



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

KEILA TATIANA BONI

**REESTRUTURAÇÃO DO MODELO DE REDESCRIÇÃO  
REPRESENTACIONAL PARA A CATEGORIZAÇÃO DE  
NÍVEIS DE EXPLICAÇÃO DE CONHECIMENTOS  
CONSTRUÍDOS POR ESTUDANTES EM APRENDIZAGEM  
DE COMPOSIÇÃO VETORIAL DE FORÇAS**

KEILA TATIANA BONI

**REESTRUTURAÇÃO DO MODELO DE REDESCRIÇÃO  
REPRESENTACIONAL PARA A CATEGORIZAÇÃO DE  
NÍVEIS DE EXPLICAÇÃO DE CONHECIMENTOS  
CONSTRUÍDOS POR ESTUDANTES EM APRENDIZAGEM  
DE COMPOSIÇÃO VETORIAL DE FORÇAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Laburú

Londrina  
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Boni, Keila Tatiana.

Reestruturação do modelo de Redescrição Representacional para a categorização de níveis de explicitação de conhecimentos construídos por estudantes em aprendizagem de composição vetorial de forças / Keila Tatiana Boni. - Londrina, 2019.  
265 f. : il.

Orientador: Carlos Eduardo Laburú.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, , 2019.

Inclui bibliografia.

1. Aprendizagem em Física - Tese. 2. Níveis de Explicitação - Tese. 3. Invariantes Operatórios - Tese. 4. Diversidade Representacional - Tese. I. Laburú, Carlos Eduardo. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . III. Título.

KEILA TATIANA BONI

**REESTRUTURAÇÃO DO MODELO DE REDESCRIÇÃO  
REPRESENTACIONAL PARA A CATEGORIZAÇÃO DE NÍVEIS DE  
EXPLICAÇÃO DE CONHECIMENTOS CONSTRUÍDOS POR  
ESTUDANTES EM APRENDIZAGEM DE COMPOSIÇÃO VETORIAL  
DE FORÇAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Carlos Eduardo Laburú  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dra. Ângela Marta P. das Dores Savioli  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo  
Universidade Estadual do Norte do Paraná -  
UENP

---

Prof. Dr. Diego Fogaça Carvalho  
Universidade do Norte do Paraná - UENP

---

Prof. Dr. Henrique Rizek Elias  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -  
UTFPr

Londrina, 04 de fevereiro de 2019.

*A Deus, por dar-me condições para a realização  
desse trabalho.*

*Ao meu esposo, Eliel, pelo apoio e companheirismo  
em todos os momentos.*

*Ao meu pai e minha mãe (in memoriam), por me  
ensinarem a nunca desistir dos objetivos traçados.*

## AGRADECIMENTOS

A caminhada rumo à conclusão do doutoramento, ao contrário do que eu imaginava, jamais foi uma caminhada solitária. Foram tantas as pessoas que me apoiaram e encorajaram durante todo esse percurso que, agora, falta espaço para agradecer. De coração, espero que essas poucas palavras sejam suficientes para expressar o quanto a contribuição de cada um de vocês foi significativa para que eu pudesse chegar até esse momento. Em especial, eu agradeço:

A Deus, por permitir que eu sinta, todos os dias, como única, especial, sua filha preferida. Obrigada por tantas graças em minha vida.

Aos meus pais, Nelson e Aparecida (*in memoriam*), por me mostrarem, por meio de suas atitudes, o valor da humildade, da honestidade, do trabalho e dos estudos. Principalmente, por me ensinarem que sonhos não são apenas sonhos quando nos dedicamos para torná-los realidade. Vocês são meus exemplos de vida.

Ao meu esposo, Eliel, pelo apoio incondicional em todos os momentos, pela paciência durante os necessários distanciamentos enquanto desenvolvia esse trabalho e por compartilhar sonhos comigo. Sem você nenhuma conquista valeria a pena.

Aos familiares, que torceram por mim em cada etapa dessa caminhada. Em especial, aos meus irmãos, Bruno e Lucyellen, aos meus tios, Silvana e Pedro e a minha prima, Nayara, que acompanharam de perto toda essa trajetória de estudos e me deram forças nos momentos difíceis. O apoio de vocês foi imprescindível para que eu pudesse chegar até aqui.

Aos amigos de vida e de trabalho, em especial, à Mariany, ao Diego e ao Marcelo, pelas leituras, sugestões, trocas de ideias e, acima de tudo, pela amizade sincera.

Aos amigos do grupo de estudos: Mariana, Elaine, Paulo, Fernanda, Ana Paula, Daniel, Josiane, Maysa, Robert, Juliana, Robson e Lucas, pelas contribuições ao meu trabalho, por terem me acompanhado durante todo o processo de elaboração dessa tese e, principalmente, pelo compartilhamento de momentos difíceis e alegres desse percurso.

A cada um dos membros da banca, Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, Prof. Dr. Diego Fogaça Carvalho, Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo e Prof. Dr. Henrique Risek Elias, pelas valiosas contribuições para esse trabalho. Em

especial, à Profa. Dra. Angela Marta, que foi a primeira a confiar em mim e me acolher no programa. Agradeço ao aprendizado que cada um de vocês me proporcionou.

Aos profissionais e estudantes do Colégio Estadual Professora Olympia Morais de Tormenta, por aceitarem participar dessa pesquisa.

E, finalmente, agradeço de forma muito especial ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Eduardo Laburú, pela orientação, por seu exemplo profissional e pela confiança em mim depositada. Obrigada por me permitir ter a honra de ser orientada por você, um pesquisador que admiro e respeito.

*“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”.*

Isaac Newton

BONI, Keila Tatiana. **Reestruturação do modelo de Redescrição Representacional para a categorização de níveis de explicitação de conhecimentos construídos por estudantes em aprendizagem de composição vetorial de forças**. 2019. 265 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

## RESUMO

Esta tese, de natureza qualitativa, está inserida no contexto de aprendizagem de conceitos científicos, cujo núcleo de investigações abrange premissas da ciência semiótica. Nesse contexto, é realizada uma investigação com o objetivo de categorizar, em níveis de explicitação, conhecimentos acerca de composição vetorial de forças que estudantes do Ensino Médio apresentam por meio de produção, de tratamento e de transformações de diversificadas representações relativas a esse conceito. Para tanto, foi elaborado um instrumento analítico a partir da reestruturação do modelo de Redescrição Representacional, proposto por Karmiloff-Smith para a área da Linguística, integrando a ele perspectivas teóricas convergentes, provenientes da Teoria dos Campos Conceituais e de referenciais da Diversidade Representacional. Essa integração permitiu adaptar o modelo original de Redescrição Representacional com o intuito de atender às especificidades representacionais da aprendizagem em Física do Ensino Médio. A aplicação do instrumento analítico foi realizada sobre registros escritos e transcrições de entrevistas coletados de nove estudantes, os quais participaram de todos os momentos de intervenção propostos pela pesquisadora, durante aulas de Física ministradas na perspectiva da Diversidade Representacional. Nos procedimentos analíticos, efetivados à luz da Análise Textual Discursiva, a identificação de invariantes operatórios e de atividades cognitivas representacionais, a partir das produções dos estudantes em resposta às questões propostas em uma prova escrita, subsidiaram a categorização de diferentes níveis de explicitação de conhecimentos dos estudantes, que variaram conforme características de cada questão. Foi evidenciado que níveis inferiores de explicitação são comumente identificados em questões que exigem procedimentos matemáticos, para as quais são mobilizadas regras-de-ação ou teoremas-em-ação falsos, e que níveis superiores de explicitação estão atrelados à verbalização e à coordenação de diversificadas representações de um mesmo conceito. Perante o exposto, almejamos que o instrumento analítico proposto neste trabalho contribua para a análise de aprendizagens construídas por estudantes, a partir da evidenciação de conceitos subjacentes às suas produções e códigos com que significam as diferentes representações e suas inter-relações, bem como apresenta potencial para ser aplicado nas demais Ciências Naturais e na Matemática.

**Palavras-chave:** Aprendizagem em Física. Níveis de Explicitação. Invariantes Operatórios. Diversidade Representacional. Composição Vetorial de Forças.

BONI, Keila Tatiana. **Restructuring of the Representational Redescription model for the categorization of knowledge explicitation levels built by students in learning the vectorial composition of forces**. 2019. 265 p. Thesis (Doctorate degree in Science Education and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2019.

## ABSTRACT

This thesis, qualitative in nature, is inserted in the context of learning of scientific concepts, whose research covers core assumptions of science semiotics. In this context, an investigation is carried out with the purpose of categorizing, in levels of explanation, knowledge of vector composition of forces that high school students present by means of production, treatment and diversified representations transformations relating to this concept. It was elaborated an analytical instrument from the restructuring of Representational Redescription model, Karmiloff-Smith proposed for the area of Linguistics, integrating theoretical perspectives converged he, from the Theory of Fields Conceptual and Representational Diversity benchmarks. This integration allowed to adapt the original Representational Redescription model in order to meet the specificities of Physical learning representational that high school. The application of analytical instrument was performed on written records and transcriptions of interviews collected from nine students, which participated in all times of intervention proposed by the researcher, during physics classes taught in the perspective of Representational Diversity. Analytical procedures, enforced in the light of the Discursive Textual Analysis, the identification of invariants operative and cognitive representational activities, from the students' productions in response to the questions proposed in a learning evaluation, subsidized categorizing different levels of explicitation of knowledge of students, that varied according to the characteristics of each issue. It was evidenced that lower levels of explanation are commonly identified in issues that require mathematical procedures, for which mobilized action-rules or theorems-in-action false, and that increased levels of explanation are tied to the verbalization and the coordination of diverse representations of the same concept. In view of the above, we hope that the analytical instrument proposed in this work contributes to the analysis of students', from the evidence of concepts underlying their productions and codes with which they signify the different representations and their interrelationships, as well as presents potential to be applied in the other Natural Sciences and Mathematics.

**Keywords:** Learning in Physics. Levels of Explicitation. Operative Invariants. Representational Diversity. Vectorial Composition of Forces.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Diagrama que expressa a articulação entre competências gerais e alguns grandes eixos de conhecimento.....	23
<b>Figura 2</b> – Definição de vetor diretor de uma reta.....	34
<b>Figura 3</b> – A representação e sua relação com as formas operatória e predicativa do conhecimento.....	40
<b>Figura 4</b> – Tratamento efetuado no registro algébrico.....	51
<b>Figura 5</b> – Conversão entre Registros de Representação Semiótica.....	52
<b>Figura 6</b> – Modelos alternativos de redescrição representacional.....	86
<b>Figura 7</b> – Instrumento Analítico.....	117
<b>Figura 8</b> – Regra do Paralelogramo.....	131
<b>Figura 9</b> – Aplicação da Lei dos Cossenos.....	131
<b>Figura 10</b> – Exemplo de representação de vetores de mesma origem no plano cartesiano, em material impresso disponibilizado aos estudantes.....	133
<b>Figura 11</b> – Exemplo de atividade de soma vetorial com palitos e material impresso, desenvolvida por um dos grupos de estudantes.....	134
<b>Figura 12</b> – Cenas do vídeo de experimentos com dinamômetros para determinação de equilíbrio (a) de duas forças opostas e (b) de três forças concorrentes.....	136
<b>Figura 13</b> – Atividade experimental com dinamômetros para determinação de equilíbrio de duas forças concorrentes.....	137
<b>Figura 14</b> – Cenas do vídeo de experimentos com dinamômetros para a verificação (a) de duas forças de 2 N cada, em determinadas direções e (b) de uma força resultante.....	138
<b>Figura 15</b> – Cena do vídeo a respeito da soma geométrica de vetores para a primeira situação do experimento.....	139
<b>Figura 16</b> – Cena do vídeo a respeito da determinação da força resultante da segunda situação experimental.....	140
<b>Figura 17</b> – Cena do vídeo a respeito da verificação da aplicação de duas forças de mesma intensidade na segunda situação experimental.....	140
<b>Figura 18</b> – Cena do vídeo que mostra as duas folhas de papel com direções distintas.....	141
<b>Figura 19</b> – Registro escrito de E1 para a questão 3.....	154

<b>Figura 20</b> – Registro escrito de E1 para a questão 4.....	158
<b>Figura 21</b> – Registro escrito de E1 para a questão 5.....	161
<b>Figura 22</b> – Registro escrito de E1 para a questão 7.....	163
<b>Figura 23</b> – Registro escrito de E2 para a questão 3.....	169
<b>Figura 24</b> – Registro escrito de E2 para a questão 4.....	171
<b>Figura 25</b> – Registro escrito de E2 para a questão 5.....	172
<b>Figura 26</b> – Resultado geométrico para a soma vetorial da questão 5 .....	174
<b>Figura 27</b> – Registro escrito de E2 para a questão 7.....	175
<b>Figura 28</b> – Registro escrito de E3 para a questão 3.....	181
<b>Figura 29</b> – Registro escrito de E3 para a questão 5.....	183
<b>Figura 30</b> – Registro escrito de E3 para a questão 7.....	185
<b>Figura 31</b> – Registro escrito de E4 para a questão 3.....	189
<b>Figura 32</b> – Ênfase atribuída por E4 para o resultado obtido na questão 3 .....	190
<b>Figura 33</b> – Registro escrito de E4 para a questão 4.....	191
<b>Figura 34</b> – Registro escrito de E4 para a questão 5.....	193
<b>Figura 35</b> – Registro escrito de E4 para a questão 7.....	194
<b>Figura 36</b> – Registro escrito de E5 para a questão 4.....	200
<b>Figura 37</b> – Registro escrito de E5 para a questão 5.....	201
<b>Figura 38</b> – Registro escrito de E5 para a questão 7.....	202
<b>Figura 39</b> – Registro escrito de E6 para a questão 4.....	207
<b>Figura 40</b> – Registro escrito de E6 para a questão 5.....	208
<b>Figura 41</b> – Registro escrito de E6 para a questão 7.....	210
<b>Figura 42</b> – Registro escrito de E7 para a questão 4.....	214
<b>Figura 43</b> – Registro escrito de E7 para a questão 5.....	215
<b>Figura 44</b> – Registro escrito de E7 para a questão 7.....	218
<b>Figura 45</b> – Registro escrito de E8 para a questão 3.....	222
<b>Figura 46</b> – Registro escrito de E8 para a questão 4.....	224
<b>Figura 47</b> – Registro escrito de E8 para a questão 5.....	225
<b>Figura 48</b> – Registro escrito de E8 para a questão 7.....	226
<b>Figura 49</b> – Registro escrito de E9 para a questão 3.....	232
<b>Figura 50</b> – Registro escrito de E9 para a questão 4.....	233
<b>Figura 51</b> – Registro escrito de E9 para a questão 5.....	234
<b>Figura 52</b> – Registro escrito de E9 para a questão 7.....	236

