \rangle &= \frac{1}{\beta^2 Z^2} \frac{\delta^2 Z[H]}{\delta H(\vec{x})\delta H(\vec{y})} \\ &= \frac{1}{\beta Z^2} \frac{\delta}{\delta H(\vec{x})} \int \mathcal{D}\phi \phi(\vec{y}) \exp \left[-\beta \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \left[\gamma (\nabla\phi(\vec{x}))^2 + \mu^2 \phi^2(\vec{x}) + H(\vec{x})\phi(\vec{x}) \right] \right] \Big|_{H(x)=0} \\ &= \frac{1}{Z^2} \int \mathcal{D}\phi \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \exp \left[-\beta \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \left[\gamma (\nabla\phi(\vec{x}))^2 + \mu^2 \phi^2(\vec{x}) + H(\vec{x})\phi(x) \right] \right] \Big|_{H(\vec{x})=0}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Chamaremos de função de correlação conectada a expansão de cumulante de $\phi(x)$,

$$\langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \rangle_c \equiv \langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{x}) \rangle - \langle \phi(\vec{x}) \rangle \langle \phi(\vec{y}) \rangle, \quad (5.50)$$

que podemos verificar que é gerada por derivadas funcionais do logaritmo da função de partição,

$$\begin{aligned} \langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \rangle_c &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta^2 \ln Z[H]}{\delta H(\vec{x})\delta H(\vec{y})} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta H(\vec{x})} \left(\frac{1}{Z} \frac{\delta Z[H]}{\delta H(\vec{y})} \right) \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z[H]}{\delta H(\vec{y})\delta H(\vec{x})} - \frac{1}{Z^2} \frac{\delta Z[H]}{\delta H(\vec{x})} \frac{\delta Z[H]}{\delta H(\vec{y})} \\ &= \langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \rangle - \langle \phi(\vec{x}) \rangle \langle \phi(\vec{y}) \rangle. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Para calcular tais integrais é conveniente trabalhar no espaço de Fourier, portanto são aplicadas as identidades de transformação de Fourier

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}} \quad \text{e} \quad H(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} H_{\vec{k}} \quad (5.52)$$

a fim de obter

$$\begin{aligned} F[\phi] &= \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int d^d x \left[\frac{1}{2} \phi_{\vec{k}_1} \phi_{\vec{k}_2} (-\gamma \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + \mu^2) + \phi_{\vec{k}_1} H_{\vec{k}_2} \right] e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{x}} \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} (\gamma k^2 + \mu^2) \phi_{\vec{k}} \phi_{-\vec{k}} + \phi_{\vec{k}} H_{-\vec{k}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

A função de partição pode ser escrita como

$$Z[H] = e^{-\beta F_0} \exp \left[\frac{\beta}{2} \int d^d x d^d y H(\vec{x}) G(x-y) H(\vec{y}) \right] \quad (5.54)$$

em que

$$G(x-y) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\gamma k^2 + \mu^2}. \quad (5.55)$$

Para identificarmos esta forma, integramos a parte quadrática,

$$Z[H] = e^{-\beta F_0} \exp \left[\frac{\beta}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{|H_{\vec{k}}|^2}{\gamma k^2 + \mu^2} \right]. \quad (5.56)$$

e, aplicando a transformação de Fourier inversa,

$$H_{\vec{k}} = \int d^d x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} H(\vec{x}), \quad (5.57)$$

encontramos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{|H_{\vec{k}}|^2}{\gamma k^2 + \mu^2} &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d x d^d y \frac{H(\vec{x}) H(\vec{y})}{\gamma k^2 + \mu^2} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \\ &= \int d^d x d^d y H(\vec{x}) H(\vec{y}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\gamma k^2 + \mu^2} \\ &= \int d^d x d^d y H(\vec{x}) G(x-y) H(\vec{y}). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Como descrita na Eq. (5.51), a função de correlação conectada agora pode ser encontrada como

$$\begin{aligned} \langle \phi(\vec{x}) \phi(\vec{y}) \rangle_c &= \frac{1}{\beta^2 \delta H(\vec{x}) \delta H(\vec{y})} \ln \left(e^{-\beta F_0} \exp \left[\frac{\beta}{2} \int d^d u d^d v H(\vec{u}) G(u-v) H(\vec{v}) \right] \right) \\ &= \frac{1}{\beta^2 \delta H(\vec{x}) \delta H(\vec{y})} \left(-\beta F_0 + \frac{\beta}{2} \int d^d u d^d v H(\vec{u}) G(u-v) H(\vec{v}) \right) \\ &= G(x-y). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Podemos verificar que $G(x-y)$ é a função de Green do operador $(-\gamma \nabla_x^2 + \mu^2)$,

$$\begin{aligned} (-\gamma \nabla_x^2 + \mu^2) G(x-y) &= (-\gamma \nabla_x^2 + \mu^2) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\gamma k^2 + \mu^2} \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\gamma k^2 + \mu^2) e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\gamma k^2 + \mu^2} \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \\ &= \delta(x-y). \end{aligned} \quad (5.60)$$

A função $G(x - y)$ também é conhecida como “propagador” e é similar ao propagador definido na teoria quântica de campos [8].

Aplicando a identidade

$$\frac{1}{k^2 + \mu^2/\gamma} = \int_0^\infty dt e^{-(k^2 + \mu^2/\gamma)t}, \quad (5.61)$$

o propagador pode ser escrito como

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dt e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} - (k^2 + \mu^2/\gamma)t} \\ &= \frac{1}{\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dt e^{-t(k + i\frac{\vec{r}}{2t})^2 - \frac{r^2}{4t} - t\mu^2/\gamma} \\ &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{-d/2} e^{-\frac{r^2}{4t} - t\mu^2/\gamma} \\ &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt e^{-\frac{r^2}{4t} - t\mu^2/\gamma - \frac{d}{2} \ln t}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Utilizando o método de ponto de sela, como descrito na seção 3.2, podemos definir a função

$$f(t) \equiv \frac{r^2}{4t} + \frac{t\mu^2}{\gamma} + \frac{d}{2} \ln t \quad (5.63)$$

e então

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &\approx \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt e^{-f(t_o) + \frac{f''(t_o)}{2} t^2} \\ &\approx \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2f''(t_o)}} e^{-f(t_o)} \end{aligned} \quad (5.64)$$

em que t_o é o valor que minimiza a função $f(t)$,

$$f'(t)|_{t=t_o} = 0, \quad (5.65)$$

ou seja,

$$t_o = \frac{\gamma}{2\mu^2} \left(-\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{\mu^2 r^2}{\gamma}} \right) \quad (5.66)$$

(em que consideramos apenas os valores de t compreendidos no intervalo de integração). A partir da Eq. (5.66), notamos que a quantidade $\mu^2 r^2 / \gamma$ deve ser adimensional, portanto podemos definir a quantidade

$$\xi \equiv \frac{\gamma^{1/2}}{\mu}, \quad (5.67)$$

que tem dimensão de comprimento e é conhecida como “comprimento de correlação”.

Desta forma, o propagador pode ser escrito como

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi/2}{\frac{r^2}{2t_o^3} - \frac{d}{2t_o^2}}} e^{-\frac{r^2}{4t_o} - t_o\mu^2/\gamma - \frac{d}{2} \ln t_o} \\ &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi/2}{\frac{r^2}{2t_o^3} - \frac{d}{2t_o^2}}} t_o^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t_o} - t_o\mu^2/\gamma}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

A análise do comportamento da Eq. (5.68) é feita nos limites $r \gg \xi$ e $r \ll \xi$. Para o caso de $r \gg \xi$ temos

$$\begin{aligned} t_o &\approx \frac{\xi^2}{2} \sqrt{\frac{r^2}{\xi^2}} \\ &\approx \frac{r\xi}{2}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

e portanto

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &\approx \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi/2}{\frac{r^2}{2t_o^3} - \frac{d}{2t_o^2}}} e^{-\frac{r^2}{4t_o} - t_o \mu^2 / \gamma - \frac{d}{2} \ln t_o} \\ &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi/2}{\frac{4}{r\xi^3} - \frac{2d}{r^2\xi^2}}} \left(\frac{r\xi}{2}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{r}{2\xi} - \frac{r}{2\xi}} \\ &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi r \xi^3}{8}} \left(\frac{r\xi}{2}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{r}{\xi}} \\ &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{\pi^{d-1} 2^{d+3}}} \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{\xi^{\frac{d-3}{2}} r^{\frac{d-1}{2}}}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

ou seja, para $G(\vec{r})$ tem seu comportamento dominado pela função exponencial.

Já para o caso de $r \ll \xi$, temos

$$\begin{aligned} t_o &\approx \frac{\xi^2}{2} \left(-\frac{d}{2} + \frac{d}{2} \sqrt{1 + \frac{4r^2}{d^2\xi^2}} \right) \\ &\approx \frac{\xi^2 d}{4} \left(-1 + 1 + \frac{2r^2}{d^2\xi^2} \right) \\ &= \frac{r^2}{2d} \end{aligned} \quad (5.71)$$

e então o propagador pode ser aproximado para

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi/2}{\frac{r^2}{2\left(\frac{r^2}{2d}\right)^3} - \frac{d}{2\left(\frac{r^2}{2d}\right)^2}}} \left(\frac{r^2}{2d}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{d}{2} - \frac{r^2}{2d\xi^2}} \\ &= \frac{1}{\gamma (4\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{\pi r^4}{4d^3}} \left(\frac{r^2}{2d}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{d}{2}} \\ &= \frac{1}{\gamma 4^{\frac{d+1}{2}} \pi^{\frac{d-1}{2}}} d^{\frac{d-3}{2}} e^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{r^{d-2}}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

ou seja, decai com a função r^{-d+2} . A menos de fatores constantes, podemos agrupar estes resultados em

$$\langle \phi(\vec{r}) \phi(0) \rangle \approx \begin{cases} \frac{e^{-r/\xi}}{r^{\frac{d-1}{2}}} & \text{se } r \gg \xi \\ \frac{1}{r^{d-2}} & \text{se } r \ll \xi, \end{cases} \quad (5.73)$$

portanto, o comprimento de correlação gera diferentes tipos de comportamento para a função de correlação entre dois pontos.

De uma forma geral, a partir das Eqs. (5.45) e (5.67) podemos encontrar o comportamento do comprimento de correlação em função da temperatura é expresso por

$$\xi \approx |T - T_c|^{-\nu}. \quad (5.74)$$

Portanto, em torno da temperatura crítica o comprimento de correlação diverge e ν é o expoente crítico relacionado ao comprimento de correlação.

Utilizando análise dimensional, verificamos a dimensão da função de correlação

$$[\langle \phi(x)\phi(0) \rangle] = d - 2 \quad (5.75)$$

em unidades de massa. Entretanto, considerando $\phi(x)$ uma função homogênea, ao aplicar um processo de reescalonamento,

$$x \rightarrow x' = ax, \quad (5.76)$$

os campos também se reescalonam,

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= \phi'(ax) \\ &= a^{\Delta_\phi} \phi(x), \end{aligned} \quad (5.77)$$

e então a dimensão de $\phi'(x)$ passa a ser

$$[\phi'(x)] = \Delta_\phi + \frac{d-2}{2}. \quad (5.78)$$

Desta forma, a dimensão da correlação para o campo $\phi'(x)$ é

$$[\langle \phi'(x)\phi'(0) \rangle] = d - 2 + 2\Delta_\phi. \quad (5.79)$$

Isto quer dizer que

$$\langle \phi'(r)\phi'(0) \rangle \approx \frac{a^\eta}{r^{d-2+\eta}}, \quad (5.80)$$

em que $\eta = 2\Delta_\phi$ é o expoente crítico conhecido como “dimensão anômala”, justamente porque refere-se a um fator que diferencia o expoente de r da dimensão das correlações, $d - 2$. O expoente η tem relação com correções quânticas e geralmente é encontrado a partir dos cálculos de correções do propagador considerando termos de segunda ordem da constante de acoplamento. A partir dos expoentes críticos definidos, ν e η , podemos encontrar uma relação com outros expoentes a partir da análise dimensional.