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Características do Modelo de Redescrição Representacional .....	88
<b>Quadro 2</b> – Agrupamentos dos fragmentos de textos correspondentes às referências teóricas da pesquisa .....	92
<b>Quadro 3</b> – Principais implicações dos agrupamentos para a constituição e a aplicação do instrumento analítico .....	116
<b>Quadro 4</b> – Resumo das atividades propostas por etapa .....	143
<b>Quadro 5</b> – Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 3 .....	155
<b>Quadro 6</b> – Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 4 .....	159
<b>Quadro 7</b> - Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 5 .....	162
<b>Quadro 8</b> – Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 7 .....	164
<b>Quadro 9</b> – Síntese de teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E1 .....	166
<b>Quadro 10</b> – Nível de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E1, segundo características evidenciadas em suas produções .....	169
<b>Quadro 11</b> – Registros de representação semiótica apresentados por E2 para a questão 5 .....	173
<b>Quadro 12</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E2 .....	178
<b>Quadro 13</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E2, segundo características evidenciadas em suas produções .....	180
<b>Quadro 14</b> – Registros de representação semiótica apresentados por E3 para a questão 5 .....	184
<b>Quadro 15</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E3 .....	187
<b>Quadro 16</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E3, segundo características evidenciadas em suas produções .....	189
<b>Quadro 17</b> – Registros de representação semiótica apresentados por E4 para a questão 4 .....	191

<b>Quadro 18</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E4 .....	196
<b>Quadro 19</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E4, segundo características evidenciadas em suas produções .....	199
<b>Quadro 20</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E5 .....	204
<b>Quadro 21</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E5, segundo características evidenciadas em suas produções .....	206
<b>Quadro 22</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E6 .....	212
<b>Quadro 23</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E6, segundo características evidenciadas em suas produções .....	214
<b>Quadro 24</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E7 .....	220
<b>Quadro 25</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E7, segundo características evidenciadas em suas produções .....	221
<b>Quadro 26</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E8 .....	228
<b>Quadro 27</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E8, segundo características evidenciadas em suas produções .....	231
<b>Quadro 28</b> – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E9 .....	238
<b>Quadro 29</b> – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E9, segundo características evidenciadas em suas produções .....	240
<b>Quadro 30</b> – Apresentação geral dos níveis de explicitação categorizados por estudante e por questão.....	240

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	17
<b>2</b>	<b>APRENDIZAGEM EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA</b> .....	22
2.1	RELAÇÕES ENTRE AS APRENDIZAGENS CIENTÍFICA E MATEMÁTICA .....	22
<b>3</b>	<b>TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS</b> .....	26
3.1	ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS .....	26
3.2	CONCEITUALIZAÇÃO, SITUAÇÃO E ESQUEMAS .....	27
3.3	INVARIANTES OPERATÓRIOS .....	33
3.4	REPRESENTAÇÃO .....	37
3.5	CAMPO CONCEITUAL E CONCEITO .....	43
<b>4</b>	<b>DIVERSIDADE REPRESENTACIONAL</b> .....	48
4.1	REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA .....	48
4.2	MULTIMODOS E MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES .....	55
4.3	DIVERSIDADE REPRESENTACIONAL: DEFINIÇÃO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS ..	57
<b>5</b>	<b>REDESCRIÇÃO REPRESENTACIONAL</b> .....	73
5.1	MODELO DE REDESCRIÇÃO REPRESENTACIONAL.....	73
5.2	NÍVEIS DE EXPLICITAÇÃO.....	80
<b>6</b>	<b>INSTRUMENTO ANALÍTICO</b> .....	89
6.1	ARTICULAÇÃO TEÓRICA.....	90
6.2	CONSTITUIÇÃO E APRESENTAÇÃO DO INSTRUMENTO ANALÍTICO.....	110
<b>7</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> .....	123
7.1	ESTUDANTES PARTICIPANTES E CONTEXTO DO CAMPO DA PESQUISA.....	123
7.2	INSTRUMENTOS DE COLETAS DAS INFORMAÇÕES.....	125
7.2.1	Prova Escrita.....	125
7.2.2	Entrevista.....	128
7.3	ETAPAS DE INTERVENÇÃO E DE COLETA DE INFORMAÇÕES.....	129
7.4	ESCOLHA METODOLÓGICA PARA ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES.....	145

7.4.1	Análise Textual Discursiva.....	146
<b>8</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÕES DAS INFORMAÇÕES COLETADAS.....</b>	<b>153</b>
8.1	ANÁLISE DO ESTUDANTE E1.....	153
8.2	ANÁLISE DO ESTUDANTE E2.....	169
8.3	ANÁLISE DO ESTUDANTE E3.....	181
8.4	ANÁLISE DO ESTUDANTE E4.....	189
8.5	ANÁLISE DO ESTUDANTE E5.....	200
8.6	ANÁLISE DO ESTUDANTE E6.....	206
8.7	ANÁLISE DO ESTUDANTE E7.....	214
8.8	ANÁLISE DO ESTUDANTE E8.....	222
8.9	ANÁLISE DO ESTUDANTE E9.....	231
8.10	RESULTADOS DAS ANÁLISES POR QUESTÃO.....	240
<b>9</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>244</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>249</b>
	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>255</b>
	APÊNDICE A – Termo de Anuência.....	256
	APÊNDICE B – Termo de Consentimento.....	257
	APÊNDICE C – Prova Escrita.....	259

## 1 INTRODUÇÃO

Compreender aspectos da aprendizagem, que permitam aferi-la, é algo complexo, pois envolve um processo cognitivo de formação e organização mental de conceitos, bem como o estabelecimento de relações entre eles, que são dependentes de diversos fatores, externos e internos. Os fatores externos são aqueles que possibilitam ao estudante os primeiros atos perceptivos em relação a um determinado conceito, como recursos e estratégias metodológicas adotados pelo professor, no intuito de possibilitar a identificação do conceito e reconhecimento de suas propriedades, relações e transformações pelos estudantes. Os fatores internos, por sua vez, compreendem todo o processamento cognitivo do estudante para realizar essas atividades de identificação, estabelecimento de relações e transformações, tendo como alvo atingir a compreensão.

Certamente, inferir a respeito da aprendizagem construída por um estudante é um grande desafio para profissionais e pesquisadores educacionais, independentemente da área de conhecimento considerada. Entendemos que o desafio de realizar essas inferências é ainda maior nas áreas científicas e matemática e, inclusive, os desafios que aprendizes enfrentam em relação aos conteúdos dessas áreas são, em geral, mais expressivos que em outras disciplinas. Tais entendimentos justificam-se pelo fato de as Ciências Naturais e a Matemática concentrarem uma diversidade de representações, além de um conjunto de informações e construção conceitual estrutural e hierarquizada que, muitas vezes, pautam-se em abstrações e idealizações.

Dentre as Ciências Naturais, destacamos a complexidade da aprendizagem em Física que, além de envolver abstrações, idealizações e uma diversidade de representações associadas aos conceitos, apresenta relações indissociáveis entre abstrações conceituais e simbolismos matemáticos, que fazem com que a Física seja caracterizada como um corpo de conhecimento dependente de sistemas semióticos diversos para representar fenômenos naturais, para produzir linguagem matemática que descreva e trate esses fenômenos, bem como para a compreensão e expressão de conhecimentos físicos.

Todos esses desafios de aprendizagem relacionados às características inerentes das Ciências Naturais e da Matemática foram vivenciados pela pesquisadora durante experiências como docente de Física e de Matemática na

Educação Básica e no Ensino Superior, experiências essas que suscitaram indagações relacionadas à aprendizagem, as quais compõem as motivações que impulsionaram o desenvolvimento da presente pesquisa. Dentre essas indagações, incluímos: de que maneira é possível o professor realizar inferências a respeito da apreensão conceitual de cada estudante em aprendizagem de determinados conteúdos? Que aspectos devem ser considerados nesse processo inferencial? E, ainda, ponderando que o processo de apreensão pode demandar um longo período, haveria uma maneira do professor caracterizar a aprendizagem do estudante de maneira gradual, em momentos que julgar oportunos durante o processo de ensino e de aprendizagem?

Pesquisas fundamentadas na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 1998; 2008; 2009a; 2009b; 2009c; 2017) revelam a existência de dois tipos de conhecimento, operacional e predicativo, os quais estão relacionados. Enquanto que na forma predicativa o conhecimento é exteriorizado pelo estudante por meio de linguagem verbal, o conhecimento operacional exige maior atenção do pesquisador ou professor, pois nele apenas indícios de conhecimentos construídos pelo estudante são manifestados por meio de representações diversas, atreladas à suas ações diante de tarefas.

Considerando as atribuições de distintas representações de um mesmo conceito para a investigação de aprendizagens conceituais de estudantes, ao ingressar nos estudos de doutorado encontramos a motivação para desenvolvimento de uma investigação na perspectiva semiótica. Várias pesquisas (LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; PRAIN; WALDRIP, 2006; DUVAL, 2003; 2009a; 2009b; 2012; entre outros) têm contemplado, no âmbito da aprendizagem científica e matemática, entendimentos a respeito de como estudantes atribuem significados às representações simbólicas diversas e que dificuldades enfrentam nesse processo de significação.

A partir de estudos relativos às duas perspectivas teóricas mencionadas, a identificação de leituras convergentes e complementares (BONI; LABURÚ; CAMARGO FILHO, 2018) nos conduziu a entendimentos a respeito das atribuições das representações em dois vieses, para a construção da aprendizagem e para a comunicação e explicitação dessa construção. Nesse direcionamento, avistamos no modelo de Redescrição Representacional (KARMILOFF-SMITH 1994; 2010), desenvolvido para a área de Linguística, uma possibilidade de adaptarmos um

instrumento analítico para categorizar níveis de explicitação de estudantes, visando atender às especificidades representacionais da aprendizagem em Física, partindo do pressuposto de que esses níveis de explicitação caracterizam diferentes graus de apropriação conceitual, associados às formas pelas quais os estudantes lidam com representações e exteriorizam seus conhecimentos.

Apesar de Karmiloff-Smith (1994; 2010) mencionar a possibilidade de extensão do seu modelo teórico de Redescrição Representacional para domínios da Física e da Matemática, a autora enfatiza sua aplicabilidade apenas com crianças, não contemplando, no caso da Física, conceitos mais específicos, tais como os abordados a partir do Ensino Médio. Ao realizarmos uma revisão bibliográfica em bancos de teses e dissertações e principais revistas científicas da área de Ensino de Ciências, não identificamos propostas de adaptação do modelo de Redescrição Representacional para análise de aprendizagens em Física, ponderando suas especificidades representacionais.

Na busca por pesquisas realizadas nos últimos anos, próximas a que propomos, encontramos a dissertação de Tesseroli (2015), apresentada a um Programa de Pós-Graduação em Informática, em que o modelo teórico de Redescrição Representacional foi adaptado para um ambiente computacional de avaliação. Nessa adaptação, propôs a divisão de questões avaliativas em quatro subquestões, correspondentes a cada um dos níveis de explicitação propostos no modelo original. O modelo adaptado foi aplicado considerando conceitos de Lógica Proposicional a um aluno fictício, objetivando simular as possíveis respostas que o estudante selecionaria ao responder a avaliação. Nesse contexto, a análise dos dados foi realizada a partir da implementação de um algoritmo capaz de gerar todas as possibilidades de respostas do estudante.

Diante das motivações oriundas de experiências profissionais como docente e, sobretudo, no intuito de contribuir com as pesquisas que buscam alternativas para compreender aprendizagens científicas e matemática, com ênfase na Física, nos propomos, nessa pesquisa, responder aos questionamentos: *que adaptações são necessárias no modelo de Redescrição Representacional para categorizar níveis de explicitação de estudantes em aprendizagem de conceitos de Física? E que níveis de explicitação do conhecimento, acerca de composição vetorial de forças, estudantes do Ensino Médio apresentam por meio de produção, de tratamento e de transformações de diversificadas representações relativas a esse conceito?*

Entendemos que graus mais elevados de apropriação conceitual estão diretamente relacionados à capacidade de o estudante explicitar seus conhecimentos.

Tendo em vista responder essas problemáticas, optamos por utilizar três eixos teóricos: a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 1998; 2008; 2009a; 2009b; 2009c; 2017), a linha de pesquisa Diversidade Representacional (LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; PRAIN; WALDRIP, 2006; DUVAL, 2003; 2009a; 2009b; 2012; entre outros) e o modelo de Redescrição Representacional (KARMILOFF-SMITH, 1994; 2010). A partir dessas três perspectivas teóricas, objetivamos elaborar um instrumento analítico, caracterizado como uma taxonomia para classificar e descrever diferentes níveis de explicitação do conhecimento (KARMILOFF-SMITH, 1994; 2010) de estudantes de Física do Ensino Médio, inferidos a partir de indícios invariantes (VERGNAUD, 1996; 1998; 2008; 2009a; 2009b; 2009c; 2017) associados aos conhecimentos construídos e manifestados por eles, por meio de diversificadas representações (LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; PRAIN; WALDRIP, 2006; DUVAL, 2003; 2009a; 2009b; 2012; entre outros).

Esse instrumento analítico consistiu no modelo teórico de Redescrição Representacional (KARMILOFF-SMITH, 1994; 2010) reestruturado, de maneira a contemplar especificidades do processo de aprendizagem em Física, no que tange ao papel das representações nesse processo, segundo referenciais da Teoria dos Campos Conceituais e da Diversidade Representacional. Com vistas a responder ao segundo questionamento que propomos, aplicamos o instrumento na análise de produções escritas e entrevistas obtidas de estudantes do Ensino Médio em aprendizagem a respeito de composição vetorial de forças.

A tese estrutura-se em sete capítulos. Nos capítulos 1, 2, 3 e 4 apresentamos os referenciais teóricos que sustentam a pesquisa desenvolvida, a saber: i) abordagens gerais relativas à aprendizagem em Física; ii) a Teoria dos Campos Conceituais; iii) a linha de pesquisa Diversidade Representacional; e, iv) o modelo de Redescrição Representacional. Ressaltamos que a ordem em que apresentamos cada referencial teórico não faz alusão a uma hierarquia de relevância para o presente estudo, mas foi estruturada de maneira a situar o leitor no contexto de desenvolvimento progressivo em que a investigação, como um todo, foi constituída.

Com base na exposição teórica realizada, no capítulo 5 articulamos elementos de cada teoria que compõe essa investigação, buscando descrever leituras convergentes entre elas e que são consonantes às pretensões de pesquisa.

Essa articulação serviu de sustentação para a estruturação do instrumento analítico, o qual é apresentado e definido nesse capítulo.

No capítulo 6, descrevemos o contexto da pesquisa. São apresentados os estudantes participantes, as abordagens didáticas propostas, os instrumentos e procedimentos de coletas de informações e a escolha metodológica para a análise das informações obtidas, objetivando a aplicação do instrumento analítico que estruturamos.

No capítulo 7, apresentamos as informações coletadas e selecionadas para submissão a procedimentos analíticos. A partir da investigação de invariantes operatórios, bem como da evidenciação de atividades cognitivas realizadas sobre representações, aplicamos o instrumento analítico que elaboramos e tecemos compreensões emergentes das análises realizadas.

Dando fechamento ao estudo, nas Considerações Finais fornecemos discussões e reflexões a respeito dos resultados obtidos para as problemáticas propostas nessa investigação, bem como traçamos perspectivas de ampliação do escopo da pesquisa realizada, propondo sugestões de aprofundamentos da temática abordada, no intuito de fomentar estudos futuros.

## 2 APRENDIZAGEM EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Com foco na aprendizagem em Ciências e Matemática, em que destacamos a Física, neste capítulo, apresentamos alguns aspectos relativos à aprendizagem nas áreas científica e matemática e, conseqüentemente, justificamos a possibilidade de extensão das discussões subseqüentes a todas elas, ainda que reconheçamos as particularidades de cada e que tenhamos como cerne, no presente estudo, a aprendizagem em Física.

As discussões promovidas neste capítulo subsidiam, de maneira geral, as próximas abordagens teóricas e, sobretudo, as metodológicas e analíticas que compõem esta tese, uma vez que abrangem aspectos comuns entre o processo da aprendizagem científica e matemática, no que tange ao papel das representações nesse processo.

### 2.1 RELAÇÕES ENTRE AS APRENDIZAGENS CIENTÍFICA E MATEMÁTICA

De acordo com as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+),

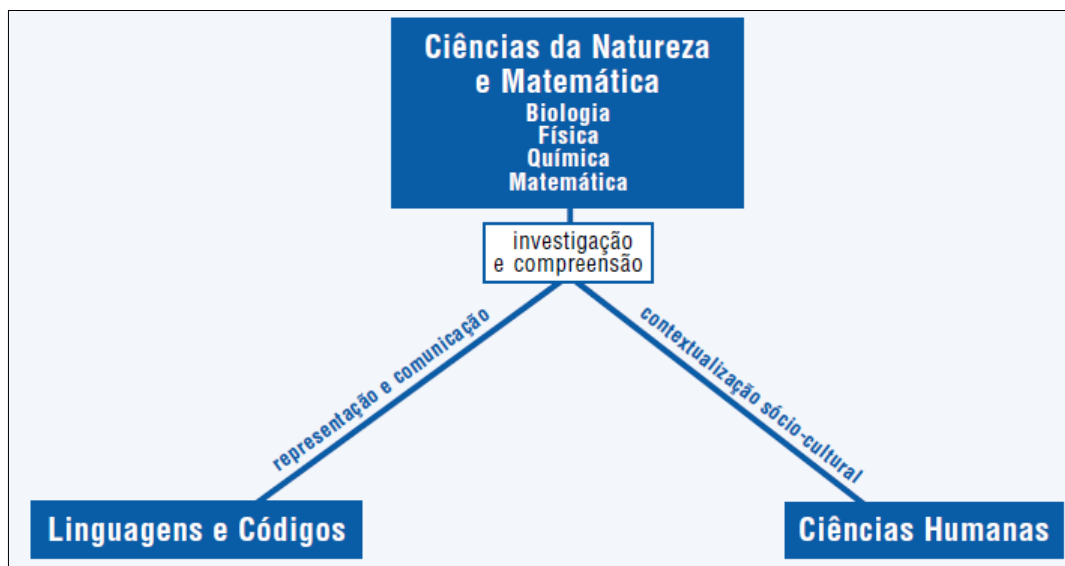
[...] a Biologia, a Física, a Química e a Matemática integram uma mesma área do conhecimento. São ciências que têm em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos (BRASIL, 2002, p. 23).

Na presente pesquisa, nosso objeto de estudo gira em torno de linguagens, representações e sistematização do conhecimento, aspectos que, de acordo com o PCN+ (BRASIL, 2002), são comuns às áreas científicas e matemática. Esse argumento corrobora com as discussões promovidas, em que, apesar de nos dedicarmos sobretudo à Física, defendemos potencialidades de estender o estudo aqui proposto aos domínios das demais disciplinas científicas e a Matemática.

Com base nas características elencadas no PCN+ (BRASIL, 2002), as disciplinas de Física, Química, Matemática e Biologia constituem um grande eixo estruturador, denominado *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, e compreendem três competências gerais em comum: i) representação e comunicação; ii) investigação e compreensão; e, iii) contextualização sociocultural. A

primeira competência geral está atrelada ao grande eixo *Linguagens e Códigos* e a última ao grande eixo *Ciências Humanas*, como ilustra a figura a seguir:

**Figura 1** – Diagrama que expressa a articulação entre competências gerais e alguns grandes eixos de conhecimento



Fonte: BRASIL (2002, p. 25)

Nesta investigação, o foco de estudo está diretamente relacionado à competência *representação e comunicação*, a qual engloba diagramas, gráficos, esquemas, equações, entre outras formas de representação, inclusive aquelas associadas à linguagem verbal, oral e escrita, pertencentes ao campo da Linguística. Contudo, também incluímos aspectos da competência *investigação e compreensão*, no sentido de que investigamos procedimentos e compreensões traduzidos na forma de modelos representativos e explicativos, elaborados no intuito de manifestar entendimentos relativos às leis da natureza e teorias (BRASIL, 2002). A compreensão, nesse contexto, associa-se à distinção entre modelo e realidade.

Incluímos, ainda, aspectos da competência *contextualização sociocultural*, uma vez que muitos dos conceitos físicos (se não todos) são mais facilmente compreensíveis quando aproximados às situações da realidade do estudante e, por isso, a contextualização é fator relevante que consideramos, especialmente, nos momentos de intervenções no campo de pesquisa.

Referindo-se ao ensino de Física, no PCN+ (BRASIL, 2002) menciona-se que professores têm atribuído ênfase maior à expressão do conhecimento do estudante

por meio de resolução de problemas e da linguagem matemática. Não que essas formas de expressão não sejam relevantes, mas são insuficientes e limitadas e, por isso, defende-se a inclusão de outras formas de expressão, como a escrita, utilização de esquemas, fotos, vídeos, linguagem corporal, entre outros que permitam

[...] formas de representar e sistematizar o conhecimento que se confundem com a própria produção de um novo conhecimento, contribuindo também para explicitar e reforçar as relações do conhecimento científico com outras formas de expressão do saber (BRASIL, 2002, p. 84).

Corroborando com essa afirmação, Lopes (2004) assinala que a Física é uma ciência que está intrinsecamente ligada ao mundo físico e tem uma forma particular de se relacionar com ele. Dada a complexidade e inúmeros detalhes do mundo físico, a Física estabelece idealizações, ou seja, elabora e age sobre modelos teóricos que representam aspectos do mundo físico de modo a permitir estudar a partir dele, ou aplicar nele, teorias mais vastas e abstratas. Ainda, a Física se caracteriza como um corpo de conhecimentos conceituais altamente estruturados e formalizados, estabelecendo vínculos intensos com o conhecimento matemático, que vão muito além de utilizar o simbolismo, a estrutura e os seus procedimentos. Portanto, o conhecimento físico, ao mesmo tempo que engloba conceitos, princípios, leis e teorias científicas, apresenta contextos específicos e associações com procedimentos de cálculos e raciocínio.

Toda essa explanação conduz ao entendimento de que a Física, assim como as demais disciplinas científicas e a Matemática, é circunstanciada por representações, seja para representar o objeto conceitual de estudo, para tratá-lo e traduzi-lo ou para expressar conhecimentos construídos. Muito além de aspectos didáticos, metodológicos, entre outros, a aprendizagem depende de uma construção interna e de mudança conceitual, que compõem o desenvolvimento de competências cognitivas e de expressão do conhecimento, que são particulares para cada estudante. Ambos os processos, cognitivo e de expressão, são dependentes de representações que, por sua vez, também são produtos de tais processos.

Assim, sugere-se que a aprendizagem em Física, e que estendemos às demais disciplinas científicas e à Matemática, dê atenção especial ao papel que as representações desempenham nesse processo e no ensino. Afinal, no que tange à aprendizagem conceitual, Lopes (2004) defende que esse processo não pode ser

entendido como independente do ensino e que compreender particularidades da aprendizagem em Física é fundamental para que se possa pensar o seu processo de ensino. Concordamos com esse argumento e, inclusive, no decorrer das explanações, fica evidente que, ainda que estejamos mais interessados em investigar aspectos associados à aprendizagem, questões de ensino perpassam, em diversos momentos, nossas abordagens.

Considerando as discussões promovidas, passamos a apresentar, respectivamente, os três eixos teóricos que compõem esta investigação, dentre os quais: duas perspectivas teóricas, a Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional, que abordam aspectos cognitivistas das áreas de conhecimento científica e matemática; e a Redescrição Representacional, que contempla aspectos cognitivistas pertinentes à Linguística.

### 3 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Neste capítulo, apresentamos uma das perspectivas teóricas em que nos fundamentamos para realização desta tese, a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 1998; 2008; 2009a; 2009b; 2009c; 2017). Essa teoria aborda aspectos cognitivos e fornece algumas abordagens relativas ao ensino científico e matemático, em que buscamos esclarecer os elementos principais que compõem essa teoria e enfatizar as considerações em relação às atribuições das representações para o processo de aprendizagem.

#### 3.1 ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista que objetiva descrever e analisar as relações existentes entre os processos de aprendizagem em determinadas situações, que acontecem em curto prazo, e os processos de desenvolvimento cognitivo, que acontecem em longo prazo (PLAISANGE; VERGNAUD, 2003).

Essa teoria foi desenvolvida por Gérard Vergnaud, pensador francês que foi diretor de pesquisa do *Centre National de La Recherche Scientifique*, de Paris, França, durante 18 anos. Ele foi, também, fundador da Escola Francesa de Didática da Matemática e orientado por Jean Piaget durante formação como pesquisador, período em que intensificou sua dedicação aos estudos no campo da Psicologia e da Matemática e que deu início à elaboração de sua teoria, na qual oferece um quadro analítico que auxilia a estudar o processo de aprendizagem de conceitos que vão muito além do campo da Matemática. Portanto, vale esclarecer que a TCC não é uma teoria específica voltada para a Matemática, contudo foi nesse campo que pesquisas foram desenvolvidas mais sistematicamente (VERGNAUD, 2017).

A ideia chave da TCC é o processo cognitivo que depende da formação de conceitos relacionados uns aos outros. Essas relações são estabelecidas a partir de filiações e de rupturas, uma vez que esse processo, que conduz à conceitualização, é longo e contínuo. Na TCC, se defende, ainda, que o conhecimento é pragmático, pois os conceitos não são formulados apenas para que sejam enunciados corretamente, mas também para que sejam utilizados em situações que envolvem problemas práticos e teóricos.

Essa afirmação vem ao encontro das referências de Vergnaud (2008) e às formas predicativa e operatória do conhecimento, em que por meio da TCC, Vergnaud (2008) visa descrever e analisar as relações existentes entre ambas as formas de conhecimento, ou seja, entre o *saber fazer* e o *saber explicitar* (VERGNAUD, 1996).

Segundo a TCC, expressamos nossos conhecimentos a partir do que dizemos (forma predicativa) e a partir do que fazemos perante uma situação (forma operatória), de modo que, em geral, a forma operatória antecede a predicativa (VERGNAUD; MOREIRA, 2017). Essa afirmação é clara tanto no ensino quanto em outras atividades profissionais, pois há um grande distanciamento entre o sujeito saber fazer algo em uma determinada situação e ser capaz de falar a respeito, ou seja, explicar o que faz e porquê o faz. Nesse sentido, para Vergnaud (2017), a expressividade do conhecimento abrange “todos os registros da atividade: gestos e busca de informações perceptivas, linguagem e diálogo, raciocínio científico e técnico” (VERGNAUD; MOREIRA, 2017, p. 26). Isso justifica o fato de que a análise da competência dos conhecimentos construídos por um aprendiz deve pautar-se no processo e não apenas no resultado.

Existem alguns termos que podem ser entendidos como conceitos principais da TCC, tais como os de *situação*, *conceitualização*, *esquemas*, *invariantes operatórios*, *representações*, dentre outros. Como esses conceitos estão intrinsecamente relacionados, muitas vezes, ao fornecermos esclarecimentos a respeito de cada um deles, é inevitável mencionar outro conceito ao mesmo tempo.

### 3.2 CONCEITUALIZAÇÃO, SITUAÇÃO E ESQUEMAS

Para iniciar as abordagens referentes à TCC, primeiro precisamos esclarecer o termo *conceitualização*, que corresponde à compreensão almejada por meio dessa teoria. Esse termo está relacionado à capacidade de o indivíduo formular conceito ou ideia sobre algo. De maneira mais ampla, Vergnaud (2008, p. 40) define conceitualização como “a identificação dos objetos do mundo, de suas propriedades, relações e transformações, quer esta identificação resulte de uma percepção direta ou quase-direta, ou de uma construção”, portanto, essa identificação precisa ser entendida em dois vieses: no da percepção, que permite o acesso direto ou quase direto às propriedades e relações de objetos físicos; e no da construção imaginária,

que engloba desde a evocação de objetos ausentes até a elaboração de conceitos científicos e objetos abstratos (como os matemáticos).

Na TCC, considera-se que o ensino e a aprendizagem em uma disciplina são dependentes do domínio de conhecimento implicado e, por isso, “se delimita a análise da atividade a classes de situações tão bem registradas quanto possível” (VERGNAUD; MOREIRA, 2017, p. 18).

Visando esclarecer a ideia de *situação* segundo a TCC, Brousseau (2008, p. 35) define que “uma situação é uma organização das condições, um sistema específico de um conhecimento, cujo estudo é necessário para acompanhar e justificar o estudo dos comportamentos e das aquisições”. Em outras palavras, uma situação pode ser entendida no sentido de um conjunto de tarefas progressivamente mais complexas referentes aos conhecimentos específicos a um campo conceitual e que, referindo-se ao contexto educacional, precisam ser organizadas e propostas pelo professor de modo a se caracterizarem como condições para que o estudante estruture suas ações, elabore esquemas de pensamento e atinja níveis cada vez mais elevados de conceitualização (VERGNAUD, 2017).

Quanto aos esquemas de pensamento, esse é um dos conceitos característicos da TCC e que foi herança das ideias de Piaget. São denominados de *esquemas* os agrupamentos estruturados de conhecimentos que são organizados na memória de longa duração, os quais compreendem conceitos, habilidades, regras, generalizações, entre outros (BZUNECK, 1991).

Para Vergnaud (2008), esse conceito de esquema traz em si, ao mesmo tempo, a ideia de familiaridade e a de novidade, pois a experiência é constituída por situações frequentes, mais ou menos familiares a outras já vivenciadas, e há possibilidades de enfrentamentos de novas situações.

As situações caracterizam a dinamicidade dos esquemas, que podem ser, por exemplo, modificados ou combinados para atender a determinadas situações. Ao nos depararmos com novas situações recorreremos, inicialmente, ao repertório de esquemas que já construímos em situações familiares e, dessa forma, é possível que esses esquemas nos ajudem com a nova situação ou nos conduza a enganos e erros. Contudo, tendo esses esquemas prévios como ponto de partida, e identificando ou descobrindo novos aspectos da situação enfrentada, tais esquemas são recombinações, substituídos ou modificados de modo a nos permitirem chegar, no mínimo, a uma solução provisória, mais ou menos condizente para solucionar a

situação. É essa dinâmica que caracteriza os esquemas como elemento central na adaptação<sup>1</sup> e no desenvolvimento.