O calor específico, c_v , é a derivada segunda da densidade de energia energia livre, $\mathcal{F}(t)$, em relação a temperatura. Como c_v também diverge em torno da temperatura crítica com $t^{-\alpha}$ seu expoente crítico α pode ser determinado utilizando o mesmo processo

de reescalonamento. Como $\mathcal{F}(t)$ tem unidade de energia dividida por volume, estimamos que

$$\mathcal{F}(t) \sim t^{\Delta_\xi} \xi^{-d}, \quad (5.81)$$

em que Δ_ξ é um parâmetro a ser determinado. As quantidades com unidade de temperatura, T , T_c e t , tem seu reescalonamento determinado por ξ , pois

$$t(a) \rightarrow t'(a) = a^{-\Delta_t} t(a). \quad (5.82)$$

Como $\xi \sim t^{-\nu}$, temos

$$\xi \rightarrow \xi' = a\xi, \quad (5.83)$$

o que nos leva a

$$(a^{\Delta_t} t)^{-\nu} = a^{\nu\Delta_t} t^{-\nu} = at^{-\nu}. \quad (5.84)$$

Assim verificamos que t reescalona com uma potência $\Delta_t = 1/\nu$. Como $\mathcal{F}(t)$ é invariante de escala em torno da temperatura crítica, temos

$$\mathcal{F}(t) \sim t^{\Delta_\xi} \xi^{-d} \sim t^{\Delta_\xi} a^{\frac{\Delta_\xi}{\nu}} a^{-d} \xi^{-d} \quad (5.85)$$

e $\Delta_\xi = d\nu$. Podemos então obter uma expressão qualitativa para a energia livre,

$$\mathcal{F}(t) \sim t^{d\nu}. \quad (5.86)$$

A partir da definição do calor específico, e da Eq. (5.86) verificamos o comportamento

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{\partial^2}{\partial T^2} \mathcal{F}(t) \\ &\sim \frac{\partial^2}{\partial T^2} t^{d\nu} \\ &\sim \sim t^{d\nu-2}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

conduzindo ao expoente crítico α , $c_v \sim t^{-\alpha}$,

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad (5.88)$$

que é uma das leis de escala, também conhecida como relação de Josephson.

O expoente crítico relacionado à magnetização, β , pode ser encontrado a partir da dimensão do campo ϕ , desde que

$$m = \langle \phi \rangle \sim t^\beta. \quad (5.89)$$

A partir de um reescalonamento no campo,

$$\phi \rightarrow a^{(d-2+\eta)/2} \phi, \quad (5.90)$$

obtemos

$$t'^{\beta} = a^{\beta/\nu} t^{\beta} \sim a^{(d-2+\eta)/2} t^{\beta}, \quad (5.91)$$

tal que

$$\beta = \frac{(d-2+\eta)\nu}{2}, \quad (5.92)$$

que é mais uma relação de escala.

O expoente crítico γ , relacionado a susceptibilidade magnética χ , é encontrado utilizando o mesmo procedimento acima. Da definição

$$\chi = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(t)}{\partial H^2} \sim t^{-\gamma}, \quad (5.93)$$

e da dimensão do campo magnético, $[H] = (d+2-\eta)/2$, ao fazermos o reescalonamento chegamos a

$$\chi \rightarrow \chi' = t'^{-\gamma} = a^{-\frac{\gamma}{\nu}} t^{-\gamma}. \quad (5.94)$$

A partir da segunda derivada da energia livre,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}(t)}{\partial H^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{F}'(t')}{\partial H'^2} = a^{\eta-2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(t)}{\partial H^2} = a^{\eta-2} t^{-\gamma}, \quad (5.95)$$

encontramos a lei de escala conhecida como Identidade de Fisher,

$$\gamma = \nu(2-\eta). \quad (5.96)$$

Analisando o comportamento da magnetização em relação ao campo H ,

$$m \sim H^{\frac{1}{\delta}}, \quad (5.97)$$

fazemos novamente um processo de reescalonamento e obtemos

$$m \rightarrow m' = a^{\frac{d-2+\eta}{2}} m \sim a^{\frac{d-2+\eta}{2}} H^{\frac{1}{\delta}} \quad (5.98)$$

e

$$m' \sim H'^{\frac{1}{\delta}} \sim a^{\frac{d+2-\eta}{2\delta}} H^{\frac{1}{\delta}}, \quad (5.99)$$

portanto,

$$\delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}. \quad (5.100)$$

Deste modo, a partir da consideração de que a energia livre se comporta como uma função homogênea e utilizando processos de reescalonamento, obtemos as Eqs. (5.88), (5.92), (5.96) e (5.100) que relacionam os seis expoentes críticos. Assim, ao conhecer dois deles, todos os outros podem ser determinados e o comportamento crítico do sistema passa a ser conhecido [19, 21, 30, 36].

5.4.2 Renormalização do Modelo $O(N)$

Ao aplicar um processo de renormalização no modelo $O(N)$ é possível encontrar os expoentes críticos desses modelos e, portanto, conhecer a classe de universalidade que ele pertence. A sequência de passos deste processo é: integrar os modos de altas energias; reescalonar o momento; e reescalonar os campos. Ao fim, os parâmetros que acompanham os campos na expressão da energia livre apresentam uma dependência de escala, e é possível encontrar os pontos fixos, ou seja, os pontos em que essa dependência de escala desaparece.

O comportamento dos parâmetros em torno dos pontos fixos diz como o parâmetro se altera conforme é mudada a escala de energia, se tornando cada vez mais relevante ou irrelevante, ou até mesmo o caso marginal em que o parâmetro não se altera [29]. Como será apresentado a seguir, o ponto fixo não trivial também tem relação com o expoente crítico e ajuda no processo de encontrar estes expoentes.

Primeiramente redefinimos os campos da Eq. (5.2) para que o parâmetro γ seja absorvido juntamente com um fator β , ou seja $\phi_a \rightarrow \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}}\phi_a$,

$$\beta F[\Phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \nabla \phi_a \nabla \phi_a + \frac{\mu_o^2}{2} \phi_a \phi_a + g_o (\phi_a \phi_a)^2 + \dots \right], \quad (5.101)$$

em que $\mu_o^2 = \mu^2 \gamma^2 \beta$ e $g_o = g \gamma^4 \beta^2$. Para saber a relevância dos parâmetros, podemos aplicar um procedimento parecido com o realizado ao fim da seção 2.5. Sendo a dimensão dos campos

$$[\phi_a] = \frac{d-2}{2}, \quad (5.102)$$

encontramos então

$$[\mu_o^2] = 2 \quad \text{e} \quad [g_o] = 4 - d, \quad (5.103)$$

Segundo o critério de que os parâmetros com dimensão negativa são irrelevantes, o parâmetro μ_o é sempre relevante e g_o é relevante para todas as dimensões menores que $d = 4$. Neste caso, a dimensão crítica superior é $d = 4$, isso quer dizer que para todos os casos de $d \geq 4$ o modelo apresenta expoentes críticos de campo médio. Neste processo, consideramos uma dimensão próxima da dimensão crítica superior, isto é, $d = 4 - \epsilon$ em que $\epsilon \ll 1$. É comum a extrapolação destes cálculos para $\epsilon = 1$, para comparar os expoentes críticos com soluções em $d = 3$.

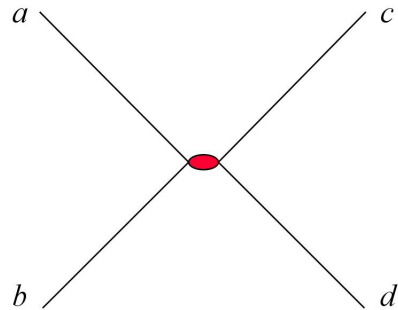
Utilizando a linguagem diagramática de Feynman, o propagador será representado por

$$\overline{a \quad b} = G(k) \delta_{ab}. \quad (5.104)$$

Já o termo que trataremos como interação,

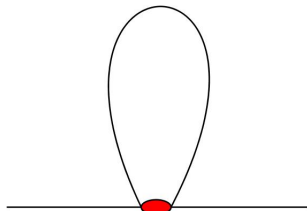
$$\beta F_{int}[\Phi] = \int d^d x g_o (\phi_a \phi_a)^2, \quad (5.105)$$

é semelhante ao da teoria ϕ^4 , mas, ao invés de conectar quatro campos iguais conecta dois pares que não são necessariamente iguais, seja, $\phi_a\phi_a$ e $\phi_b\phi_b$ podendo ser $a = b$ ou $a \neq b$. Por isso, vamos representar esse vértice de interação como



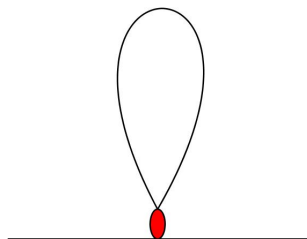
$$\approx g_o \delta_{ab} \delta_{cd}. \quad (5.106)$$

Em ordem g_o temos as contribuições de um loop para as funções de dois pontos de duas formas,



$$= 8g_o \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta_{ab} \delta_{cd} G(k) \delta_{bd} = 8g_o \delta_{ac} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G(k), \quad (5.107)$$

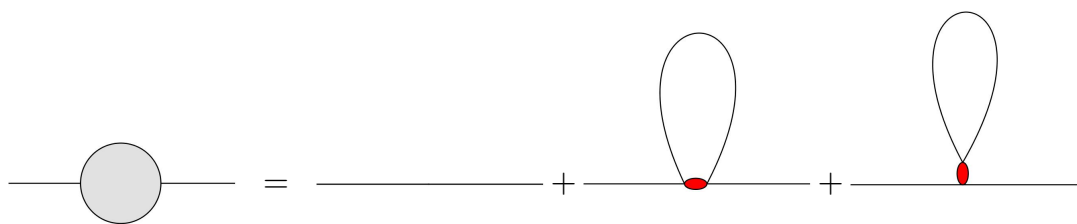
em que 8 é o fator numérico referente à quantidade de permutações possíveis, e



$$= 4g_o \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta_{ab} \delta_{cd} G(k) \delta_{cd} = 4Ng_o \delta_{ab} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G(k), \quad (5.108)$$

em que $4N$ é o fator numérico referente a quantidade de permutações possíveis. O diagrama adotado para o vértice é conveniente para identificar que quando um loop é fechado com as duas pernas do propagador do mesmo lado da pequena elipse vermelha surge um fator numérico N , devido à todas as possibilidades de contração dos campos. Diferentemente, do caso em que o loop é fechado com uma perna de cada lado da elipse, restringindo as contrações e mantendo o fator numérico como 8.