Embasado em ideias piagetianas, Vergnaud (2008) defende que estudantes só aprendem quando são desestabilizados, ou seja, quando a eles são propostas novas situações, pois estas apresentam um duplo caráter, sistemático e oportunista<sup>2</sup>, que são dois aspectos fundamentais do pensamento. No entanto, essa desestabilização tem um limite, pois as situações propostas não podem ser totalmente inéditas para o estudante, mas devem permitir a mobilização de esquemas já construídos em situações familiares.

Cada situação de um sistema carrega em si problemas mais ou menos complexos a respeito de um determinado conhecimento, sendo a complexidade qualificada de acordo com o esquema de pensamento que lhe é associado (BROUSSEAU, 2008). Todos aqueles problemas que pertencem a uma mesma classe podem ser identificados e resolvidos da mesma maneira, ou seja, evocando o mesmo esquema de pensamento. Diante de situações compostas por novos problemas, primeiramente, o estudante tentará utilizar os esquemas que já possui, porém, perceberá a necessidade de modificá-los, recombina-los, substituí-los ou construir outros novos. Aqui reside a aprendizagem, ou seja, na adaptação.

Duas ideias principais estão envolvidas nessa dinâmica anteriormente descrita, a de variedade e a de historicidade. A primeira diz respeito à existência de uma variedade de situações distintas em um mesmo campo conceitual, com níveis de complexidade diferentes entre si. A ideia de historicidade compreende o fato de que os conhecimentos dos estudantes se acomodam às situações que se deparam de maneira progressiva, tendo por ponto de partida esquemas já construídos e evocados em situações familiares.

Diante do exposto, fica evidente porque, dentre os aspectos da TCC, Vergnaud (2017) considera que o de *situação* deve ser o de maior interesse para o professor. Afinal, é seu papel organizar situações compostas por diversificadas tarefas progressivamente mais complexas, uma vez que as diversas operações de pensamento emergem a partir dos problemas que os estudantes enfrentam e, tais

---

<sup>1</sup> O conceito de *adaptação* também é herdado da teoria de Piaget e, segundo Vergnaud (2017, p. 25), "Adaptação é a modificação que resulta da vivência de uma situação".

<sup>2</sup> O termo *oportunista* nesse contexto é entendido "No sentido de que tira partido das circunstâncias, para utilizá-las da melhor forma possível" (VERGNAUD, 2008, p. 15).

operações de pensamento, constituem-se como o centro do processo de conceitualização.

Nesse direcionamento, Vergnaud (2008) esclarece que o primeiro passo na mediação do professor é definir situações a serem propostas aos estudantes. Assim, frente às propostas de situações, o estudante, em atividade, terá a oportunidade de desenvolver esquemas de pensamento adaptados à tais situações. E, para o autor, “uma situação, um objeto, um enunciado ou uma palavra têm sentido para um aluno, na medida que este consegue evocar um ou vários ‘esquemas de pensamento’, quer sejam oportunos ou não” (VERGNAUD, 2008, p. 28).

Todo esse processo precisa ser mediado pelo professor. Essa concepção de mediação tem raízes em conceitos de Vygotsky, pois tem por base a teoria de zona de desenvolvimento proximal (ZDP) que, de acordo com Vergnaud (2017), considera o fato de que para o estudante ou grupo de estudantes que se encontram em um certo nível de desenvolvimento, deve-se conhecer as situações que podem ser propostas para eles acessarem um nível mais próximo de desenvolvimento, evoluindo gradualmente seus esquemas de pensamento. Para isso, a mediação do sujeito mais *expert* precisa atuar o que, em geral, é papel do professor.

Considerando o processo educacional em Matemática e Ciências, a aprendizagem do estudante depende, dentre outros fatores, da resolução de situações-problemas, não no sentido dos tradicionais problemas matemáticos, mas no de propor diversificadas situações que oportunizem ao estudante adaptar-se. Mas, afinal, o que é considerado como *problema* na TCC? Vergnaud (2017) explica que a definição de problema é muito relativa, pois o que é problema para uma pessoa pode não ser para outra.

Um problema é entendido, de maneira ampla, como “toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução” (VERGNAUD, 1990, p. 52). Em outras palavras, um problema apenas assim será entendido quando o estudante ainda não sabe tratá-lo e resolvê-lo, mas é capaz de atribuir algum sentido (VERGNAUD, 2017) e, para tratar e resolver um problema, o estudante deverá realizar descobertas, o que pode acontecer por conta própria, porém, na maioria das vezes, com o auxílio de outra pessoa mais *expert*. Por conta própria, suas descobertas serão pautadas em conhecimentos por ele já construídos em outras situações familiares a que ele estará lidando no dado momento.

Ao propor um problema, Vergnaud (2017) adverte que dois fatores devem ser considerados: o que é importante de ser aprendido a respeito de um conceito e, assim, ponderar que problemas são fundamentais para essa apreensão; e, em que ponto o estudante se encontra em relação ao conhecimento que se espera que ele construa, ou seja, é necessário identificar quais são os conhecimentos prévios do estudante em relação ao novo conhecimento. A essencialidade de inferir conhecimentos prévios de estudantes está relacionada à noção de esquemas de pensamento.

Conforme já mencionado, como Piaget, Vergnaud considera que a ideia de adaptação tem um papel relevante no processo de conceitualização. Na TCC, considera-se que o aprendiz se adapte às situações e que, precisamente, são seus esquemas que se adaptam às novas situações, ou seja, as formas de organização da atividade (ou operações de pensamento) do aprendiz são modificadas quando ele enfrenta novas situações (VERGNAUD; MOREIRA, 2017).

Nesse sentido, na TCC, é feita alusão à dupla teórica situação/esquema, que envolve conceitos tão conexos entre si que faz com que seja muito difícil falar a respeito de um deles sem mencionar o outro, esclarecendo os motivos pelos quais não foi possível separarmos as explicações a respeito de *situações* e de *esquemas* nas abordagens anteriores.

A conceitualização sempre se encontra no fundo da ação (VERGNAUD; MOREIRA, 2017) e é a organização dessa ação que conduz a uma generalização da definição de *esquema* para a de “uma organização invariante da conduta diante de uma classe de situações dadas” (VERGNAUD, 2017, p. 18). Isso significa que, para situações de uma mesma classe, um ou vários esquemas são evocados e, até mesmo, combinados entre si. A possibilidade de diversificados esquemas serem direcionados a uma mesma classe de situações consiste na afirmação de que eles não são estereótipos, pois o que é invariante é a organização da ação e não o comportamento observável (VERGNAUD; MOREIRA, 2017), uma vez que o comportamento, ou ainda, a sequência de ações, depende das variáveis da situação.

A definição de *esquema* na TCC abrange quatro componentes: i) meta, sub-metas e antecipações; ii) regras de ação, de busca de informações e de controle; iii) invariantes operatórios; e, iv) possibilidades de inferência. Na explicação de cada um

desses componentes, começamos pelo segundo, pois entendemos que o esquema é gerado a partir de regras de ação, de busca de informações e de controle.

Quanto ao componente (ii), a organização da conduta de um sujeito em situação é formada pela ação, porém, depende também de buscas de informações necessárias para dar sequência às suas ações, bem como depende de regras de controle para que possa certificar-se a respeito da decisão que tomou e dos efeitos esperados ao tomar um determinado caminho. Entretanto, relativo ao componente (i), essas regras são dependentes de metas que se pretende alcançar e que “se divide em sub-metas, ordenadas sequencialmente e hierarquicamente, dando origem a numerosas antecipações” (VERGNAUD; MOREIRA, 2017, p. 33).

Associados às duas primeiras componentes e, certamente, considerado como o conceito central na ideia de esquema, estão os *invariantes operatórios*, componente (iii), constituídos por *conceitos-em-ação* e *teoremas-em-ação*. Os conceitos-em-ação são responsáveis por captarem as informações pertinentes de uma situação e por selecionar ou elaborar os teoremas-em-ação, que permitirão avaliar as regras de ação, informação e controle, que possibilitem alcançar as metas almeçadas (VERGNAUD; MOREIRA, 2017).

Por fim, o componente (iv), possibilidades de inferência, está diretamente relacionado à ideia de que o esquema não é um estereótipo, no sentido de que não existem formas absolutas de organização da ação. Precisamente, essa componente corresponde às distintas possibilidades de raciocínio que permitem determinar as regras e antecipações a partir das informações e dos invariantes operatórios que o sujeito dispõe (MOREIRA, 2002).

A afirmação de que o esquema é composto por quatro componentes, objetivos, regras, invariantes operatórios e inferências, fornece aos pesquisadores e professores, respectivamente, elementos essenciais para o desenvolvimento de categorias de análise e de procedimentos metodológicos. Muniz (2009) afirma que tais elementos auxiliam a descrever e compreender o pensamento dos estudantes em situação, pois revelam indícios de esquemas evocados em suas atividades, o que acontece por meio de representações, que discutiremos mais adiante.

### 3.3 INVARIANTES OPERATÓRIOS

A ideia de invariante operatório tem papel central na composição dos esquemas. Por esse motivo, se faz necessário fornecer maiores esclarecimentos a respeito de seus constituintes, os *conceitos-em-ação* e os *teoremas-em-ação*.

A denominação desses elementos se deve ao fato de a TCC defender que conceitos e teoremas são considerados diante da atividade em situação e, por isso, em ação. Como já foi mencionado, a construção do conhecimento é adaptação e caracteriza-se como um processo antes de ser um produto, o qual precisa ser analisado em termos de situação/esquema (VERGNAUD, 2008). Nesse processo, ocorrem filiações e rupturas entre conceitos complementares, sejam eles de ordem científica ou cotidiana. Como não há conceito sem teorema, assim como não há teorema sem conceito, se faz necessário distingui-los, uma vez que, segundo Vergnaud (2008, p. 51), “em um cálculo de inferências, encadeiam-se proposições e não somente conceitos ou associações de conceitos”.

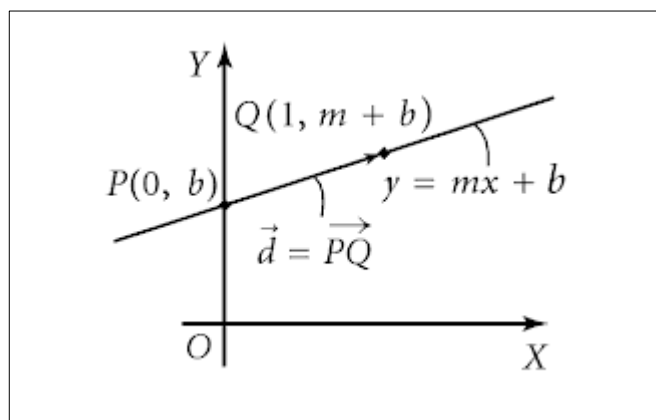
Um *conceito-em-ação* é um conceito considerado pertinente pelo sujeito em situação e é responsável pela identificação de objetos, propriedades e relações. Vale recordar que a referência aos objetos na TCC abrange os que são materiais, acessíveis diretamente ou quase diretamente à percepção, bem como os que são abstratos, construídos culturalmente, cientificamente ou, até mesmo, pelo próprio sujeito em aprendizagem (VERGNAUD; MOREIRA, 2017).

Um *teorema-em-ação* é definido como uma proposição que é considerada verdadeira na ação diante de uma situação, podendo assim ser avaliado para uma situação específica ou universalmente para uma classe de situações (VERGNAUD; MOREIRA, 2017). Vale destacar que a veracidade ou falsidade do teorema-em-ação é relativa, pois um teorema-em-ação falso pode ser considerado pelo estudante como um teorema-em-ação verdadeiro durante sua atividade, ou seja, ao interpretar e tentar resolver uma situação, conduzindo-o ao erro.

Bittar (2009) fornece o exemplo de teoremas-em-ação falsos construídos por estudantes em aprendizagem de vetores diretores de uma reta dada. A autora afirma que definições fornecidas por alguns livros e professores em sala de aula não esclarece que um representante de um vetor tem a mesma direção da reta dada, de modo que possa existir uma infinidade de vetores diretores dessa reta. Isso porque uma representação geométrica que é fornecida para a definição de vetores diretores

de uma reta consiste em um vetor diretor exatamente sobre essa reta, conforme ilustra a figura a seguir:

**Figura 2** – Definição de vetor diretor de uma reta



Fonte: Nicholson (2014, p. 141)

Na figura 2, temos a representação geométrica para a definição de vetor diretor de uma reta, conforme fornecida pelo autor:

[...] um vetor não nulo  $\vec{d}$  é chamado **vetor diretor** de uma reta se ele for paralelo à reta; isto é, se  $\vec{d}$  é paralelo a  $\overline{AB}$  para dois pontos distintos  $A$  e  $B$  da reta. Dessa forma, o próprio vetor  $\overline{AB}$  é um vetor diretor da reta, mas há muitos outros. Na verdade, todo múltiplo escalar não nulo de um vetor diretor é também um vetor diretor (NICHOLSON, 2014, p. 141, grifos do autor).

Ainda que o autor mencione a existência de muitos outros vetores diretores da mesma reta, a representação geométrica fornecida pelo autor conduz o estudante à construção do seguinte teorema-em-ação falso: *Se  $\vec{d}$  é um vetor diretor de uma reta  $\overline{AB}$ , então  $\vec{d}$  só tem representantes sobre essa reta* (BITTAR, 2009). Dessa forma, diante de situações que envolvam o conceito de vetor diretor de uma reta, o estudante poderá apresentar erros em suas resoluções por não reconhecer a ideia de classe de equivalência de vetores diretores para essa mesma reta.

Em suma, os conceitos-em-ação podem ser entendidos como os elementos que estão disponíveis para o sujeito e que podem ser identificados por ele em situação, tais como objetos, atributos, condições, relações etc., enquanto que os teoremas-em-ação são proposições subjacentes às ações do sujeito em situação. Deste modo,

[...] os conceitos-em-ação que possuímos permitem-nos identificar elementos conhecidos nas situações que enfrentamos e os teoremas-em-ação fornecem-nos as regras que vinculam esses elementos e que nos permitem resolver uma dada situação e agir em consequência (GRECA; MOREIRA, 2003, p. 54).

Um exemplo fornecido por Vergnaud (2008) para diferenciar teorema-em-ação e conceito-em-ação é a expressão  $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$ , que é uma proposição (teorema) verdadeira para quaisquer valores de  $x$  e de  $y$  pertencentes ao conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ). Quando utilizado pelo sujeito em situação, esse teorema pode ser entendido como um teorema-em-ação. Nesse exemplo, os sinais das operações e as variáveis  $x$  e  $y$ , de maneira isolada, são conceitos que não podem ser considerados como verdadeiros ou falsos, mas apenas como pertinentes ou não para a situação. Os conceitos identificados e utilizados pelo sujeito diante de uma situação são considerados como conceitos-em-ação.