A função completa do propagador em primeira ordem é



$$= \delta_{ab} G(p) + \delta_{ab} G(p) g_o 4(2 + N) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G(k). \quad (5.109)$$

Como o propagador tem a forma

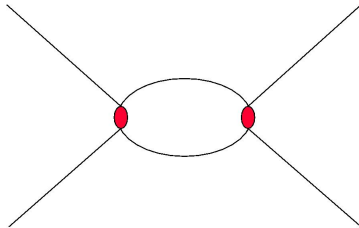
$$G(k) = \frac{1}{k^2 + \mu_o^2}, \quad (5.110)$$

sabemos que a contribuição de um loop gera divergências ultravioletas para $d \geq 2$. Para remover essas divergências é suficiente adicionar um contra termo no parâmetro de massa com a mesma divergência, ou seja,

$$\mu_o^2 \rightarrow \mu_o'^2 = \mu_o^2 + 4(2 + N) g_o \int_{\Lambda/\zeta}^{\Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \mu_o^2} \quad (5.111)$$

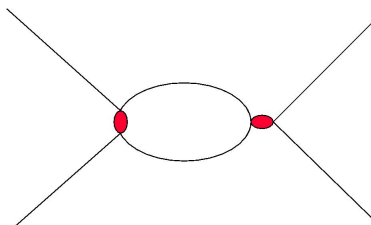
em que Λ é o *cutoff* de momento de altas energias e ζ é um parâmetro adimensional. O parâmetro de rede é o comprimento característico do sistema, isto é, a escala de comprimento tem um limite mínimo que é a e comprimentos menores não devem influenciar na física do sistema. Ao mapear o problema na rede no espaço de momentos, o *cutoff* deve ser definido como $\Lambda \equiv 1/a$.

Para as funções de 4 pontos temos contribuições em ordem g_o^2 de três tipos,



$$= 2^8 g_o^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \delta_{ac} \delta_{bd} G(k) \delta_{eg} \delta_{fh} G(l) \delta_{ce} \delta_{df}$$

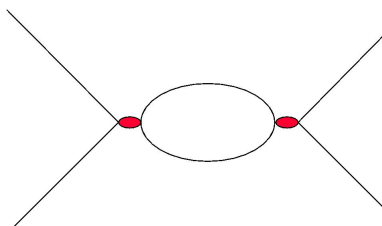
$$= 2^8 g_o^2 \delta_{ag} \delta_{bh} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G^2(k), \quad (5.112)$$



$$= 2^8 g_o^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \delta_{ac} \delta_{bd} G(k) \delta_{ef} \delta_{gh} G(l) \delta_{ce} \delta_{df}$$

$$= 2^8 g_o^2 \delta_{ab} \delta_{gh} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G^2(k), \quad (5.113)$$

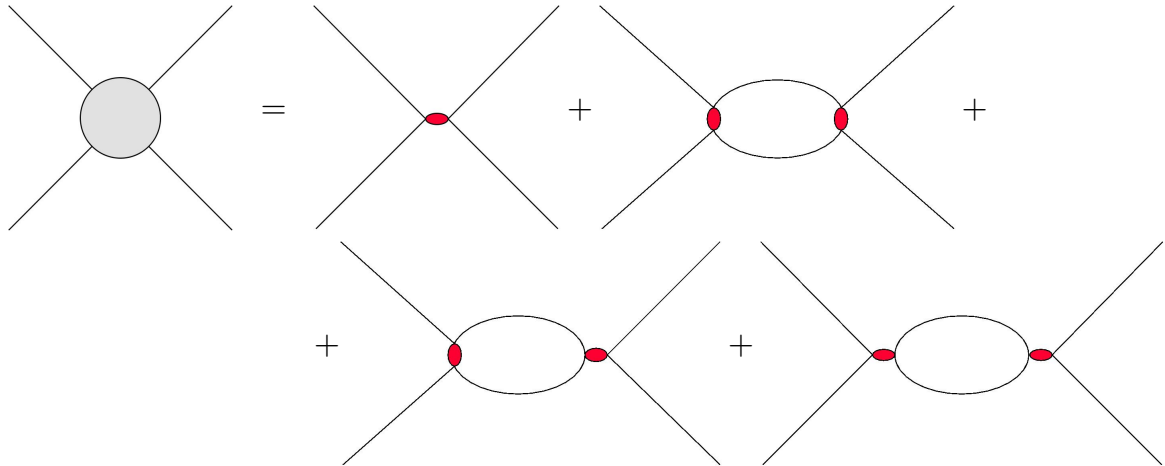
em que 2^8 é a quantidade de permutações possíveis em ambas equações, e



$$= 2^6 g_o^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \delta_{ab} \delta_{cd} G(k) \delta_{ef} \delta_{gh} G(l) \delta_{ce} \delta_{df}$$

$$= 2^6 g_o^2 \delta_{ab} \delta_{gh} N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G^2(k), \quad (5.114)$$

em que $2^6 N$ é a quantidade de possíveis permutações. A função completa para o vértice pode ser representada por



$$\begin{aligned}
&= 2^3 g_o \delta_{ab} \delta_{cd} + (2^8 + 2^8 + 2^6 N) \frac{g_o^2}{2} \delta_{ab} \delta_{cd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G^2(k) \\
&= 2^3 \delta_{ab} \delta_{cd} g_o \left(1 + 4(8 + N) g_o \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + \mu_o^2)^2} \right), \quad (5.115)
\end{aligned}$$

ou seja, é log-divergente em $d = 4$. Neste caso é suficiente subtrair de g_o um contra termo divergente,

$$g_o \rightarrow g'_o = g_o - 4(8 + N) g_o^2 \int_{\Lambda/\zeta}^{\Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + \mu_o^2)^2}. \quad (5.116)$$

Por conveniência, parametrizamos ζ como $\zeta = e^{-s}$. Pode-se aplicar agora um processo de reescalonamento no parâmetro g'_o , assim como realizado na secção anterior, e é obtido

$$\begin{aligned}
g(s) &= e^{-\epsilon s} g'_o \\
&= e^{-\epsilon s} g_o - e^{-\epsilon s} g_o^2 4(N + 8) A(\Lambda, \mu_o, s), \quad (5.117)
\end{aligned}$$

em que, a integral do termo divergente pode ser calculada e expressa em termos do cutoff,

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda e^{-s}}^{\Lambda} \frac{d^{4-\epsilon} k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{(k^2 + \mu_o^2)^2} &= \frac{(2\pi)^\epsilon}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda e^{-s}}^{\Lambda} k_E^3 dk_E \int d\Omega_4 \frac{1}{(-k_E^2 + \mu_o^2)^2} \\
&= \frac{(2\pi)^\epsilon}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \int_{\Lambda e^{-s}}^{\Lambda} dk_E \frac{k_E^3}{(-k_E^2 + \mu_o^2)^2} \\
&= \frac{(2\pi)^\epsilon}{8\pi^2} \frac{1}{2} \left[\ln(k^2 - \mu_o^2) - \frac{\mu_o^2}{k^2 - \mu_o^2} \right] \Big|_{\Lambda e^{-s}}^{\Lambda} \\
&= \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2 - \mu_o^2}{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu_o^2}{\Lambda^2 - \mu_o^2} + \frac{\mu_o^2}{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2} \right] \quad (5.118)
\end{aligned}$$

e definimos

$$A(\Lambda, \mu_o, s) \equiv \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2 - \mu_o^2}{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2} \right) - \frac{\mu_o^2}{\Lambda^2 - \mu_o^2} + \frac{\mu_o^2}{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2} \right]. \quad (5.119)$$

Invertendo a Eq. (5.117) obtemos

$$\begin{aligned} g_o &= e^{\epsilon s} g(s) - 4(N+8) A(\Lambda, \mu_o, s) g_o^2 \\ &= e^{\epsilon s} g(s) - 4(N+8) A(\Lambda, \mu_o, s) \left(e^{\epsilon s} g(s) - 4(N+8) A(\Lambda, \mu_o, s) g_o^2 \right)^2 \\ &= e^{\epsilon s} g(s) - 4(N+8) e^{2\epsilon s} g^2(s) A(\Lambda, \mu_o, s) + \mathcal{O}(g^3(s)). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Sendo a função β_g definida como

$$\beta_g \equiv \frac{dg(s)}{ds}, \quad (5.121)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{dg_o}{ds} = 0 &= \frac{d}{ds} \left(e^{\epsilon s} g(s) - 4(N+8) e^{2\epsilon s} g^2(s) A(\Lambda, \mu_o, s) \right) \\ &= \epsilon e^{\epsilon s} g(s) + e^{\epsilon s} \beta_g + 2\epsilon 4(N+8) e^{2\epsilon s} g^2(s) A(\Lambda, \mu_o, s) \\ &\quad + 4(N+8) e^{2\epsilon s} \left(A(\Lambda, \mu_o, s) + 2g(s)\beta_g + g^2(s) \frac{dA(\Lambda, \mu_o, s)}{ds} \right), \end{aligned} \quad (5.122)$$

em que a derivada da função $A(\Lambda, \mu_o, s)$ pode ser facilmente calculada,

$$\begin{aligned} \frac{dA(\Lambda, \mu_o, s)}{ds} &= \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \left[\frac{2\Lambda^2 e^{-2s}}{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2} + \frac{2\Lambda^2 e^{-2s} \mu_o^2}{(\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2)^2} \right] \\ &= \frac{(2\pi)^\epsilon}{8\pi^2} \frac{\Lambda^4 e^{-4s}}{(\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Para descrever uma função adimensional, define-se

$$\tilde{g}(s) \equiv \Lambda^{-\epsilon} g(s), \quad (5.124)$$

tal que

$$\beta_{\tilde{g}} \equiv \frac{d\tilde{g}(s)}{ds} = \Lambda^{-\epsilon} \beta_g. \quad (5.125)$$

Esta função β (adimensional) é adequada para a realização da expansão ϵ a fim de encontrar pontos fixos não triviais,

$$\beta_{\tilde{g}} = \epsilon \tilde{g}(s) - \frac{N+8}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4 \tilde{g}^2(s)}{(\Lambda^2 - \mu^2(s))} + \epsilon \mathcal{O}(\tilde{g}^2(s)) \quad (5.126)$$

em que

$$\mu^2(s) \equiv e^{2s} \mu_o^2 + e^{2s} 4(2+N) g_o \int_{\Lambda e^s}^{\Lambda} \frac{d^{4-\epsilon} k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{k^2 + \mu_o^2}. \quad (5.127)$$

A expansão é escrita até termos de ordem ϵ^0 pois no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ todos os outros termos são suprimidos. A função β_{μ^2} também pode ser calculada seguindo o mesmo procedimento. A integral da Eq. (5.127) em termos do cutoff é

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda e^s}^{\Lambda} \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{k^2 + \mu_o^2} &= \frac{2\pi^2(2\pi)^\epsilon}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda e^s}^{\Lambda} dk_E \frac{1}{-k_E^2 + \mu_o^2} \\ &= \frac{\pi^2(2\pi)^\epsilon}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \left(k_E^2 - \mu_o^2 \ln k_E^2 - \mu_o^2 \right) \Big|_{\Lambda e^s}^{\Lambda} \\ &= \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \left[\Lambda^2(1 - e^{-s}) + \mu_o^2 \ln \frac{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2}{\Lambda^2 - \mu_o^2} \right], \end{aligned} \quad (5.128)$$

de onde obtemos

$$\mu^2(s) = e^{2s} \mu_o^2 + e^{3s} 4(2+N) \Lambda^\epsilon \tilde{g}(s) B(\lambda, \mu_o, g_o), \quad (5.129)$$

com

$$B(\lambda, \mu_o, g_o) \equiv \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \left[\Lambda^2(1 - e^{-s}) + \mu_o^2 \ln \frac{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2}{\Lambda^2 - \mu_o^2} \right]. \quad (5.130)$$