Os invariantes operatórios permanecem, em geral, implícitos, sendo os principais responsáveis por orientar o desenvolvimento de competências (forma operatória do conhecimento) ao enfrentar determinada situação. Essa é a forma de conhecimento predominante e que antecede a forma predicativa (saber explicitar). Assim, apenas quando são explicitados, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem se tornar verdadeiros conceitos e teoremas científicos, pois, dessa forma, será possível discutir suas pertinências e veracidade, respectivamente.

Diante das exposições realizadas, fica evidente que a aprendizagem de estudantes, segundo a TCC, não depende simplesmente de explicações claras e organizadas de um professor que apresenta boa didática e domínio de conteúdo, mas de situações que contribuam para que os conceitos envolvidos sejam compreendidos pelo estudante. Dessa forma, para selecionar e organizar as situações mais adequadas a serem propostas, de acordo com os objetivos educacionais almejados pelo professor e balizados pelo currículo, a análise de invariantes operatórios de estudantes se faz necessária.

Essa análise auxilia na identificação de dificuldades de aprendizagem do estudante. Afinal, muitas vezes, ele é capaz de mobilizar determinados invariantes operatórios que o conduzem à solução para uma situação, porém, que não funcionam com sucesso em outra situação de mesma classe, apenas ligeiramente diferente da primeira (BITTAR, 2009). Por exemplo, referente ao conteúdo de adição

de números naturais, não é trivial para a criança reconhecer o uso dessa mesma operação para diferentes classes de enunciado que podem envolver ideias de acrescentar, tirar, juntar ou comparar. Assim, mesmos invariantes operatórios podem não ser mobilizados para essas distintas classes de adição de números naturais ou podem não funcionar com sucesso em todas elas.

Diante dessa situação, há indicativos de que os invariantes operatórios mobilizados pelo sujeito ainda não são os científicos, contudo, são essenciais para que ocorra a conceitualização. A partir do confronto com várias situações em que, em um primeiro momento, recorre-se aos esquemas prévios para tratar e solucionar tais situações, porém sem sucesso, que a dinâmica relacionada à adaptação ocorre, pois dessa forma, o estudante sentirá a necessidade de reformular, substituir ou construir novos esquemas para que seja possível ter sucesso no tratamento e resolução das situações que enfrenta. No caso de construção de novos esquemas, será necessário apoiar-se nos conhecimentos por ele já construídos em outras situações previamente enfrentadas.

Bittar complementa que “quando um aluno resolve uma atividade, que está incorreta, mas acredita tê-la feito corretamente, ele assim o acredita não por acaso, sem razão. Há algum tipo de controle que permitiu a ele decidir pelo caminho e conclusões que chegou” (BITTAR, 2009, p. 75). Portanto, para compreender o que conduz o estudante ao erro, é necessário identificar e compreender quais invariantes operatórios falsos são mobilizados e tentar entender quando e o porquê de serem mobilizados. A partir do momento em que identifica e compreende as dificuldades do estudante, torna-se possível buscar alternativas e, assim, propor situações que contribuam para a desestabilização de concepções equivocadas.

Entretanto, o processo de explicitação de invariantes operatórios não é trivial para o sujeito, mas indícios deles podem ser manifestados a partir de linguagem verbal, oral ou escrita, bem como a partir de outros sistemas semióticos, tais como, gráficos, expressões algébricas, diagramas, gestos entre outros (VERGNAUD, 2009b). A menção a *indícios* corresponde ao fato de que existem lacunas entre aquilo que é representado mentalmente pelo estudante e aquilo que está subjacente à sua conduta, com aquilo que o signo<sup>3</sup> representa.

---

<sup>3</sup> Nesta tese, entendemos *signo* como aquilo que representa algo para alguém, ou seja, como um substituto ou representante de um objeto (PEIRCE, 2000).

### 3.4 REPRESENTAÇÃO

Apoiada em ideias de Vygotsky a respeito de signo, bem como em defesas de Saussure em reverência à significado (conceito) e significante (parte material do signo), a TCC considera que esses conceitos são indissociáveis e que existem numerosas relações entre eles e, também, entre os signos (VERGNAUD, 2017). Além disso, na TCC, defende-se que a relação entre significado e significante pode, gradativamente, ser refinada na medida em que o estudante tenta explicitar seus invariantes operatórios a partir do enfrentamento de diversificadas situações e da mediação do outro, como do professor.

Utilizamos o exemplo a seguir para ilustrar a distinção entre significado e significante na concepção de Vergnaud, fundamentado em ideias de Saussure e de Vygotsky. Consideramos a expressão matemática que representa as relações entre força, massa e aceleração:  $|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$ . De maneira simples, um sujeito pode ler esta expressão como: *a determinação do módulo da intensidade da força, quando se conhece a massa de um corpo sobre o qual é aplicada essa força e o módulo da aceleração adquirida pelo corpo.*

A mesma fórmula também pode ser lida de maneira indireta como *o cálculo da massa de um corpo, quando conhecemos os módulos da intensidade da força aplicada e da aceleração adquirida pelo corpo* ou, ainda, *o módulo da aceleração adquirida pelo corpo, quando se conhece o módulo da intensidade da força aplicada e a massa do corpo.* Mas, também, de maneira mais sofisticada, a mesma fórmula pode ser lida como *o módulo da intensidade da força é proporcional à massa do corpo quando o módulo da aceleração permanece constante e proporcional ao módulo da aceleração quando a massa se mantém constante.*

Dentre as diferentes leituras conceituais (significados) apresentadas para a mesma expressão (significante), é a última que revela a razão fundamental da expressão. Todavia, para que o estudante alcance, sobretudo, a compreensão da última leitura, são necessárias categorias de pensamento específicas que não dependem apenas de sistemas de signos, mas de conceitualização ligada ao enfrentamento de situações diversas. E, como fora abordado, a escolha de situações a serem propostas tendo em vista a conceitualização depende que o professor investigue indícios de conhecimentos construídos pelo estudante.

Com base em estudos no campo da Linguística, Vergnaud se interessou e incorporou em sua teoria a função das representações simbólicas na conceitualização. Vergnaud (2008) defende que sem diferentes sistemas de representação não seria possível a realização de construções conceituais, tampouco seria possível a um observador externo identificar indícios dessas construções. O autor defende, ainda, que as representações são imprescindíveis em todas as etapas que envolvem a conceitualização e que elas são fundamentais para a organização da forma operatória do conhecimento e, igualmente, para a sistematização da forma predicativa do conhecimento.

Para melhor compreender a ideia de representação, Vergnaud (2009b) fornece três definições. A primeira diz respeito ao fluxo de pensamento que resulta da interiorização de imagens oriundas dos sentidos, ou seja, da percepção e da ação, além das imagens puramente imaginárias. Segundo o autor,

Esse fluxo permanente de percepções, de ideias, de imagens, de gestos e de palavras interiorizadas é uma característica essencial do pensamento, que ela [ação interiorizada] conduz a considerar a percepção como parte integrante da representação (VERGNAUD, 2009b, p. 24).

No entanto, Vergnaud (2009b) atribui maior relevância a outras duas definições da representação. Pela segunda definição, a representação contempla sistemas de objetos e de predicados pertinentes que podem ser identificados e utilizados pelo sujeito em sua atividade. A partir dessa definição, afirma-se que os invariantes operatórios são elementos essenciais das representações, pois produzimos representações da realidade computáveis para nossas ações e verbalização, podendo ser representações erradas ou corretas, completas ou incompletas, explícitas ou implícitas. Tudo isso permite caracterizar representações como teoremas-em-ação, ou seja, como proposições que podem ser consideradas como verdadeiras por aquele que representa (VERGNAUD, 1998).

A terceira definição para o termo *representação* diz respeito às relações significantes/significados na linguagem verbal e, também, em outros sistemas simbólicos, os quais, por sua vez, possuem raízes históricas e culturais, ou seja, são “desenvolvidos pelas sociedades humanas ao longo da história, para representar os conhecimentos tidos como verdadeiros, comunicar suas intenções e sustentar seus processos de pensamento” (VERGNAUD, 2009b, p. 25). Entretanto, ainda que a linguagem verbal e os sistemas simbólicos tenham origem em um determinado

contexto histórico-cultural, as interpretações não são exatamente as mesmas para diferentes sujeitos, pois tais interpretações dependem dos invariantes operatórios próprios, construídos por cada pessoa.

Esclarecemos que nessa tese compreendemos as três definições das representações como complementares, de modo que: i) abarcam a interiorização de imagens de natureza abstrata (como as imaginárias) e oriundas da percepção de objetos concretos; ii) contemplam conceitos, elementos, relações, entre outros, que são pertinentes e que podem ser identificados e utilizados pelo sujeito em situação, constituindo invariantes operatórios; e, iii) uma mesma representação permite interpretações distintas, as quais variam de acordo com conhecimentos e concepções do sujeito.

Diante das definições apresentadas, evidencia-se que a ideia de representação na TCC é muito ampla, pois, muito além de abranger conceitos e formas simbólicas, as representações têm papel fundamental na ação do sujeito em situação e, para cumprir com essa função, tais representações precisam ser homomórficas<sup>4</sup> ao que representam. Isso acontece, apenas, para alguns aspectos do seu referente, ou seja, representações não representam fielmente toda o referente, mas são simplificações deste que “funcionam como substitutos computáveis da realidade” (MOREIRA, 2002, p. 25).

O conceito de homomorfismo tem como base a ideia de que não há *reflexo* do referente, mas uma correspondência entre referente e símbolo. Vergnaud (2008, p. 23) assinala que “mesmo que a representação não seja a realidade [o referente], só é suficiente que lhe seja homomorfa para alguns aspectos, a fim de que ela possa cumprir a sua função de cálculo sobre o real, particularmente na ação”. Assim, Vergnaud (2008) defende que há uma correspondência entre dois sistemas, o sistema dos significantes (associado à representação) e o sistema dos significados (associado às interpretações sobre a representação), e essa correspondência não precisa, necessariamente, ser absoluta, mas apenas para alguns aspectos, o que já torna eficiente a compreensão e a comunicação.

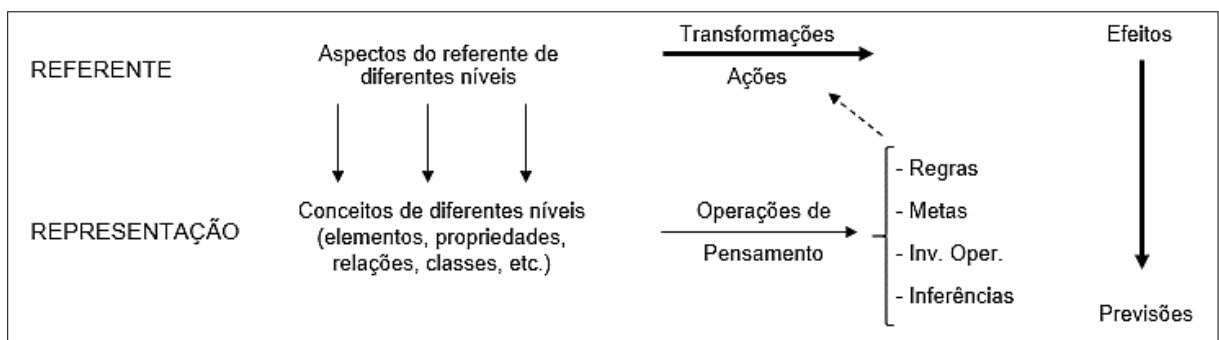
---

<sup>4</sup> Homomorfismo é um termo matemático que corresponde a “uma aplicação de um conjunto em um outro que respeita certas estruturas relacionais do conjunto de partida e do conjunto de chegada” (VERGNAUD, 2009a, p. 297). Esse termo é utilizado por Vergnaud, em sua teoria, para fazer referência à ideia de que a representação não corresponde fielmente ao que representa, ou seja, não é idêntica ao seu referente, mas respeita certas características deste.

Para Vergnaud (2009a), a ideia de homomorfismo primeiro se aplica à passagem do referente para a representação. Afinal, a representação só se prezará à forma operatória do conhecimento se refletir aspectos da realidade de maneira pertinente e homomorfa. Contudo, a ideia de homomorfismo entre referente e representação não implica afirmar que esta reflita fielmente aquela, mas que aspectos do referente precisam estar evidentes na representação para que seja possível identificá-lo, de modo que a representação se caracteriza como “um instrumento de simulação [...], um meio de prever os efeitos reais e de “calcular” as ações a serem executadas, para provocá-las ou evitá-las” (VERGNAUD, 2009a, p, 299).

Sobretudo na Matemática e na Física (uma vez que esta última apresenta uma relação com aquela que vai muito além do seu uso como linguagem), a utilização de representações é fundamental para a forma operatória e para a predicativa do conhecimento, devido ao excesso de conceitos abstratos que abrangem, não sendo os conceitos acessíveis se não por meio de representações. É exatamente essa função dialética da representação que é apresentada no seguinte esquema:

**Figura 3** – A representação e sua relação com as formas operatória e predicativa do conhecimento



Fonte: adaptado de Vergnaud (2009a, p. 299)

Nesse esquema, estão caracterizados os principais elementos envolvidos no processo de conceitualização, partindo da relação entre representação e referente. Primeiro, é preciso compreender que, no contexto educacional, o referente corresponde às situações que serão propostas ao estudante. Do referente serão evidenciados e/ou inferidos diferentes aspectos, selecionando elementos,

propriedades, relações, etc., que forem considerados pelo estudante como relevantes para tratar a situação. Com base nessas características do referente, o estudante construirá suas primeiras representações mentais e são essas características que fazem com que tais representações sejam homomorfas, pelo menos em alguns aspectos, ao referente.

Dá-se início, nesse momento, às operações de pensamento, ou seja, à mobilização de esquemas de pensamento que são compostos por regras, metas, invariantes operatórios e possibilidades de inferências, que serão responsáveis pela parte operatória do conhecimento, em que são evidenciadas as ações e transformações do estudante sobre a situação que enfrenta, permitindo-o realizar previsões a partir da análise dos efeitos obtidos com suas ações. Vale ressaltar que só o fato de informações pertinentes serem selecionadas para a construção da representação já caracteriza que são os invariantes operatórios os responsáveis pelo processo de construção das representações mentais “na medida em que determinam os elementos da situação que resultam relevantes para o sujeito (ou seja, os elementos da situação que devem ser representados) e as propriedades que sobre eles podem ser aplicadas” (GRECA; MOREIRA, 2003, p. 58).

A forma predicativa do conhecimento corresponde à explicitação, por parte do estudante, dos procedimentos envolvidos nesse processo e explicação dos motivos que o conduziram a optar por tais caminhos. Tais explicitações são realizadas por meio de sistemas semióticos, especialmente, por meio de linguagem verbal, oral ou escrita.

Então, são necessárias diversificadas situações referentes ao mesmo conceito, que contenham propriedades e elementos distintos, mas também comuns entre si, de maneira a se complementarem sem redundâncias, para que representações possam ser construídas e, aos poucos, aprimoradas pelo estudante. Isso o conduz, gradativamente, à forma predicativa do conhecimento. Tal entendimento fundamenta-se, sobretudo, nas afirmações de que

1. Não existe uma representação, mas múltiplas representações, de formas diferentes e de níveis diferentes.
2. Existem homomorfismos não somente entre a realidade [ou referente], de um lado, e as representações, de outro, mas também entre as diferentes formas de representação (entre representação em imagem e a linguagem, entre representação geométrica e representação algébrica, etc.) (VERGNAUD, 2009a, p. 300).

Precisamente, Vergnaud (2009a) afirma haver vários sistemas simbólicos envolvidos nas operações de pensamento que apresentam relações entre si e, ao mesmo tempo, relações com o referente. Diante do exposto, o autor destaca que o pensamento não consiste, apenas, em passar do referente para a representação, “mas em passar de uma representação à outra e a ela retornar” (VERGNAUD, 2009a, p. 301), de maneira simultânea e oportuna, cuja passagem depende de invariantes operatórios.

Para Vergnaud (2009a), de maneira mais geral, todos os meios utilizados pelo estudante ao lidar com determinada situação, isto é, todas as suas estratégias e procedimentos para atingir um determinado objetivo, têm raízes profundas na representação feita da situação, ou seja, na representação que ele faz das percepções, das relações e das propriedades evidenciadas ou inferidas a partir da situação. Essa representação é mental e é, ao mesmo tempo, organizadora e produto dos invariantes operatórios e esquemas, responsáveis pelo conhecimento operatório do estudante. Apenas parte dessa representação mental é comunicável a um observador externo a partir de indícios manifestados por meio de sistemas semióticos, como a linguagem verbal, a qual é mais difícil para o estudante e corresponde à forma predicativa do conhecimento. Por isso, o

[...] símbolo é a parte diretamente visível do *iceberg* conceitual; a sintaxe de um sistema simbólico é apenas a parte diretamente comunicável do campo de conhecimento que ele representa. Essa sintaxe não seria nada sem a semântica que a produziu, isto é, sem a atividade prática e conceitual do sujeito no mundo real (VERGNAUD, 2009a, p.19).

Para que a representação seja funcional para a conceitualização, ela precisa, necessariamente, contemplar dois critérios. O primeiro, de ordem semântica, diz respeito ao ato de refletir aspectos do referente de modo a ser identificável na representação. O segundo, de ordem sintática, diz prestar-se às operações em situações diversas (VERGNAUD, 2009a). Para ambos os casos, os invariantes operatórios se fazem presentes como condições que permitem que o ato de refletir e operar ocorram. Diante disso, reafirma-se que a representação é organizadora e reguladora da ação e da percepção, assim como é, ao mesmo tempo, produto da ação e da percepção (VERGNAUD, 2009c).

Em suma, boa parte dos processos envolvidos na conceitualização permanece implícita, subjacente à ação do sujeito em situação. A parte visível, explicitada, em geral, por meio de representações diversas, constitui apenas indícios

da produção interna do sujeito. No entanto, Muniz (2009) esclarece que a identificação, a descrição e a análise dessa atividade, o que demanda muito esforço interpretativo e inferências, são etapas essenciais para que o professor conceba mediações no processo de aprendizagem de seus alunos, bem como para que o pesquisador estabeleça categorias de análise referentes à aprendizagem.

O autor afirma, ainda, que uma boa alternativa para minimizar as dificuldades de compreensão da conceitualização de um estudante é solicitar a ele que tente explicar suas próprias produções. Concomitantemente, essa solicitação é virtuosa para a aprendizagem do sujeito, pois permite a ele “não só refletir como também tomar consciência dos caminhos e descaminhos que percorreu para produzir o procedimento” (MUNIZ, 2009, p. 50).

A maior parte da conceitualização acontece de maneira não consciente e, quanto à parte consciente, nem sempre ela é formulada e expressa. Aqui reside o fato de que pessoas em determinadas situações, escolares ou não, sabem fazer, mas não sabem expressar e que, geralmente, a forma operatória antecede a forma predicativa. Nesse contexto, “a passagem dessa forma prática de conhecimento para o pensamento se efetua através de tomadas de consciência” (PIAGET, 1978, p. 10).

Na Física, por exemplo, é possível um estudante resolver corretamente um determinado problema proposto. No entanto, saber utilizar corretamente números, operações e expressões matemáticas para resolver esse problema não é o suficiente para afirmar que o estudante tem consciência e/ou saiba expressar o que fez e porquê o fez. Nesses tipos de situações, é comum que ele desenvolva primeiro o invariante operatório e, depois, o invariante predicativo, em que este último não é trivial e nem sempre é alcançado.

### 3.5 CAMPO CONCEITUAL E CONCEITO

Retomando ideias vygotskianas que embasam a TCC, o campo de experiência do sujeito, em qualquer faixa etária, compreende experiências cotidianas, mas também pode compreender experiências escolares e profissionais, dependendo da idade. Essas experiências não podem ser postas em dois domínios distintos, pois mesmos esquemas organizam uma e outra, sendo apenas as situações, ou seja, as condições que as diferem. Devido à impossibilidade de

analisar as competências desenvolvidas em diferentes e variados contextos é que a TCC defende a necessidade de delimitar objetos de estudo em campos particulares, os chamados *campos conceituais*. Cada um deles compreende uma variedade de situações e de conceitos, uma vez que não é possível desenvolver um conceito a partir de uma única categoria de situações, assim como não é possível analisar uma situação a partir de um único conceito (VERGNAUD; MOREIRA, 2017).

Determinado campo conceitual pode, progressivamente, ser dominado por um aprendiz. Entretanto, tal domínio pode demandar muito tempo e não é determinístico para todos os aprendizes. O certo é que, em se tratando de ensino, a ação mediadora do professor é imprescindível para o domínio de um campo conceitual (por exemplo, nessa tese, contemplaremos o domínio de composição vetorial de forças, pertencente ao campo conceitual da Mecânica). Por meio da mediação, o professor pode auxiliar o estudante a desenvolver o seu repertório de esquemas e de representações (MOREIRA, 2002), selecionando cuidadosamente situações diversas e propondo-as oportunamente aos estudantes.

A partir da apresentação dos principais elementos da TCC realizada até esse momento, evidenciamos que todos remetem às ideias de conceito e de conceitualização. Já esclarecemos o termo *conceitualização*, o qual está relacionado à capacidade de o sujeito formular conceito ou ideia a respeito de algo e quanto ao entendimento de conceito segundo a TCC? Visando tornar compreensível a ideia de conceito, Vergnaud (2008) o define como um tripé de três conjuntos: das *situações*, que são responsáveis pela atribuição de sentido ao conceito; dos *invariantes operatórios*, que têm por função estruturar os esquemas de pensamento associados a tais situações; e, das *representações linguísticas e simbólicas*, que permitem representar conceitos e suas relações, bem como os esquemas evocados em situações.

Um dos conceitos contemplados nessa tese é o de força resultante, que para ser compreendido depende: i) de situações diversas em que seja evidenciado de maneira progressivamente mais complexa; ii) de mobilização de invariantes operatórios para identificação de elementos desse conceito, presentes nas situações, e estabelecimento de regras para vincular esses elementos e buscar soluções às situações; e iii) de representações para representar, compreender e expressar compreensões construídas a respeito do conceito.

Essa relação triádica indica que

Não há formação de verdadeiros conceitos, de explicitação, sem que apareçam situações que o estudante deva resolver e não há resolução de problemas sem que se coloquem em jogo os invariantes operatórios (que são a parte oculta do *iceberg* da conceitualização) e as representações simbólicas que, junto com as situações em si, formam a tríade necessária para a formação de conceitos (GRECA; MOREIRA, 2003, p.60).

Destacamos que, nesse tripé, o conjunto das *situações* é considerado no plural porque uma só situação é insuficiente para a compreensão de um conceito e de suas propriedades. Por isso, é necessário compreender que a conceitualização pode ser um processo longo, pois depende de encontros e reencontros, de filiações e de rupturas entre diversas situações distintas, o que a caracteriza como um processo de adaptação. Nesse direcionamento, considerando que os invariantes operatórios estão relacionados às situações, é evidente que propriedades do conceito não são as mesmas e nem apresentam mesmo grau de complexidade nas diferentes classes de situações. Por consequência, também há referência a um conjunto de invariantes operatórios na TCC. Da mesma forma, palavras e símbolos não são unívocos, no sentido de que não têm um mesmo significado ou interpretação nas diferentes situações e, por isso, também devem ser considerados em pluralidade.

Greca e Moreira (2003) elucidam que o conhecimento é organizado em campos conceituais constituídos por conjuntos de situações e problemas. O domínio de ambos, por parte do sujeito, depende de muito tempo, tratamento e análise que requerem diversos conjuntos de conceitos, de procedimentos e de representações relacionados entre si. Durante o longo processo de apropriação desses campos conceituais, os estudantes vão construindo concepções e competências. Estas últimas ficam atreladas à forma operatória do conhecimento, enquanto as concepções se atrelam à forma predicativa do conhecimento.

Enfim, a TCC fornece um quadro teórico que integra a relação entre os processos de curto e longo prazo, ou seja, de aprendizado em situação e de desenvolvimento cognitivo, que caracteriza a dialética que envolve a forma operatória e a forma predicativa do conhecimento, em termos de competência e esquemas de um lado, e de explicitações, de outro, bem como as atribuições de mediações linguísticas, simbólicas e de outras formas de mediações (PLAISANGE; VERGNAUD, 2003). Assim sendo, a TCC opõe-se à separação entre forma operatória e forma predicativa do conhecimento e defende que as dificuldades de

aprendizagem de estudantes estão atreladas às operações de pensamento necessárias para o estabelecimento pertinente entre informações de um determinado problema ou situação (GRECA; MOREIRA, 2003).

Na medida em que situações e problemas de um campo conceitual são propostos, o sujeito apropria-se do conceito, uma vez que serão essas situações e esses problemas que permitirão a ele abstrair as propriedades que constituirão seus conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, ou seja, os seus invariantes operatórios, responsáveis pela atribuição de significado ao conceito. Na medida em que esses invariantes operatórios passam a ser explicitados por meio de significantes, eles começam a se aproximar cada vez mais dos verdadeiros conceitos (GRECA; MOREIRA, 2003). Assim ocorre a conceitualização, a qual implica diretamente na aprendizagem.

A questão de o conhecimento envolver as formas operatória e predicativa do conhecimento implica no fato de elas serem complementares e necessárias para que ocorra a aprendizagem. Por exemplo, considerando o campo conceitual da Mecânica, quando o estudante é capaz de utilizar corretamente somente expressões matemáticas para determinação da aceleração de uma partícula ou para determinação da intensidade de uma força resultante exercida sobre um bloco, os procedimentos que ele apresenta não são suficientes para afirmar que ele compreende os conceitos envolvidos em tais procedimentos. Afinal, ele pode saber que elementos da situação proposta precisa considerar e que propriedades deve aplicar, porém talvez não saiba explicar o *porquê* e *como* os fazem. Nesse sentido, Greca e Moreira (2003) afirmam que cenários como esses podem indicar aprendizagem mecânica, em que o estudante utiliza conceitos apenas como instrumentos de sua ação, ou seja, apenas sua parte operacional.

Para que, de fato, ocorra aprendizagem, é necessário que o conceito como instrumento operacional se transforme em instrumento de pensamento e em conhecimento predicativo. Para isso, é imprescindível que o estudante seja capaz de explicar qualitativamente a situação, o problema que resolve, os procedimentos adotados e os resultados que obtém. Apenas quando o conceito se tornar instrumento de pensamento e conhecimento predicativo é que o estudante será capaz de aplicá-lo em outros contextos mais amplos que situações determinadas.

Em suma, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, há uma relação intrínseca entre forma operatória e forma predicativa do conhecimento, de modo que esta última

[...] é evidentemente essencial, justamente porque ela é explícita e pode ser compartilhada, mas um conhecimento que não é operatório não é verdadeiramente um conhecimento. É, pois, um trabalho essencial, para os pesquisadores, formular em termos científicos os conhecimentos utilizados na ação, sejam eles totalmente implícitos, até mesmo inconscientes. Entretanto, quando se trata da comunicação com os alunos, ou mesmo com certos ensinantes, pode-se colocar a questão das formas mais oportunas de expressão em palavras ou de expressão em símbolos (VERGNAUD, 2008, p. 53).

Portanto, compreendemos que a conceitualização abrange a forma operatória e a forma predicativa do conhecimento. E, apesar desta última desempenhar papel relevante para o desenvolvimento da forma predicativa ao permitir, de maneira mais direta, a comunicação e a representação de um objeto de estudo, reconhecemos que ela não diminui as atribuições de outras formas de representação.

Considerando as diferentes possibilidades de representação para um mesmo referente e suas atribuições para a aprendizagem, por conseguinte apresentamos referenciais teóricos em que nos embasamos para compreender o papel instrucional das representações para os processos de ensino em Ciências e Matemática e, sobretudo, para entender de que forma elas estão associadas aos processos de aprendizagem nessas áreas de estudo.

## 4 DIVERSIDADE REPRESENTACIONAL

Neste capítulo, apresentamos pressupostos teóricos a respeito de representações para os processos instrucional e cognitivo nos contextos educacionais científico e matemático.

No decorrer das abordagens, de maneira indiscriminada, contemplaremos registros, formas e modos representacionais, que entendemos como indissociáveis e, por isso, os integramos na linha de pesquisa denominada de *Diversidade Representacional*. O termo *registro* encontra-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2009a; 2009b; 2012), enquanto que *formas e modos representacionais* são denominações oriundas de referenciais que discutem Multimodos e Múltiplas Representações (LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; PRAIN; WALDRIP, 2006; entre outros), perspectivas teóricas que passamos a apresentar, respectivamente. As apresentações dessas duas perspectivas teóricas sustentam as defesas e esclarecimentos subsequentes do que denominamos por Diversidade Representacional.

### 4.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Antes de iniciarmos as explanações a respeito da teoria dos Registros de Representação Semiótica, por Raymond Duval (2003; 2009a; 2009b; 2012), esclarecemos um termo que comumente será utilizado nas discussões seguintes, o de *objeto*. Tanto na Matemática quanto nas Ciências Naturais, muitos dos objetos estudados são conceitos, estruturas, propriedades e relações. Nesse sentido, destacamos que, no âmbito das Ciências Naturais, como na Física, a ideia de objeto remete à ideia de materialidade: não há Física sem objetos materiais (DEKENS, 2008). Já na Matemática, um objeto é compreendido como um ente abstrato de estudo como, por exemplo, os números e as funções, portanto, os objetos matemáticos “não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis” (DUVAL, 2003, p.14).