Para encontrar a função β_{μ^2} invertemos a relação (5.129),

$$\mu_o^2 = \frac{-e^{s\epsilon} 4(2+N) \Lambda^\epsilon \tilde{g}(s) \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \Lambda^2(1 - e^{-2s}) + \mu^2(s) e^{2s}}{1 + \mu_o e^{s\epsilon} 4(2+N) \Lambda^\epsilon \tilde{g}(s) \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2}{\Lambda^2 - \mu_o^2}}, \quad (5.131)$$

tal que

$$\frac{d\mu_o^2}{ds} = 0 = \frac{d}{ds} \frac{-e^{s\epsilon} 4(2+N) \Lambda^\epsilon \tilde{g}(s) \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \Lambda^2(1 - e^{-2s}) + \mu^2(s) e^{2s}}{1 + \mu_o e^{s\epsilon} 4(2+N) \Lambda^\epsilon \tilde{g}(s) \frac{(2\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2 e^{-2s} - \mu_o^2}{\Lambda^2 - \mu_o^2}} \quad (5.132)$$

e consequentemente

$$\frac{d\mu^2(s)}{ds} = \beta_{\mu^2} = 2\mu^2(s) + \frac{(2+N) \Lambda^2 \tilde{g}(s)}{2\pi^2}. \quad (5.133)$$

Conhecendo as funções β podemos encontrar os pontos fixos, ou seja, valores de g e μ^2 que satisfaçam $\beta_g = 0$ e $\beta_{\mu^2} = 0$. Para função β_g temos

$$g^* \left(\epsilon - \frac{8+N}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \mu^2)^2} g^* \right) = 0, \quad (5.134)$$

neste caso, dois pontos fixos,

$$g^* = 0, \quad (5.135)$$

conhecido como ponto fixo Gaussiano, e também

$$g^* = \frac{\epsilon 2\pi^2 (\Lambda^2 + \mu^2)^2}{8+N \Lambda^4}, \quad (5.136)$$

que podemos aproximar em primeira ordem para

$$g^* = \epsilon \frac{2\pi^2}{8+N}, \quad (5.137)$$

conhecido como ponto fixo de Wilson-Fisher. Para a função β_{μ^2} temos,

$$\mu_*^2 = -\epsilon \frac{\Lambda^2}{2} \frac{2+N}{8+N} \tilde{g}(s). \quad (5.138)$$

Agora que os pontos fixos são conhecidos, podemos linearizar as funções β em torno destes pontos, isto é, encontrar o comportamento das funções em torno do ponto fixo. Para isso consideramos $\beta_{g^*+\delta}$ e $\beta_{\mu_*^2+\delta}$. No caso do parâmetro g , temos

$$\begin{aligned} \beta_{g^*+\delta} &\approx \epsilon(g^* + \delta) - \frac{N+8}{2\pi^2} (g^* + \delta)^2 \\ &\approx \epsilon g^* - \frac{N+8}{2\pi^2} (g^*)^2 - \epsilon\delta - \frac{N+8}{2\pi^2} 2\delta g^* + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &\approx \epsilon\delta - \frac{N+8}{2\pi^2} 2\delta g^*. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Portanto, no ponto fixo de Wilson-Fisher ficamos com

$$\begin{aligned} \beta_{g^*+\delta} &\approx \epsilon\delta - \frac{N+8}{2\pi^2} 2\delta \epsilon \frac{2\pi^2}{8+N} \\ &\approx -\epsilon\delta. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Para a função $\beta_{\mu_*^2+\delta}$,

$$\begin{aligned} \beta_{\mu_*^2+\delta} &\approx 2(\mu_*^2 + \delta) + \frac{(2+N)}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 + (\mu_*^2 + \delta)} (g^* + \delta) \\ &\approx 2\mu_*^2 + \frac{(2+N)}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \mu_*^2)^2} (1-\delta)(g^* + \delta) + 2\delta \\ &\approx 2\delta + \frac{(2+N)}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \mu_*^2)^2} g^* \delta, \end{aligned} \quad (5.141)$$

obtemos o comportamento em torno do ponto fixo de Wilson-Fisher

$$\begin{aligned} \beta_{\mu_*^2+\delta} &\approx 2\delta + \frac{(2+N)}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 - \epsilon \frac{\Lambda^2}{2} \frac{2+N}{8+N} \epsilon \frac{2\pi^2}{8+N})^2} \epsilon \frac{2\pi^2}{8+N} \delta \\ &\approx \left(2 - \epsilon \frac{(2+N)}{8+N} \right) \delta. \end{aligned} \quad (5.142)$$

Como o ponto fixo é constante, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{d(\mu_*^2 + \delta)}{ds} = \frac{d\delta}{ds} = \left(2 + \epsilon \frac{(2+N)}{8+N} \right) \delta. \quad (5.143)$$

Esta equação diferencial implica que a função delta tem o comportamento

$$\delta \sim e^{\left(2 + \epsilon \frac{(2+N)}{8+N} \right) s}. \quad (5.144)$$

Lembrando que δ se trata de um termo da expansão em torno do ponto crítico, este comportamento deve ser o mesmo para $\mu^2(s)$ ou seja, a linearização em torno do ponto fixo descreve como o parâmetro μ^2 deve reescalonar.

Utilizando o comportamento descrito na Eq. (5.45) encontramos

$$\mu^2(s) = e^{\left(2 - \epsilon \frac{(2+N)}{8+N}\right)s} t^{-\nu}. \quad (5.145)$$

Como este comportamento deve ser mantido mesmo após o processo de renormalização, podemos escrever na forma

$$\mu^2(s) = t^{-\nu}(s) = e^{s\Delta_t} t^{-\nu}. \quad (5.146)$$

Finalmente, obtemos uma expressão para o expoente crítico

$$\nu = \left(2 - \frac{(2+N)}{8+N}\epsilon\right)^{-1} \approx \frac{1}{2} + \frac{(2+N)}{4(8+N)}\epsilon. \quad (5.147)$$

Sabendo que o expoente crítico relacionado à dimensão anômala está relacionado com a correção de segunda ordem em g do propagador, sabemos que tem ordem ϵ^2 , então para a aproximação de primeira ordem podemos tomar

$$\eta \approx 0. \quad (5.148)$$

A partir destes expoentes críticos e das leis de escala os outros expoentes podem ser determinados. Da Eq. (5.88) encontramos o expoente α ,

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - (4 - \epsilon) \left(\frac{1}{2} + \frac{(2+N)}{4(8+N)}\epsilon \right) \\ &\approx \frac{4-N}{2(8+N)}\epsilon, \end{aligned} \quad (5.149)$$

da Eq. (5.92) o expoente β

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(d-2)}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{(2+N)}{4(8+N)}\epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\approx \frac{1}{2} - \frac{3}{4(8+N)}, \end{aligned} \quad (5.150)$$

e da Eq. (5.96) o expoente γ

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\nu + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\approx 1 + \frac{(2+N)}{2(8+N)}\epsilon. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Por fim, a Eq. (5.100) leva à

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{4 - \epsilon + 2}{4 - \epsilon - 2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \frac{1}{2}(6 - \epsilon)(1 + \epsilon/2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\approx 3 + \epsilon, \end{aligned} \quad (5.152)$$

que é um expoente crítico que não depende de N .

Como o conjunto de expoentes críticos descrevem toda uma classe de universalidade, para cada valor de N estes resultados descrevem uma série de modelos. Portanto, este processo de renormalização é capaz de gerar uma diversidade de resultados e, desta forma, o comportamento crítico de todos os modelos da classe $\mathcal{O}(N)$ pode ser conhecido.

6 Modelo Abeliano $U(1)$ com Simetria Local

Neste capítulo, apresentamos o modelo Abeliano $U(1)$ com simetria local e o cálculo da correlação de um contorno invariante por transformações locais utilizando expansões a altas e baixas temperaturas. Este modelo é construído a fim de ser equivalente ao modelo XY mas com simetria local e apresenta naturalmente uma estrutura de confinamento [14, 7].

6.1 Construção do Modelo com Simetria Local

O modelo Abeliano $U(1)$, como o nome sugere, é invariante por transformações do grupo unitário $U(1)$, com regra trivial de comutação ($\theta_\mu(n)\theta_\nu(m) = \theta_\nu(m)\theta_\mu(n)$). Em geral, as transformações $U(1)$ são conhecidas como transformações de fase, e podem ser parametrizadas como

$$e^{i\chi},$$

em que χ é o parâmetro da transformação. No caso de χ ser uma transformação que depende da posição, ou seja, $\chi(x)$, trata-se de uma transformação local, enquanto no caso de χ igual para todas as posições, trata-se de uma transformação global.

O modelo Abeliano $U(1)$ com simetria local pode ser visto como uma versão Euclidiana da teoria eletromagnética. Ele pode ser construído a partir do modelo XY, promovendo a simetria global do modelo à uma simetria local. Seguindo a hamiltoniana da Eq. (5.11), o modelo XY é descrito por

$$\mathcal{H} = -J \sum_{n,\mu} \cos(\Delta_\mu \theta(n)), \quad (6.1)$$

em que

$$\Delta_\mu \theta(n) \equiv \theta(n + \hat{\mu}) - \theta(n), \quad (6.2)$$

n é a variável que localiza o sítio e $\hat{\mu}$ é um vetor de base unitário que pode assumir as direções da rede.

Levando em conta a simetria local, primeiramente redefinimos a rede do modelo, conforme demonstrado pela figura 13. Os vetores planares passam a se situar nos links da rede e a variável ganha um subíndice $\theta(n) \rightarrow \theta_\mu(n)$ que indica a direção do link ao qual está localizado. A direção da seta colocada sobre o link está relacionada ao sinal do subíndice. Há uma ambiguidade na notação para descrever um spin sobre um link,

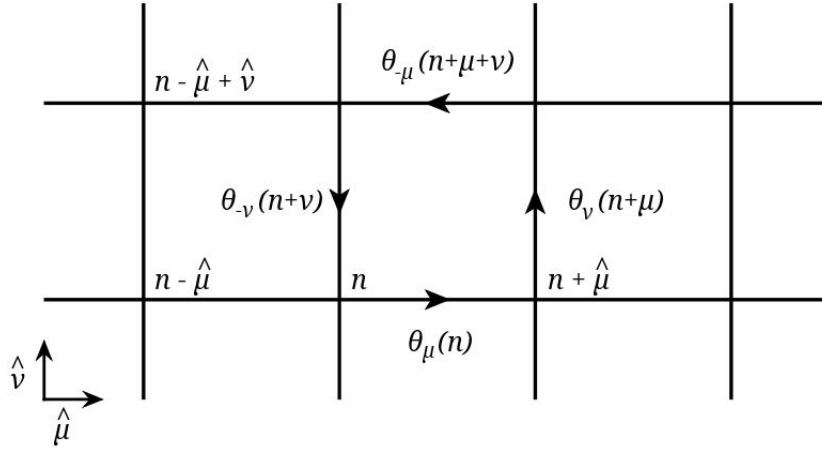


Figura 13 – Representação de θ sobre os links da rede.

entretanto, adotaremos a convenção de um sinal negativo entre as duas descrições,

$$\theta_{\mu}(n) = -\theta_{-\mu}(n + \hat{\mu}). \quad (6.3)$$

A interpretação deste sinal é devido a inversão do eixo ao qual se mede o ângulo, conforme representado na figura 14.