Trazemos a ideia de objeto matemático para essas discussões porque, ainda que reconheçamos as particularidades de ambas as áreas de conhecimento, a científica e a matemática, é indiscutível a existência de inter-relações entre elas, principalmente entre os conhecimentos físico e matemático, que podem ser

evidenciados em seus estudos históricos e epistemológicos, porquanto o conhecimento matemático é estruturante do pensamento físico, pois fornece sua linguagem e um conjunto de estruturas dedutivas, tornando possível a generalização de suas leis e princípios teóricos (PINHEIRO; PINHO-ALVES; PIETROCOLA, 2001). Por outro lado, constata-se, no desenvolvimento histórico da matemática, que ela se valeu de conhecimentos das ciências naturais para evoluir em suas leis e procedimentos e, portanto, muito além de contextualizar conceitos matemáticos a partir do fornecimento de problemas, os conhecimentos advindos das ciências naturais contribuíram nas soluções de problemas a partir de raciocínios e demonstrações, pautados em analogias e imagens que possibilitaram melhor entendimento a respeito de objetos abstratos (POINCARÉ, 1995).

Os objetos, no sentido em que nos referimos, são, em grande parte, abstratos e inacessíveis, direta ou instrumentalmente, à percepção. Logo, para tornar possível a apreensão desses objetos se faz necessário representá-los. Nessa perspectiva, concordamos com Damm (2008), a qual defende que somente com o auxílio de uma representação se torna possível mobilizar um conhecimento matemático e, nesse mesmo sentido, encontramos em Duval (2012, p. 268) que “[...] os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos ‘reais’ ou ‘físicos’. É preciso, portanto, dar representantes”.

Duval (2012) define e diferencia três tipos de representações: mentais, computacionais e semióticas. As *representações mentais* consistem um conjunto de imagens e de concepções que o sujeito possui acerca de um objeto, uma situação ou a respeito daquilo que está associado ao objeto ou situação e são, portanto, entidades psicológicas que têm relação com a percepção e que contemplam produções internas que, muitas vezes, não são comunicáveis diretamente para outra pessoa e que englobam imagens mentais, conceitos, ideias, crenças, valores, etc.

As *representações computacionais* são aquelas cujos significantes não requerem visão de objetos, ou seja, são representações não conscientes atreladas à codificação e às transformações algorítmicas da informação recebida por um sistema, de forma a produzir uma resposta adaptada de forma automática ou quase instantânea (DUVAL, 2012).

As *representações semióticas* são produções conscientes e externas, compostas por signos pertencentes a um sistema de representação que contém

inconvenientes próprios de significação e de funcionamento (DUVAL, 2012). Estas representações são passíveis de comunicação, pois são externas e conscientes. Todavia, suas atribuições vão muito além de fins de expressão e comunicação, pois cumprem com funções de ordem cognitiva, que auxiliam na tomada de consciência do referente, servindo como suporte fecundo para as representações mentais (DUVAL, 2009b). Além disso, para fins de conceitualização e de operacionalização sobre o real e o imaginário, contribuem com a resolução de problemas de ordem prática ou teórica.

Existe uma grande variedade de representações semióticas, como os sistemas de numeração, a língua natural, as representações gráficas, as representações algébricas, as figuras geométricas, entre muitas outras, contudo, nem todas as representações semióticas podem ser classificadas como registros. Mas, afinal, o que caracteriza uma representação semiótica como um *registro de representação semiótica*? Duval (2012) defende que um registro de representação semiótica é aquele que permite a realização de três atividades cognitivas: a *formação*, o *tratamento* e a *conversão*.

A primeira atividade cognitiva, a de *formação*, corresponde ao atendimento de critérios de conformidade que permitem que uma representação seja formada de maneira identificável, ou seja, que permita que alguém que não a produziu identifique seu sentido. Para que assim seja, Duval (2012) profere que regras de conformidade do sistema semiótico empregado precisam ser respeitadas, permitindo que a representação formada seja comunicável e passível de tratamento.

O *tratamento* é a segunda atividade cognitiva mencionada por Duval (2012) e corresponde às transformações internas a um registro. Um exemplo de tratamento é a realização de um cálculo em um mesmo sistema simbólico, como a resolução de uma expressão numérica ou de um sistema de equações, em que cada expressão se mantém equivalente e conserva a mesma forma de registro.

No contexto da disciplina de Física, um exemplo de tratamento é o desenvolvimento da função horária dos espaços em um movimento uniformemente variado (MUV), em que ocorre apenas a transformação interna na representação em *registro algébrico* (no exemplo, a posição é considerada em metros e, o tempo, em segundos):

**Figura 4** – Tratamento efetuado no registro algébrico

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$100 = 50 + 10 \cdot 2 + \frac{a}{2} \cdot 2^2$$

$$100 = 50 + 20 + \frac{a}{2} \cdot 4$$

$$100 = 70 + \frac{4a}{2}$$

$$100 - 70 = 2a$$

$$\frac{30}{2} = a$$

$$a = 15 \text{ m/s}^2$$

**Fonte:** dos autores (2018)

Segundo Vertuan (2007), devido à atividade cognitiva de tratamento contemplar transformações em um único registro, as compreensões a respeito do objeto representado serão apenas parciais. Segundo o autor, a compreensão depende de uma abordagem adequada que relacione diferentes registros de um mesmo referente.

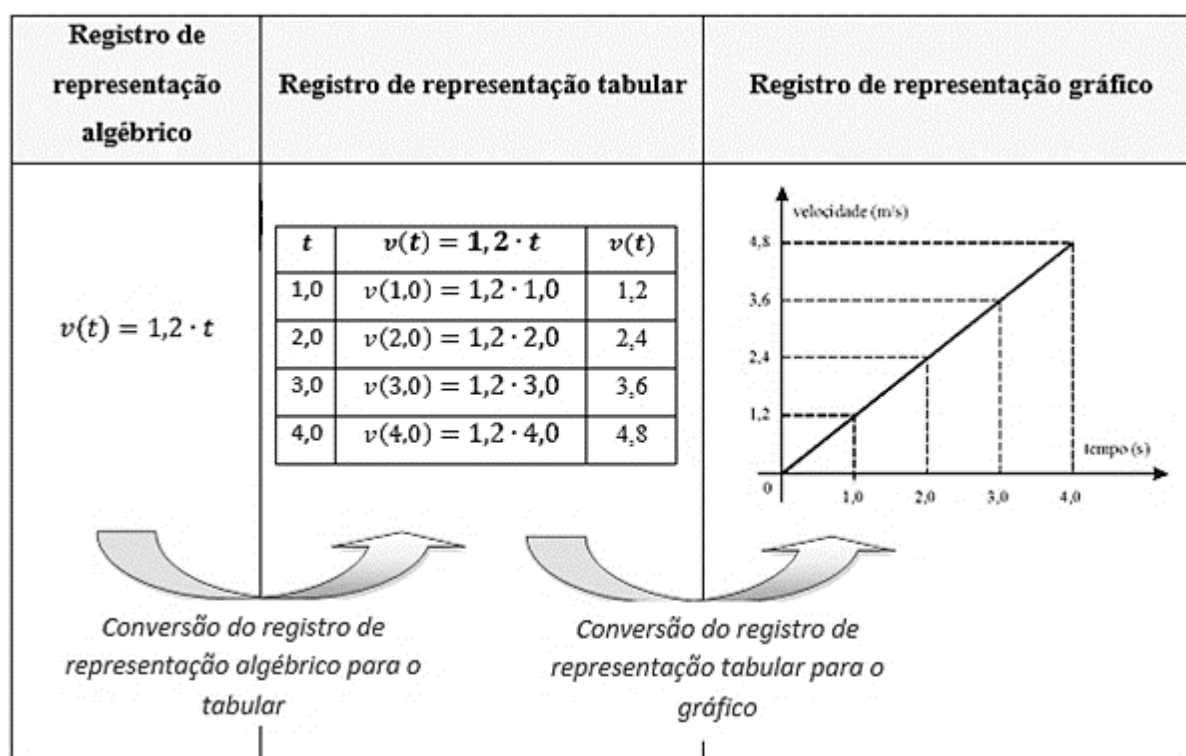
A terceira função cognitiva, a *conversão*, também corresponde a uma atividade de transformação, mas diferente do tratamento, ela ocorre externamente a um determinado tipo de representação. A conversão consiste em passar de um registro de representação para outro, porém mantendo a referência a um mesmo objeto, e em evidenciar propriedades e aspectos distintos entre tais registros.

Dentre as atividades de transformação, a conversão desempenha papel central para a aprendizagem. D'Amore (2005) aponta três motivos que justificam a conversão como prioritária para o processo de aprendizagem em comparação ao tratamento: i) sendo a conversão uma transformação externa, ela esbarra em fenômenos de não-congruência, ou seja, em aspectos não comuns entre representação e referente e entre representações, e tais fenômenos se constituem como obstáculos na aprendizagem que precisam ser identificados e superados; ii) a conversão estimula a mobilização de variáveis cognitivas independentes, auxiliando na construção de observações e experimentações mais precisas; e, iii) é a conversão que implica na atividade de *coordenação*, imprescindível para o processo de conceitualização.

Certamente, a conversão não requer mesmo nível cognitivo de complexidade que o tratamento, como exemplo o fato de que a conversão depende de congruências parciais entre representações e de que ela pode não ser realizada com facilidade quando se inverte o sentido das representações.

Para ilustrar esse segundo fato, tomemos o caso de uma função polinomial de primeiro grau e suas representações algébrica, tabular e gráfica:

**Figura 5** – Conversão entre Registros de Representação Semiótica



Fonte: dos autores (2018)

Em geral, estudantes apresentam facilidade para realizar conversões no seguinte sentido: a partir da função representada na forma algébrica, valores podem ser atribuídos para pontos de seu domínio, obtendo respectivas imagens. Tais valores podem ser organizados em uma representação tabular, constituindo, assim, uma primeira conversão, do registro algébrico para o registro tabular. A partir das informações contidas na tabela, o estudante pode construir a representação gráfica da função, realizando uma segunda conversão, do registro tabular para o registro gráfico. Inclusive, essa é a ordem comumente abordada pelos professores em sala de aula. No entanto, o processo inverso pode se caracterizar como um grande obstáculo para o estudante, ou seja, ter a representação gráfica como ponto de

partida para converter no registro tabular e, por conseguinte, na representação algébrica, não requer mesmo custo cognitivo que o processo inverso.

Retomando os motivos apontados por D'Amore (2005), encontramos no último que a conversão é essencial para que ocorra a atividade cognitiva de *coordenação*, a qual desempenha papel central na aprendizagem, uma vez que “a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (DUVAL, 2012, p. 282).

Segundo Duval (2009a), é na mobilização simultânea de, no mínimo, dois registros de representação de um mesmo referente, ou na possibilidade de trocar oportunamente de registro de representação, que repousa a originalidade da atividade matemática. Nesse direcionamento, concordamos com a afirmação de D'Amore, Pinilla e Iori (2015) de que quando queremos que estudantes atinjam a aprendizagem conceitual, esperamos que eles sejam capazes de realizar a coordenação entre diferentes registros de representação. Segundo os autores, tal afirmação “não diz respeito apenas aos objetos matemáticos, mas pode ser estendida a qualquer disciplina” (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 137).

Apesar de diferenciar os três tipos de representação, a mental, a computacional e a semiótica, Duval (2009b) defende que elas não podem ser postas em domínios distintos. As representações semióticas, além de exteriorizar indícios de representações mentais, sendo, portanto, essenciais para fins de comunicação, elas igualmente são fundamentais para atividades de pensamento. Primeiro, porque a elaboração de representações mentais tem fundamento na interiorização de representações externas. Segundo, porque são as representações semióticas que permitem a realização de diferentes funções cognitivas, como a de objetivação, ou seja, a de produção de uma expressão particular. Por fim, as representações semióticas são essenciais para a produção de conhecimento por possibilitar a representação de um mesmo objeto de maneiras diversas (DUVAL, 2009b). Quanto às representações computacionais, estas geralmente estão inclusas nas atividades de tratamento realizadas em registros de representação semiótica e, portanto, são fundamentais, sobretudo, nas aprendizagens em Matemática e Física.

Em complementação às afirmações anteriores, as representações podem ser internas, externas, conscientes ou não conscientes, de modo que “uma

representação interna pode ser consciente ou não consciente, enquanto que uma representação consciente pode ser, ou não, exteriorizada” (DUVAL, 2009b. p. 43).

As representações semióticas são representações externas e conscientes, as quais, além dos fins comunicacionais, são essenciais às funções cognitivas por implicarem diretamente às funções de objetivação e de tratamento. Porém, nesse caso, considera-se o tratamento como realizado de maneira intencional, ou seja, em que o sujeito tem consciência do que faz. Por outro lado, há o tratamento que é realizado de maneira automática ou quase espontânea, considerado por Duval (2009b) como um tipo de tratamento que envolve apenas representações internas e não-conscientes, que é o caso das representações computacionais.

Quanto às representações mentais, elas são internas e conscientes. Contudo, ainda que representações mentais estejam ligadas aos processos de objetivação (por serem conscientes), bem como à aquisição e interiorização de sistemas e de representações semióticas, há uma grande diferença entre aquilo que está representado na mente de um sujeito e aquilo que ele produz por meio de representações semióticas no intuito de exteriorizar suas representações mentais. Isso justifica as afirmações de que representações conscientes podem, ou não, ser exteriorizadas e de que a exteriorização de representações mentais acontece a partir de indícios e não em totalidade.

Além de fenômenos de incongruências entre representação mental e representação semiótica, Duval (2012) menciona um problema específico relacionado à mudança de registro. Ao se referir à relação entre objeto e representação, o autor enfatiza que só é possível haver compreensão por parte do aprendiz quando ele distingue a representação daquilo que ela representa. No entanto, tal afirmação acarreta em

[...] um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível (DUVAL, 2012, p. 268).

Duval (2012) considera como um paradoxo o fato de que a compreensão e a operacionalização de objetos só são possíveis por meio de representações. Porém, ao mesmo tempo, tais atividades dependem da apreensão conceitual dos objetos representados.

Considerando esse paradoxo é que o autor distingue dois processos que são inerentes ao pensamento humano, a *Semiósis* e a *Noésis*. O primeiro diz respeito à apreensão ou à produção de uma representação semiótica, enquanto que, o segundo, corresponde à apreensão conceitual de um objeto (DUVAL, 2009b, p. 270). Um processo inexistente sem o outro, pois, a aprendizagem depende do reconhecimento e da interpretação de diferentes representações de um mesmo objeto, bem como da transição entre essas representações. É nessa transição que reside a apreensão conceitual do objeto de conhecimento, que consiste nas atividades cognitivas de conversão e coordenação. Esta última está diretamente atrelada à *Noésis* e, portanto, desempenha papel central na apreensão conceitual.