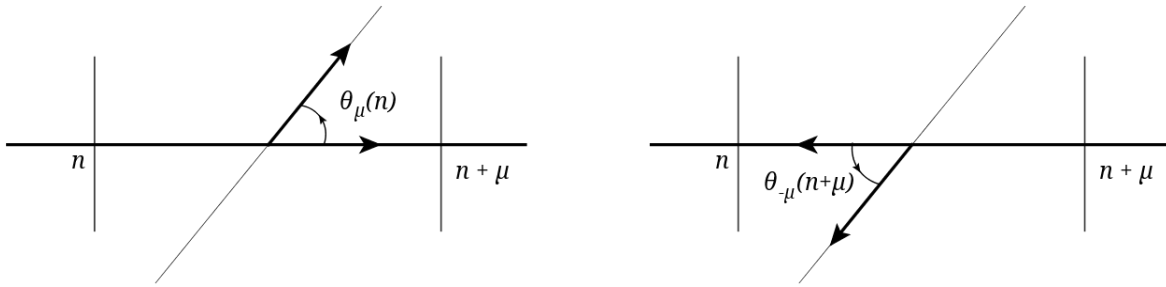


Figura 14 – Representação da ambiguidade na descrição das variáveis.

A partir da nova rede, é possível construir estruturas fechadas mínimas, que chamaremos de plaquetes (assim como no modelo de Ising com Simetria Local, na seção 4). Na figura 13 é possível identificar um plaquete, que definiremos como

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}(n) &\equiv \theta_{\mu}(n) + \theta_{\nu}(n + \hat{\mu}) + \theta_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + \theta_{-\nu}(n + \hat{\nu}) \\ &= \theta_{\mu}(n) + \theta_{\nu}(n + \hat{\mu}) - \theta_{\mu}(n + \hat{\nu}) - \theta_{\nu}(n) \\ &= \Delta_{\mu}\theta_{\nu}(n) - \Delta_{\nu}\theta_{\mu}(n), \end{aligned} \quad (6.4)$$

em que, seguindo a definição da Eq. (6.2),

$$\Delta_{\mu}\theta_{\nu}(n) \equiv \theta_{\nu}(n + \hat{\mu}) - \theta_{\nu}(n). \quad (6.5)$$

Podemos verificar que $\theta_{\mu\nu}(n)$ é invariante por uma transformação local que rotacione os vetores por um ângulo $\chi(n)$

$$\theta_{\mu}(n) \rightarrow \theta_{\mu}(n) - \chi(n), \quad (6.6)$$

e da mesma forma,

$$\theta_{-\mu}(n + \hat{\mu}) \rightarrow \theta_{-\mu}(n + \hat{\mu}) - \chi(n + \hat{\mu}). \quad (6.7)$$

Agrupando os dois resultados em uma única transformação,

$$\theta_{\mu}(n) \rightarrow \theta_{\mu}(n) + \Delta_{\mu}\chi(n), \quad (6.8)$$

é possível mostrar explicitamente essa invariância,

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}(n) &\rightarrow \Delta_{\mu}(\theta_{\nu}(n) + \Delta_{\nu}\chi(n)) - \Delta_{\nu}(\theta_{\mu}(n) + \Delta_{\mu}\chi(n)) \\ &= \theta_{\mu\nu}(n) + \Delta_{\mu}\Delta_{\nu}\chi(n) - \Delta_{\nu}\Delta_{\mu}\chi(n) \\ &= \theta_{\mu\nu}(n). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Adaptando a hamiltoniana da Eq. (6.1) para que tenha a simetria local, o modelo Abelian $U(1)$ é descrito por

$$\mathcal{S} = J \sum_n \sum_{\mu,\nu} [1 - \cos(\theta_{\mu\nu}(n))], \quad (6.10)$$

em que o fator constante foi adicionado por conveniência e somente desloca a energia do sistema sem afetar a descrição física e J é um parâmetro que absorve β . A generalização da função de partição,

$$Z = \int_0^{2\pi} \mathcal{D}\theta_{\mu}(n) e^{-\mathcal{S}}, \quad (6.11)$$

em que

$$\mathcal{D}\theta_{\mu}(n) \equiv \prod_{n,\mu} d\theta_{\mu}(n). \quad (6.12)$$

A partir da Eq. (6.4), identificamos a semelhança deste modelo com a teoria eletromagnética comparando a quantidade $\theta_{\mu\nu}(n)$ ao tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, que é definido por

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \quad (6.13)$$

Ao considerarmos baixas energias, ou seja, que os spins estejam ordenados, esperamos que $\theta_{\mu}(n)$ varie pouco, o que justifica a expansão em potências de $\theta_{\mu\nu}(n) \ll 1$. Desta forma encontra-se

$$\mathcal{S} \approx J \sum_n \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{2} \theta_{\mu\nu}^2(n). \quad (6.14)$$

Se tomarmos o limite do contínuo e adotarmos a convenção de soma para índices repetidos, encontramos

$$\mathcal{S} = \frac{J}{2a^d} \int d^d x \theta_{\mu\nu}(x) \theta_{\mu\nu}(x), \quad (6.15)$$

em que a tem dimensão de comprimento. Neste caso, é possível identificar $J = 1/2g^2$ e

$$\theta_{\mu\nu}(x) = a^2 g F_{\mu\nu}, \quad (6.16)$$

em que g é um parâmetro de acoplamento que adequa a dimensão, tal que

$$\mathcal{S} = \frac{1}{a^{d-4}} \int d^d x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (6.17)$$

que é a ação Euclidiana do eletromagnetismo. Além disso, a partir da Eq. (6.16),

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{1}{a^2 g} (\Delta_\mu \theta_\nu(n) - \Delta_\nu \theta_\mu(n)), \quad (6.18)$$

e

$$\begin{aligned} ag \partial_\mu A_\nu &= \frac{1}{a} \Delta_\mu \theta_\nu(n) \\ &= \frac{\theta_\nu(n + \hat{\mu}) - \theta_\nu(n)}{a} \\ &= \partial_\mu \theta_\nu(n), \end{aligned} \quad (6.19)$$

podemos relacionar o spin do modelo Abeliano com simetria local ao potencial eletromagnético,

$$\theta_\mu(n) = ag A_\mu, \quad (6.20)$$

a menos de um fator constante.

Para analisar se este modelo apresenta transição de fase, seguimos o mesmo procedimento do modelo de Ising com simetria local, analisando o comportamento de quantidades invariantes de calibre. Para tanto, utilizamos a soma dos links de um contorno fechado C como a quantidade que apresenta tal simetria. Para verificar que esta quantidade é invariante pela transformação local podemos utilizar o contorno C definido na figura 15 como exemplo.

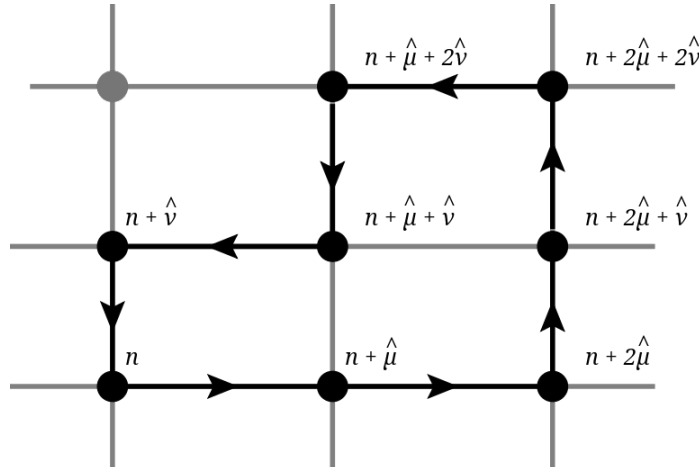


Figura 15 – Contorno fechado C .

Considerando este contorno, ao aplicar a transformação definida na Eq. (6.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_C \theta_\mu(n) &\rightarrow \sum_C [\theta_\mu(n) + \Delta_\mu \chi(n)] \\
&= \sum_C \theta_\mu(n) + \chi(n + \mu) - \chi(n) + \\
&\quad + \chi(n + 2\mu) - \chi(n + \mu) + \cdots + \chi(n) - \chi(n + \nu) \\
&= \sum_C \theta_\mu(n),
\end{aligned} \tag{6.21}$$

ou seja, ao somar sobre um contorno fechado, os termos adicionais gerados pela transformação local são cancelados, mantendo a soma invariante. Desta forma, a quantidade invariante que devemos analisar o comportamento é

$$\left\langle e^{\frac{i}{C} \sum \theta_\mu(n)} \right\rangle.$$

Neste caso as expansões são feitas para acoplamentos fortes ($g \gg 1$) e fracos ($g \ll 1$) em analogia às expansões em altas e baixas temperaturas das seções 4.2 e 4.3.

6.2 Limite de Acoplamentos Fortes

O limite de acoplamentos fortes para este modelo é equivalente ao limite de altas temperaturas do modelo XY . A correlação escrita explicitamente é

$$\left\langle e^{\frac{i}{C} \sum \theta_\mu(n)} \right\rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\theta_\mu(n) e^{\frac{i}{C} \sum \theta_\mu(n)} e^{-S}. \tag{6.22}$$

Como $g \gg 1$, é justificada a expansão

$$\begin{aligned}
e^{-S} &= \prod_{n,\mu,\nu} \exp \left\{ \frac{1}{4g^2} \left(e^{i\theta_{\mu\nu}} + e^{-i\theta_{\mu\nu}} \right) \right\} \\
&= \prod_{n,\mu,\nu} \sum_m \frac{1}{m!} \left\{ \frac{1}{4g^2} \left(e^{\frac{i}{P} \sum \theta_\mu(n)} + e^{-\frac{i}{P} \sum \theta_\mu(n)} \right) \right\}^m,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

em que a somatória em P significa a soma sobre $\theta_\mu(n)$ de um plaquete, e por definição

$$\theta_{\mu\nu} = \sum_P \theta_\mu(n). \tag{6.24}$$

Como θ_μ se trata de uma variável angular, vale lembrar que

$$\int_0^{2\pi} d\theta_\mu(n) e^{i\theta_\mu(n)} = 0, \tag{6.25}$$

portanto a primeira contribuição não nula será proporcional a contribuição da expansão que cancelar todos os termos provenientes do contorno C sem que reste outros termos cuja a integral se anule. Isto ocorre na contribuição com todos os plaquetes internos ao

contorno, conforme demonstrado na figura 16. Logo, podemos concluir que a correlação do contorno tem o comportamento

$$\langle e^{\frac{i}{c} \sum \theta_\mu(n)} \rangle \sim \left(\frac{1}{4g^2} \right)^A = e^{-A \ln 4g^2}, \quad (6.26)$$

em que A se trata da área interna ao contorno.

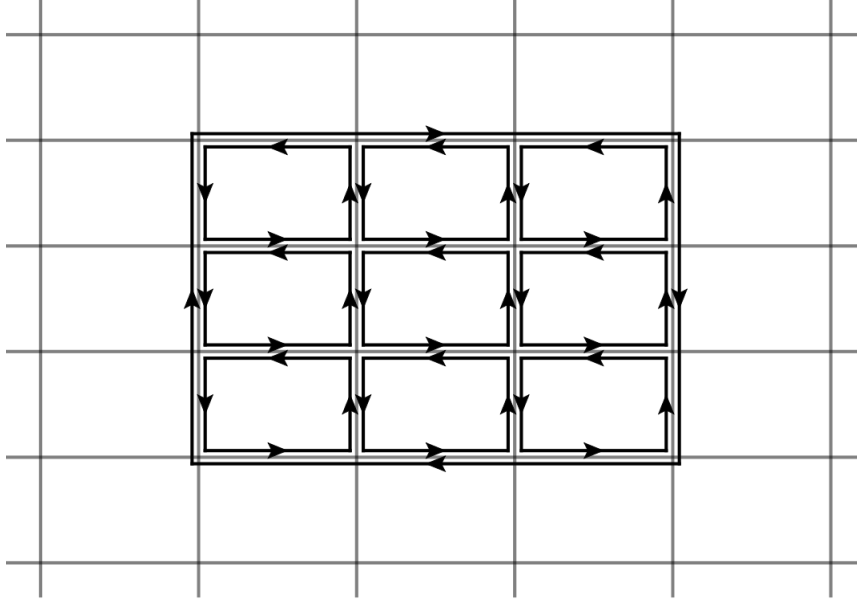


Figura 16 – Contorno fechado e os plaquetes internos.

6.3 Limite de Acoplamentos Fracos

No caso de acoplamentos fracos, ou seja, o limite $g \ll 1$, analisamos o sistema a baixas energias, o que é equivalente ao limite do contínuo, $a \rightarrow 0$, portanto utilizaremos a identificação

$$\theta_\mu(n) \rightarrow agA_\mu(x). \quad (6.27)$$

Desta forma a correlação analisada será

$$\begin{aligned} \langle e^{\frac{i}{c} \sum \theta_\mu(n)} \rangle &\rightarrow \langle e^{\frac{ig}{c} \oint dx^\mu A_\mu(x)} \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[-\frac{1}{4a^{d-4}} \int d^d x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + ig \oint_C dx^\mu A_\mu(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

O limite do contínuo neste caso pode ser entendido como uma renormalização do sistema, ou seja, alteramos a escala. Em particular, estudamos a teoria eletromagnética em $d = 4$ em analogia as dimensões do espaço tempo, $(3 + 1)$, e em qual é conhecido que se trata de uma teoria renormalizável.

Nosso ponto de partida é a ação Euclidiana no espaço de Fourier

$$\mathcal{S}(A_\mu) = \frac{1}{2} \int d^4k A_\mu(-k) (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) A_\nu(k), \quad (6.29)$$

e como estamos interessados no cálculo do propagador, adicionamos um termo de massa, $m^2 A_\mu^2/2$, como regulador, tal que recuperamos o caso inicial no limite $m \rightarrow 0$,

$$\mathcal{S}(A_\mu) = \frac{1}{2} \int d^4k A_\mu(-k) [(k^2 + m^2) \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu] A_\nu(k). \quad (6.30)$$

Do ponto de vista da correlação, Eq. (6.28), podemos introduzir um termo de calibre na ação sem alterar a dinâmica do sistema,

$$\mathcal{S}(A_\mu, \chi) = \mathcal{S}(A_\mu) - \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu \chi)^2 + \tilde{m}^2 \chi^2], \quad (6.31)$$

pois, sendo este quadrático, pode ser visto como a multiplicação de um termo constante que é absorvido na função de partição. Ao aplicarmos a transformação de calibre na ação,

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{m} \partial_\mu \chi, \quad (6.32)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A_\mu, \chi) &= \mathcal{S}(A_\mu) + \frac{1}{2} \int d^4x [2m A_\mu(x) \partial_\mu \chi - \tilde{m}^2 \chi^2] \\ &= \mathcal{S}(A_\mu) - \frac{1}{2} \int d^4x [2m \chi \partial_\mu A_\mu(x) + \tilde{m}^2 \chi^2], \end{aligned} \quad (6.33)$$

em que $\mathcal{S}(A_\mu)$ permanece inalterado, pois $F_{\mu\nu}$ é invariante pela transformação e

$$m^2 A_\mu^2 \rightarrow m^2 A_\mu^2 + 2m A_\mu \partial_\mu \chi + (\partial_\mu \chi)^2. \quad (6.34)$$

Integrando a correlação em χ , obtemos a forma final

$$\mathcal{S}(A_\mu) = \mathcal{S}(A_\mu) + \frac{m^2}{2\tilde{m}^2} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu(x))^2. \quad (6.35)$$

Note que, fixar o calibre é equivalente a fixar \tilde{m} , de modo que $\tilde{m} \rightarrow 0$ equivale ao calibre de Landau e $\tilde{m} = m$ ao calibre de Feynman, o qual vamos considerar. Ao escrever todos os termos no espaço de momentos encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A_\mu) &= \mathcal{S}(A_\mu) + \int d^4x \int d^4k_1 d^4k_2 \partial_\mu (A_\mu(k_1) e^{ixk_1}) \partial_\nu (A_\nu(k_2) e^{ixk_2}) \\ &= \mathcal{S}(A_\mu) + \int d^4k_1 d^4k_2 k_\mu A_\mu(k_1) k_\nu A_\nu(k_2) \delta(k_1 + k_2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4k A_\mu(-k) [(k^2 + m^2)] A_\mu(k). \end{aligned} \quad (6.36)$$

O propagador pode ser encontrado,

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle(k) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 + m^2}, \quad (6.37)$$

e expresso no espaço das posições através de uma transformada de Fourier inversa,

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu(x)A_\nu(0) \rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle A_\mu A_\nu \rangle(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)^4} \int_0^\pi d\theta_2 \sin^2 \theta_2 \int_0^\infty dk \frac{k^3 \delta_{\mu\nu}}{k^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta_1 e^{ikx \cos \theta_1} \sin \theta_1 \\
&= \frac{\delta_{\mu\nu}}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \frac{\sin(kx)}{x},
\end{aligned} \tag{6.38}$$

que é uma integral que não converge no limite em que $k \rightarrow \infty$. Um meio de avaliar esta integral é inserir um *cutoff* como função exponencial, garantindo a convergência,

$$\int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \frac{\sin(kx)}{x} \rightarrow \int_0^\infty dk \frac{k^2 e^{-ak}}{k^2 + m^2} \frac{\sin(kx)}{x},$$

em que a é o parâmetro de rede. Agora, no limite $m \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dk \frac{\sin(kx)}{x} e^{-ak} &= \left. -\frac{1}{x} \frac{e^{-ak}(a \sin(kx) + x \cos(kx))}{a^2 + x^2} \right|_{k=0}^{k=\infty} \\
&= \frac{1}{a^2 + x^2},
\end{aligned} \tag{6.39}$$

obtemos

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(0) \rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{8\pi^2(a^2 + x^2)}. \tag{6.40}$$

De uma forma geral, definimos

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(y) \rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{8\pi^2(a^2 + |x-y|^2)} \equiv \delta_{\mu\nu} \Delta(x-y). \tag{6.41}$$

A partir do resultado acima, calculamos a correlação. No limite $g \ll 1$ temos

$$\begin{aligned}
\langle e^{\frac{ig}{C} \oint dx A_\mu(x)} \rangle &= \langle 1 + ig \oint_C dx_\mu A_\mu(x) + \frac{(ig)^2}{2} \oint_C \oint_C dx_\mu dy_\nu A_\mu(x) A_\nu(y) + \dots \rangle \\
&= 1 + \frac{(ig)^2}{2} \langle \oint_C \oint_C dx_\mu dy_\nu A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle \\
&\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{(ig)^4}{2} \right)^2 \langle \left(\oint_C \oint_C dx_\mu dy_\nu A_\mu(x) A_\nu(y) \right)^2 \rangle + \dots \\
&= 1 + \frac{(ig)^2}{2} \langle \oint_C \oint_C dx_\mu dy_\nu A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle \\
&\quad + \frac{3}{3!} \left(\frac{(ig)^4}{2} \right)^2 \langle \oint_C \oint_C dx_\mu dy_\nu A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle^2 + \dots
\end{aligned} \tag{6.42}$$

em que os termos ímpares foram excluídos devido à paridade da ação e em seguida utilizamos a identidade

$$\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle \Rightarrow \langle AAAA \rangle = 3 \langle AA \rangle^2. \tag{6.43}$$

Apesar de apresentados somente os termos até segunda ordem, é possível encontrar a série de potências

$$\begin{aligned}
 \langle e^{\frac{ig}{c} \oint_C dx A_\mu(x)} \rangle &= \sum_n \frac{1}{n!} \left[-\frac{g^2}{2} \left\langle \oint_C \oint_C dx_\mu dy_\nu A_\mu(x) A_\nu(y) \right\rangle \right]^n \\
 &= \exp \left[-\frac{g^2}{2} \oint_C \oint_C \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle dx_\mu dy_\nu \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{g^2}{2} \oint_C \oint_C \Delta(x-y) dx_\mu dy_\mu \right]. \tag{6.44}
 \end{aligned}$$

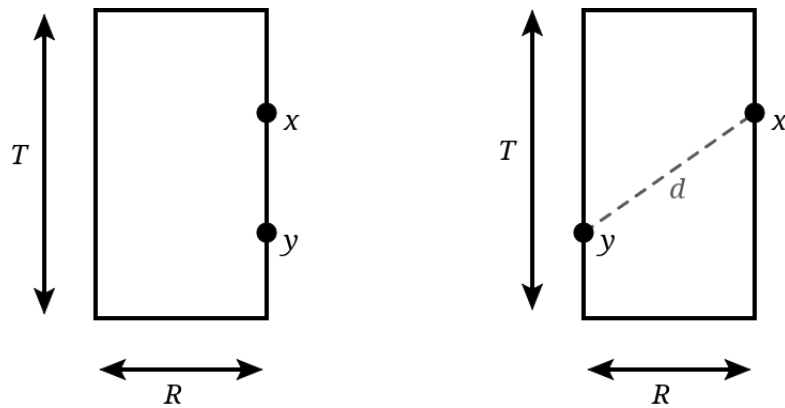
A última tarefa é calcular a integral do propagador. É importante notar que integrais do tipo

$$\oint_C \oint_C \Delta(x-y) dx_\mu dy_\mu \tag{6.45}$$

excluem contribuições ortogonais. Consideremos para este cálculo um contorno simples em um plano bidimensional. Conforme exemplificado pela figura 17 os pontos x e y podem estar situados na mesma linha (separados por uma distância $|x-y|$) ou em linhas paralelas (separados por uma distancia d). Para simplificar o processo, vamos dividir a integral em três contribuições,

$$\oint_C \oint_C \Delta(x-y) dx_\mu dy_\mu = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3, \tag{6.46}$$

em que \mathcal{A}_1 se trata do caso em que x e y são co-lineares mas $x \neq y$, \mathcal{A}_2 do caso em que são paralelos e \mathcal{A}_3 em que $x = y$.



(a) Caso sobre a mesma linha. (b) Caso em linhas diferentes.

Figura 17 – Exemplo de como os pontos x e y podem se situar em um contorno bidimensional.

Para calcular \mathcal{A}_1 , consideramos primeiramente a linha destacada na figura 18,

$$\int_a^T dy \int_0^{y-a} dx \Delta(x-y) + \int_a^T dx \int_0^{x-a} dy \Delta(x-y) = 2 \int_a^T dy \int_0^{y-a} dx \Delta(x-y), \tag{6.47}$$

em que o primeiro termo representa o caso $y > x$ e o segundo termo $x > y$, entretanto, são simétricos. Calculando explicitamente a integral,

$$\begin{aligned} 2 \int_a^T dy \int_0^{y-a} dx \Delta(x-y) &= 2 \int_a^T dy \int_0^{y-a} dx \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{(x-y)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_a^T dy \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{T}{a} - \ln \frac{T}{a} \right], \end{aligned} \quad (6.48)$$

em que, removemos o parâmetro a do propagador,

$$\Delta(x-y) \rightarrow \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{(x-y)^2}, \quad (6.49)$$

equivalente à tomar o limite $a \rightarrow 0$ na Eq. (6.40).

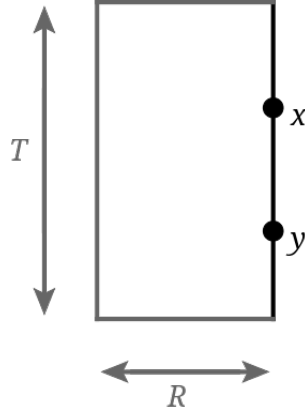


Figura 18 – Linha destacada para o cálculo de \mathcal{A}_1 .

Quando x e y se situam em uma das linhas horizontais podemos realizar exatamente o mesmo procedimento para obter

$$2 \int_a^R dy \int_0^{y-a} dx \Delta(x-y) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{R}{a} - \ln \frac{R}{a} \right]. \quad (6.50)$$

Consequentemente, ao somar os termos provenientes das 4 linhas, encontramos

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{T+R}{a} - \ln \frac{T}{a} - \ln \frac{R}{a} \right]. \quad (6.51)$$

Para calcular \mathcal{A}_2 consideremos o exemplo b) da figura 17,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^T dy \int_0^T dx \frac{1}{R^2 + (x-y)^2} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^T dx \frac{\tan^{-1} \left(\frac{T-y}{R} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{y}{R} \right)}{R} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{R^2}{R^2 + T^2} \right) + \frac{2T \tan^{-1} \left(\frac{T}{R} \right)}{R} \right]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Além disso, devemos considerar os pontos nas linhas horizontais,

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^R dy \int_0^R dx \frac{1}{T^2 + (x-y)^2} = \frac{1}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T^2}{T^2 + R^2} \right) + \frac{2R \tan^{-1} \left(\frac{R}{T} \right)}{T} \right]. \quad (6.53)$$

A partir das duas contribuições, Eqs. (6.52) e (6.53), encontramos

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2\pi^2} \left[\ln \left(\frac{RT}{R^2 + T^2} \right) + \frac{T \tan^{-1} \left(\frac{T}{R} \right)}{R} + \frac{R \tan^{-1} \left(\frac{R}{T} \right)}{T} \right]. \quad (6.54)$$

Focaremos a análise no limite em que $T \gg R$, ou seja, que o contorno é muito mais longo na dimensão temporal do que nas espaciais. Neste caso a contribuição \mathcal{A}_2 assume a forma

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\pi T}{2R} + \ln \left(\frac{R}{a} \right) - \ln \left(\frac{T}{a} \right) - 1 \right]. \quad (6.55)$$

Temos em particular o caso \mathcal{A}_3 para $x = y$ na Eq. (6.45),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \oint_C dy \oint_C dx \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{a^2 + |x - y|^2} \delta(x - y) \\ &= \oint_C dy \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{R + T}{4\pi^2 a^2}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Ao agrupar todos estes resultados,

$$\oint_C \oint_C \Delta(x - y) dx_\mu dy_\mu = \frac{1}{4\pi^2} \left[-2 + \frac{R + T}{a^2} (1 + 2a) + \frac{\pi T}{R} + 4 \ln \frac{R}{a} \right], \quad (6.57)$$

escrevemos a Eq. (6.45) na forma

$$\left\langle e^{\frac{ig}{c} \oint_C dx^\mu A_\mu(x)} \right\rangle \sim \exp \left[-\frac{1}{2} g^2 \left(cP - \frac{T}{4\pi R} \right) \right] \left(\frac{R}{a} \right)^{\frac{g^2}{2\pi^2}}. \quad (6.58)$$

com

$$c \equiv \frac{1 + 2a}{a^2}, \quad (6.59)$$

que tem parte de sua contribuição relacionada ao propagador no caso de $x = y$, e $P = 2(R + T)$. Notamos que a correlação decai exponencialmente com o perímetro (apresentando um fator de correção). Isto é suficiente para que em algum ponto entre o acoplamento forte e fraco haja uma mudança de comportamento na correlação, ou seja, em algum ponto as funções termodinâmicas deixam de ser analíticas, caracterizando uma transição de fase.

6.4 Potencial Para Cargas Estáticas e Confinamento

A partir da ação eletromagnética, (6.17), podemos considerar o acoplamento dos campos $A_\mu(x)$ com as cargas por meio de

$$e \int d^4x A_\mu(x) J_\mu(x),$$

em que $J_\mu(x)$ é uma corrente conservada e e é a carga elétrica. Desta forma, podemos identificar

$$\langle e^{e \int d^4x A_\mu(x) J_\mu(x)} \rangle = \frac{Z(J_\mu)}{Z(0)}, \quad (6.60)$$

em que $Z(J_\mu)$ é a função de partição para o sistema com o termo de acoplamento,

$$Z(J_\mu) = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[-\mathcal{S} + e \int d^4x A_\mu(x) J_\mu(x) \right], \quad (6.61)$$

e $Z(0)$ é a função de partição sem o acoplamento.

A corrente conservada pode ser escolhida como um fluxo de corrente que se sobrepõe à um loop retangular, como o da figura 19,

$$e \int d^4x A_\mu(x) J_\mu(x) = ig \oint_C dx_\mu A_\mu(x). \quad (6.62)$$

Isto pode ser feito definindo a corrente como unitária sobre o loop e zero caso contrário. Interpretando este loop em uma dimensão espacial R e uma temporal T , notamos que não se trata de um circuito que as cargas percorrem periodicamente, mas sim um par de carga e anti-carga criado em $t = 0$ e que se aniquilam em $t = T$. No instante $t = \tau$, conforme demonstrado pela figura 19 pela direção das setas, a densidade de carga deve ter sinais opostos em $r = 0$ e em $r = R$, ou seja, $J_o(0) = -J_o(R)$.

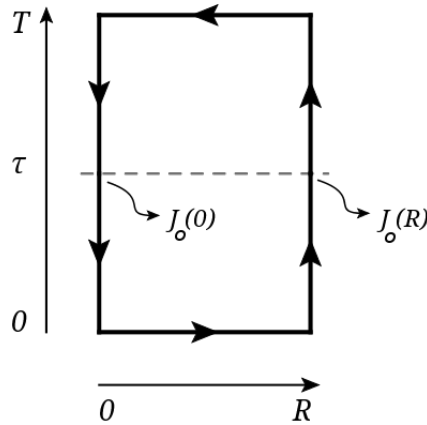


Figura 19 – Contorno C ao qual a corrente J_μ se desloca.

Escrevendo a função de partição em termos da energia livre $\mathcal{F}(J_\mu)$,

$$Z(J_\mu) = \exp [-\mathcal{F}(J_\mu)], \quad (6.63)$$

podemos identificar então

$$\langle e^{\frac{ig}{C} \oint dx_\mu A_\mu(x)} \rangle = \frac{Z(J_\mu)}{Z(0)} = \exp [-(\mathcal{F}(J_\mu) - \mathcal{F}(0))]. \quad (6.64)$$

De uma forma geral, pelos resultados obtidos nas expansões para acoplamentos fortes e fracos, Eqs. (6.26) e (6.58), no limite em que $T \gg R$, temos

$$\left\langle e^{\frac{ig}{c} \oint_C dx_\mu A_\mu(x)} \right\rangle \sim \begin{cases} e^{-A \ln 4g^2} & \text{se } g \gg 1 \\ e^{-\frac{1}{2}g^2(cP - \frac{T}{4\pi R}) + \frac{g^2}{2\pi^2} \ln(\frac{R}{a})} & \text{se } g \ll 1. \end{cases} \quad (6.65)$$

Além disso,

$$\mathcal{F}(J_\mu) - \mathcal{F}(0) \sim V(R)T, \quad (6.66)$$

em que $V(R)$ se trata do potencial de interação entre as cargas. Comparando o potencial $V(R)$ com o limite de acoplamento fraco, encontramos

$$V(R) \approx -\frac{g^2 c}{2} + \frac{g^2}{8\pi R}, \quad (6.67)$$

ou seja, um termo constante e um termo que decai com a distância, que corresponde a lei de Coulomb.

No limite de acoplamento forte encontramos

$$V(R) \approx R \ln 4g^2. \quad (6.68)$$

Este tipo de potencial é dito confinante pois a partícula está sempre sob sua ação. Ao calcularmos a força entre as partículas que este potencial gera, verificamos que é uma força constante que não depende da distância,

$$F(r) = -\nabla V(R) \approx -\ln 4g^2. \quad (6.69)$$

Este tipo de comportamento surge naturalmente no limite de acoplamentos fortes de teorias de calibre na rede, enquanto não são tão facilmente descritos na teoria quântica de campos.

6.5 Caso $d = 2$

O teorema de Hohenberg-Mermin-Wagner prevê que não pode haver uma quebra espontânea de simetria contínua em $d \leq 2$, portanto o modelo Abelian $U(1)$ deve apresentar somente uma fase [31, 32]. A partir das expansões para acoplamentos fortes e fracos explicitamente podemos entender o que ocorre fisicamente.

Primeiramente podemos notar que a soma sobre um contorno fechado pode ser expressa por meio da soma dos plaquetes internos a este contorno, como um teorema de Stokes na rede. Dado um contorno fechado C , podemos adicionar e subtrair suas linhas internas, e em seguida utilizar a Eq. (6.3) para alterarmos um sinal e encontramos a

soma de todos os plaquetes internos ao contorno. Por meio de uma representação gráfica podemos entender como isto ocorre,

$$\begin{aligned}
 \sum_C \theta_\mu(n) &= \text{Diagrama 1} \\
 &= \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} - \text{Diagrama 3} \\
 &= \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} \\
 &= \text{Diagrama 4} = \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n), \tag{6.70}
 \end{aligned}$$

em que a soma em P_c representa somar sobre todos os plaquetes internos ao contorno C . Desta forma, identificamos uma versão do teorema de Stokes na rede,

$$\sum_C \theta_\mu(n) = \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n). \tag{6.71}$$

Ao aplicar a identidade (6.71) na correlação, obtemos

$$\langle e^{i \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n)} \rangle = \frac{1}{Z} \prod_P \left(\int \mathcal{J} d\theta_{\mu\nu}(n) \right) e^{-\mathcal{S} + i \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n)} \tag{6.72}$$

em que \mathcal{J} é o jacobiano da transformação das variáveis e o produtório é realizado sobre todos os plaquetes. Para encontrar \mathcal{J} em duas dimensões assumimos uma dimensão espacial, μ , e a outra temporal, τ , a qual fixaremos o calibre como

$$\theta_\tau(n) = 0. \tag{6.73}$$

Pela definição da Eq. (6.4), no caso $d = 2$, temos

$$\theta_{\tau\mu}(n - \hat{\tau}) = \theta_{\mu}(n) - \theta_{\mu}(n - \hat{\tau}), \quad (6.74)$$

que pode ser reescrito como

$$\theta_{\mu}(n) = \theta_{\mu}(n - \hat{\tau}) - \theta_{\tau\mu}(n - \hat{\tau}). \quad (6.75)$$

Da mesma forma, podemos encontrar

$$\theta_{\mu}(n - \hat{\tau}) = \theta_{\mu}(n - 2\hat{\tau}) - \theta_{\tau\mu}(n - 2\hat{\tau}) \quad (6.76)$$

e, utilizando este resultado na Eq. (6.75), obtemos

$$\theta_{\mu}(n) = \theta_{\mu}(n - 2\hat{\tau}) - \theta_{\tau\mu}(n - 2\hat{\tau}) - \theta_{\tau\mu}(n - \hat{\tau}). \quad (6.77)$$

Ao seguir executando o mesmo processo recursivamente, encontramos

$$\theta_{\mu}(n) = \sum_{\tau' < n} \theta_{\tau\mu}(\tau'). \quad (6.78)$$

Isto garante que o Jacobiano da transformação é

$$\mathcal{J} = 1. \quad (6.79)$$

Este resultado nos conduz à

$$\begin{aligned} \langle e^{i \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n)} \rangle &= \prod_{P_c} \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} d\theta_{\mu\nu}(n) e^{-\frac{1}{2g^2} \cos(\theta_{\mu\nu}) + i \theta_{\mu\nu}(n)}}{\int_0^{2\pi} d\theta_{\mu\nu}(n) e^{-\cos(\theta_{\mu\nu})}} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} d\theta_{\mu\nu}(n) e^{-\frac{1}{2g^2} \cos(\theta_{\mu\nu}) + i \theta_{\mu\nu}(n)}}{\int_0^{2\pi} d\theta_{\mu\nu}(n) e^{-\cos(\theta_{\mu\nu})}} \right\}^A, \end{aligned} \quad (6.80)$$

em que A é o número de pacotes internos ao contorno C . A solução dessas integrais são conhecidas como funções de Bessel modificadas de primeiro tipo,

$$\langle e^{i \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n)} \rangle = \left\{ \frac{I_1\left(\frac{1}{2g^2}\right)}{I_0\left(\frac{1}{2g^2}\right)} \right\}^A. \quad (6.81)$$

No limite de acoplamento forte, $g \gg 1$, as funções de Bessel podem ser expandidas

$$\begin{aligned} \langle e^{i \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n)} \rangle &= \left\{ \frac{\frac{1}{4g^2} + \mathcal{O}(g^{-2})}{1 + \mathcal{O}(g^{-2})} \right\}^A \\ &\approx \left\{ \frac{1}{4g^2} \right\}^A = e^{-A \ln(4g^2)}, \end{aligned} \quad (6.82)$$

tal qual obtemos o mesmo resultado para o caso de $d > 2$, Eq. (6.26).

Já para o acoplamento fraco, $g \ll 1$, o limite assintótico da função de Bessel é

$$I_\nu(\alpha) \sim \frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8\alpha}\right), \quad (6.83)$$

que conduz a

$$\begin{aligned} \langle e^{i \sum_{P_c} \theta_{\mu\nu}(n)} \rangle &= \left\{ \frac{1 - g^2 \frac{4-1}{4}}{1 + \frac{g^2}{4}} \right\}^A \\ &\approx (1 - g^2)^A = e^{A \ln(1-g^2)} \approx e^{-g^2 A}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

isto é, apresenta um decaimento como função exponencial da área do contorno.

Este resultado deixa explicito que, embora tenha uma alteração suave, a correlação apresenta a mesma forma de decaimento, como lei de área. Concluimos então que não há uma transição de fase pois o modelo apresenta o mesmo comportamento para os dois limites de acoplamento.

7 Conclusão

Neste trabalho apresentamos inicialmente o modelo de Ising, sua solução exata em $d = 1$, a aproximação de campo médio de Bragg-Williams e a teoria fenomenológica de Landau. Na solução exata encontramos a existência somente da fase paramagnética enquanto nas soluções de campo médio encontramos a possibilidade de transição de fase. Neste modelo, detectamos uma degenerescência em seu estado fundamental, relacionada as suas possibilidades de ordenamento total positiva ou negativa. Para analisar essa degenerescência e uma possível transição entre estes estados, relacionamos este modelo ao modelo ϕ^4 por meio de uma transformação de Hubbard-Stratonovich. Levamos este modelo de teoria de campos ao espaço Euclidiano e, aplicando o formalismo de integrais de trajetórias, calculamos a probabilidade de uma inversão global. O resultado obtido foi a solução clássica de instanton.

A partir do interesse em teorias de calibre, também estudamos o modelo de Ising com simetria local. Realizando expansões a altas e baixas temperaturas detectamos a ocorrência de duas fases diferentes, ainda que o modelo não apresente um parâmetro de ordem convencional. Como a transição de fase não se relaciona à uma quebra espontânea de simetria, as fases encontradas são ditas fases topológicas. Por uma relação de dualidade foi possível conectar este modelo ao modelo de Ising convencional, do qual o comportamento crítico é conhecido. Concluímos então que a transição de fase nem sempre está associada à uma quebra espontânea de simetria e, neste caso, relações de dualidade podem nos fornecer parâmetros adequados para estudar a criticalidade de sistemas.

Apresentamos os modelos $O(N)$, ao qual pudemos aprofundar no modelo XY e, por meio de expansões a altas e baixas temperaturas, verificamos uma transição de fase para $d > 2$. Para os modelos $O(N)$ apresentamos um processo de renormalização e pudemos encontrar seus expoentes críticos. Através deste estudo concluímos que o processo de renormalização conduz aos expoentes críticos e estes fornecem uma descrição da criticalidade de todo um conjunto de modelos.

Investigamos ainda o modelo Abelian $U(1)$ com simetria local que também exibe uma transição de fase em $d > 2$ enquanto em $d = 2$ há somente uma fase. No limite do contínuo este modelo se relaciona à teoria eletromagnética e concluímos que o limite de acoplamentos fortes conduz a uma fase confinante. Finalmente, concluímos que expansões à altas e baixas temperaturas (acoplamentos fortes e fracos) são ferramentas poderosas para obter informações de transições de fase de modelos estatísticos.

Referências

- [1] NISS, M. History of the lenz-ising model 1920?1950: From ferromagnetic to cooperative phenomena. *Archive for History of Exact Sciences*, Springer Science and Business Media LLC, v. 59, n. 3, p. 267–318, oct 2004.
- [2] ISING, E. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, Springer Science and Business Media LLC, v. 31, n. 1, p. 253–258, feb 1925.
- [3] PEIERLS, R. On ising’s model of ferromagnetism. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press (CUP), v. 32, n. 3, p. 477–481, oct 1936.
- [4] ONSAGER, L. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 65, n. 3-4, p. 117–149, feb 1944.
- [5] BRAGG, W. L.; WILLIAMS, E. J. The effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society, v. 145, n. 855, p. 699–730, jul. 1934.
- [6] LANDAU, L. The theory of phase transitions. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 138, n. 3498, p. 840–841, nov 1936. [Phys. Z. Sowjetunion11,26(1937); Ukr. J. Phys.53,25(2008)].
- [7] KOGUT, J. B. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 51, n. 4, p. 659–713, oct 1979.
- [8] DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach (World Scientific Lecture Notes in Physics)*. [S.l.]: World Scientific Pub Co Inc, 1993. ISBN 9810213972.
- [9] COLEMAN, S. The uses of instantons. In: *The Whys of Subnuclear Physics*. [S.l.]: Springer US, 1979. p. 805–941.
- [10] WEGNER, F. J. Duality in generalized ising models and phase transitions without local order parameters. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 12, n. 10, p. 2259–2272, oct 1971.
- [11] ELITZUR, S. Impossibility of spontaneously breaking local symmetries. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 12, n. 12, p. 3978–3982, dec 1975.
- [12] WILSON, K. G. Confinement of quarks. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 10, n. 8, p. 2445–2459, out. 1974.

- [13] STANLEY, H. E. Dependence of critical properties on dimensionality of spins. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 20, n. 12, p. 589–592, mar. 1968.
- [14] MURAMATSU, A. *Lattice gauge theory*. [S.l.], 2009.
- [15] POLYAKOV, A. Compact gauge fields and the infrared catastrophe. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 59, n. 1, p. 82–84, out. 1975.
- [16] POLYAKOV, A. Quark confinement and topology of gauge theories. *Nuclear Physics B*, Elsevier BV, v. 120, n. 3, p. 429–458, mar. 1977.
- [17] POLYAKOV. *Gauge Fields and Strings (CONTEMPORARY CONCEPTS IN PHYSICS)*. [S.l.]: CRC Press, 1987. ISBN 978-3718603930.
- [18] SÍLVIO, S. R. D. A. *Introdução a Física Estatística*. [S.l.]: EDUSP, 2005. ISBN 9788531403866.
- [19] CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T. C. *Principles of Condensed Matter Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. ISBN 0521432243.
- [20] SHANKAR, R. *Quantum Field Theory and Condensed Matter*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 0521592100.
- [21] BINNEY, J. J. et al. *The Theory of Critical Phenomena*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. ISBN 0191660566.
- [22] NISHIMORI, H.; ORTIZ, G. *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena*. [S.l.]: Oxford University Press, 2010.
- [23] POLCHINSKI, J. Effective field theory and the fermi surface. In: *Theoretical Advanced Study Institute (TASI 92): From Black Holes and Strings to Particles*. [S.l.: s.n.], 1992.
- [24] BIENZOBAS, P. F. *Quantização canônica e integração funcional no modelo esférico médio*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- [25] SCHWARTZ, M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. [S.l.]: Cambridge University Pr., 2014. ISBN 1107034736.
- [26] WILSON, K. The origins of lattice gauge theory. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, Elsevier BV, v. 140, p. 3–19, mar. 2005.
- [27] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 30, n. 26, p. 1343–1346, jun. 1973.

- [28] POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 30, n. 26, p. 1346–1349, jun. 1973.
- [29] TONG, D. *Lectures on Statistical Field Theory*. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge, CB3 0BA, UK, 2017. Disponível em: <<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/sft.html>>.
- [30] KARDAR, M. *Statistical Physics of Fields*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 052187341X.
- [31] MERMIN, N. D.; WAGNER, H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 17, n. 22, p. 1133–1136, nov 1966.
- [32] HOHENBERG, P. C. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 158, n. 2, p. 383–386, jun 1967.
- [33] COLEMAN, S. There are no goldstone bosons in two dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 31, n. 4, p. 259–264, dec 1973.
- [34] CARDY, J. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521499593.
- [35] GOLDENFELD, N. *Lectures On Phase Transitions And The Renormalization Group*. [S.l.]: Taylor & Francis Inc, 1972. ISBN 0201554097.
- [36] SIMONS, B. *Phase Transitions and Collective Phenomena*. [S.l.], 1997. Disponível em: <<http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~bds10/phase.html>>.