#### 4.2 MULTIMODOS E MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

Durante aprendizagem, quando estudantes tentam compreender e/ou explicar significados de conceitos científicos, realizam um esforço que se apoia em recursos cognitivos e representacionais no intuito de atribuir sentido a esses conceitos. A linha de pesquisa científica dos Multimodos e Múltiplas Representações concentra esforços para compreender os significados dos conceitos científicos que são construídos pelos estudantes.

Ainda que a literatura não apresente esclarecimentos das diferenças entre as definições de Multimodos e Múltiplas Representações, compreendemos o termo *Múltiplas Representações* como referente à capacidade de representação de um mesmo conceito ou processo científico de diversas formas (PRAIN; WALDRIP, 2006; TYTLER; PRAIN; PETERSON, 2007). Portanto, pesquisas nessa área concentram-se em compreender as implicações da utilização de mais de uma representação para a compreensão do estudante em aprendizagem científica.

Já o termo *Multimodos Representacionais* (ou *Multimodos de Representação*) refere-se à integração de raciocínios, descobertas científicas e resultados por meio de diferentes modos no discurso científico. Assim, essa linha de pesquisa visa compreender de que maneira estudantes constroem entendimentos científicos por meio da utilização simultânea de várias modalidades representacionais.

Na tentativa de definir formas e modos de representação, os quais pertencem, respectivamente, às abordagens referentes à Múltiplas Representações e à Multimodos, com o intuito, inclusive, de diferenciá-los, Prain e Waldrup (2006)

descrevem que o primeiro se refere à prática de *re-representar* o mesmo conceito por meio de formas distintas, dentre elas, a verbal, a gráfica, a pictórica, entre outros. Os modos de representação, por sua vez, envolvem categorias que incluem formas representacionais, tais como: “descritivas (verbal, gráfica, tabular, diagramática, matemática), figurativas (pictórica, analógica ou metafórica), cinestésicas ou de gestos corporais (encenação, jogos), que usam objetos tridimensionais (3D) ou maquetes, experimentos, etc.” (LABURÚ; SILVA, 2011a, p. 724-5). Entende-se, assim, que os multimodos correspondem aos meios ou *recursos perceptivos* (RADFORD; EDWARDS; ARZARELLO, 2009, p. 91) em que, a partir deles, formas representacionais podem ser pensadas, expressas ou operacionalizadas.

Reconhece-se que as disciplinas científicas historicamente são entendidas como a integração de discursos multimodais (LEMKE, 2004), onde diferentes modos e formas de representação servem necessidades distintas no que diz respeito ao registro e a integração de vários tipos de procedimentos e raciocínios científicos. Nesse contexto histórico, sobretudo as representações matemáticas, como gráficos e equações, foram amplamente utilizadas, individual ou coordenadamente, para representar aquilo que não era satisfatoriamente possível apenas por meio da linguagem verbal.

Muito além do contexto matemático, a linguagem científica é constituída por uma gama de diversificadas e integradas representações simbólicas. Todavia, a atividade de representar conceitos científicos não é espontânea e trivial para a maioria dos estudantes, e é ainda mais difícil para eles a realização de trocas representacionais, que é uma atividade essencial para o pensamento, uma vez que as trocas permitem a construção de significações a partir do estabelecimento de conexões entre diferentes representações. Essas trocas estão associadas às atividades de tradução e de integração (LABURÚ; SILVA, 2011b).

A atividade de *tradução* consiste na capacidade de reconhecer as ligações conceituais entre representações (PRAIN; WALDRIP, 2006). Já a atividade de *integração*, como já diz o próprio nome, compreende-se como a capacidade de integrar, ou seja, incorporar num todo coerente as significações inerentes nas diversificadas representações de um mesmo referente (objeto ou conceito). Em convergência a essas afirmações, encontramos um crescente reconhecimento em pesquisas em educação matemática e científica que corroboram a respeito da

importância de o estudante compreender e integrar diferentes representações (PRAIN; WALDRIP, 2006; AINSWORTH, 1999, LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; DUVAL, 2003; 2009a; 2009b, 2012; entre outros).

Como não é objetivo desse trabalho detalhar diferenças entre modos e formas representacionais, sobretudo por compreendermos que estes são indissociáveis, assim como são os registros de representação semiótica, a partir desse ponto, integramos pressupostos da linha de pesquisa em Multimodos e Múltiplas Representações aos da teoria dos Registros de Representação Semiótica a um único termo, a *Diversidade Representacional*.

#### 4.3 DIVERSIDADE REPRESENTACIONAL: DEFINIÇÃO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Guiados por orientações de ordem semiológica, denominamos por *Diversidade Representacional* uma linha de pesquisa que abrange referenciais da Multimodalidade Representacional e Múltiplas Representações (PRAIN; WALDRIP, 2006; AINSWORTH, 1999; LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; entre outros), bem como dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2009a; 2009b; 2012). Essa linha de pesquisa concentra esforços para compreender e instigar a constituição de significados de conceitos científicos e matemáticos pelos estudantes, bem como fornece orientações que visam contribuir com o processo educacional, em nível instrucional e cognitivo, tanto para a área de Matemática quanto para as Ciências, em que enfatizamos o ensino de Física.

Várias dessas orientações são produtos de estudos realizados por um grupo de pesquisa em Educação Matemática e Científica que visa compreender as dificuldades de estudantes relacionadas às linguagens simbólicas e imagéticas no ensino de conteúdos matemáticos e científicos, tendo como núcleo de suas investigações premissas da ciência semiótica e como intuito ir além da identificação de problemas envolvidos com a formação e a aprendizagem de representações (LABURÚ; SILVA, 2011b).

Antes de discorrermos a respeito dessa linha teórica, esclarecemos, de antemão, em que sentido será empregado o termo *representação*, ao qual nos referiremos no decorrer das próximas discussões. O termo *representação* é entendido de maneira análoga ao signo linguístico, de modo que ambos se constituem como uma relação entre algo perceptível e algo que está ausente

(LABURÚ; SILVA, 2011b). Em complemento, o termo representação na área científica é adotado em referência a uma gama de transformações que permitem materializar algo que se deseja tornar presente, utilizando, para tanto, distintos sistemas de significação (WARTHA; REZENDE, 2011).

Naturalmente, justificamos a integração de Multimodos, Múltiplas Representações e Registros de Representação Semiótica a uma menção única, a *Diversidade Representacional*, devido aos fatos de que: i) modos, registros e formas são indissociáveis e complementares no processo de ensino e aprendizagem em Ciências e Matemática; e ii) tais pressupostos teóricos convergem em suas colocações a respeito das atribuições das representações para o processo de aprendizagem científico e matemático.

Corroborando com esse ponto de vista, Mortimer e colaboradores (2014) afirmam que a produção de sentidos em um evento comunicativo, tal como o que é promovido em sala de aula, é imperativa à integração de uma diversidade de modos em que, para boa parte deles, há a possibilidade de utilizar diversificados registros de representação semiótica e, nestes, incluir diferentes formas representacionais. Visando esclarecer essa relação intrínseca entre modos, registros e formas representacionais, os autores mencionam o exemplo da escrita no quadro de giz, se constituindo como um modo representacional em que diferentes registros de representação semiótica podem ser produzidos como, por exemplo, linguagens verbais escritas, equações, gráficos, tabelas, esquemas, entre outros. No entanto, é possível, ainda, que um mesmo registro seja apresentado em mais de uma forma, por exemplo, o registro gráfico pode ser representado na forma de barras, de linhas, de colunas ou de setores.

A partir do exemplo descrito é evidente que a troca de registros implica na troca de formas representacionais, assim como a troca de modos provoca, conseqüentemente, a troca de registros e formas de representação (MORTIMER et al., 2014). Tal exemplo também serve de sustentação para a defesa de que, em termos semióticos, formas e modos não permitem separação (CHANDLER, 2004), e o mesmo acontece entre estes e os registros de representação semiótica.

Apropriações conceituais mais profundas e permanentes dependem de que conceitos e processos científicos sejam abordados e apreendidos a partir de diversificados modos, registros e formas representacionais (LABURÚ; SILVA, 2011a), de tal maneira que os estudantes sejam progressivamente estimulados e se

tornem capazes de transitar por entre as diferentes representações de maneira coordenada e integrada (PRAIN; WALDRIP, 2006), possibilitando-o compreender em maior profundidade o significado do conceito contido em cada representação, que carrega em si aspectos desse conceito.

Afinal, o conhecimento abrange representações mentais que se conectam entre si, e tais conexões são estabelecidas a partir de sistemas simbólicos. A perspectiva instrucional da Diversidade Representacional, que sugere a inserção e a promoção de traduções e integrações de diversificados modos, registros e formas representacionais no contexto educacional, oportuniza aos estudantes formar melhores conexões internas, auxiliando-os a atingirem níveis cognitivos mais elevados (LABURÚ; SILVA, 2011b) por meio de construções de vínculos estabelecidos entre diferentes representações. Tais vínculos ocorrem a partir da realização de traduções de significados entre uma representação e outra, em um processo denominado por Suhor (1984) como *transmediação*. Ao traduzir significados de um sistema de signos para outro, o estudante constrói significados equivalentes em sistemas de sinais distintos, conduzindo-o a uma qualidade maior de significação.

No contexto educacional, a perspectiva teórica de Diversidade Representacional aponta para a necessidade de desenvolvimento de um trabalho em sala de aula que oportunize ao estudante extrair significados de um conceito que estão imanentes em várias representações, bem como seja capaz de representar de diversos modos seus entendimentos a respeito desse conceito. Isso significa que o ensino na perspectiva defendida pela linha de pesquisa Diversidade Representacional objetiva oportunizar ao estudante a atribuição e compartilhamento de significados por diferentes maneiras (BLOWN; BRYCE, 2010).

Em complemento a essas colocações, D'Amore, Pinilla e Iori (2015) esclarecem que se o aprendiz possui um determinado objeto cognitivamente construído em sua mente e precisa exteriorizá-lo, seja para fins comunicacionais, representacionais ou no intuito de nomeá-lo ou descrevê-lo, o primeiro passo é decidir, dentre as opções de formas representacionais, qual é a mais conveniente recorrer.

Vale ressaltar que, no contexto de ensino, a relevância entre um modo semiótico e outro para os processos instrucionais e cognitivos depende da área e do tipo de conhecimento, por exemplo, na Física, as representações matemáticas e

gráficas, bem como as relacionadas às atividades experimentais, são prioritárias à verbal. Nesse cenário, Lemke (2004) menciona o caso da Física teórica, para a qual não haveria nenhum sentido colocar em execução textos verbais se não houvessem as equações matemáticas integradas. Em contrapartida, ao invés de priorizar um ou outro modo, registro e forma representacional, para o contexto educacional, sugere-se a proposição de uma pluralidade de formas e registros representacionais combinados a um discurso integrador em multimodos de representação. Dessa forma, novas significações serão possibilitadas aos estudantes, assim como novos procedimentos operacionais e de interpretação.

Contudo, nem sempre o estudante apresentará sucesso ao se envolver com muitas representações e, inclusive, pode apresentar melhor desempenho em formar uma explicação coerente com uma única representação do que ao realizar equivocadamente a tradução e a integração entre diversas representações (WON; YOON; TREAGUST, 2014). Nesse sentido, “se acrescentamos informações semióticas ou mesmo ‘explicações’ inoportunas, a questão se torna confusa para o estudante que aprende” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 112), conduzindo-o a se concentrar em características superficiais de representações, sobrecarregando-se cognitivamente, ao invés de se concentrar em estabelecer vínculos entre representações para construir uma compreensão coerente a respeito do que elas representam (SEUFERT, 2003). De tal modo, “um excesso de representações semióticas, se por um lado, permite evidenciar um maior número de componentes conceituais do objeto, por outro lado complica a gestão do significado global do próprio objeto” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 155).

Em contrapartida, quando o processo de aprendizagem é circunstanciado pela formação e tratamento de um único registro de representação ou quando são privilegiados registros representacionais de maneira compartimentada, não se possibilita a realização de coordenação. Afinal, dessa forma, os registros de representação envolvidos permanecem mobilizados de maneira restrita, gerando o que é denominado de *encapsulação*, que “refere-se à obediência às regras internas de tratamento de forma fechada” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p. 16). Nesse caso, não há dissociação entre objeto e sua representação, o que provoca incompreensões conceituais e fracasso na realização de conversão. Nesse mesmo direcionamento, ao privilegiar abordagens de ensino e de aprendizagem que contemplem formas

e/ou modos representacionais únicos, as possibilidades de realização de atividades de tradução e integração são prejudicadas.

Ainsworth (1999) menciona que um resultado encontrado de forma consistente em diversos estudos é o de que estudantes manifestam dificuldades de realizar a tradução entre representações, entendida por ela como a atividade de compreensão de relações entre duas representações, bem como a de ação para reproduzir tais relações. A autora afirma que tais dificuldades variam de acordo com a natureza das relações entre representações distintas.

Na tentativa de contornar ou solucionar os problemas mencionados, sugere-se estimular o estudante a evidenciar até que ponto a representação pode ser semelhante ou diferente do objeto que representa, uma vez que, segundo Wartofsky (1979), a dificuldade mencionada está atrelada a confusões entre a representação e seu referente. Afinal, a representação não é uma réplica perfeita do seu referente e, por isso, inevitavelmente pode apresentar analogias negativas, não correspondentes de maneira coesiva ao que é referenciado.

Para que as representações sejam bem utilizadas pedagogicamente, o professor pode auxiliar os estudantes a evidenciar as relações possíveis ou não entre elas e o referente. Paradoxalmente, isso só é possível propondo novas representações e motivando os estudantes a complementá-las ou reconstruí-las em relação a outros sistemas de representação, realizando, dessa forma, atividades de integração e tradução (WON; YOON; TREAGUST, 2014). O exposto converge com as ideias de Duval (2012) a respeito do paradoxo cognitivo do pensamento e, dessa forma, evidenciamos que ele se estende ao domínio científico, além do matemático.

É evidente que o processo instrucional proposto, ou seja, embasado em pressupostos da Diversidade Representacional, não é trivial para o professor. Won, Yoon e Treagust (2014) propõem que a melhor maneira de começar a desenvolver um trabalho pedagógico, convergindo com a perspectiva da Diversidade Representacional, é identificando as informações inerentes nas representações que de fato estão se tornando acessíveis para o estudante e inferir a respeito de como essas informações estão sendo por ele organizadas e utilizadas. Dessa forma, o professor poderá pensar em estratégias que auxiliem o estudante a integrar e traduzir representações.

Segundo Laburú e Silva (2011a) cada palavra, símbolo, figura, diagrama, entre outros, que estão intrincados nas ações e procedimentos que são promovidos

pelo estudante ao se envolver com situações diversas, pertence a um contexto específico e é essa a parte possível de ser negociada, em termos de significados, com outros estudantes e com o professor. Por esse motivo que é essencial que o ensino abarque diversos contextos com potencialidade para que, a partir de suas intersecções, o significado extraído pelo estudante a partir de cada um deles seja organizado, coordenado e comunicado, de modo que tais contextos contemplem uma pluralidade de registros, formas e modos representacionais.

Diante das colocações anteriores, ratificamos que a Diversidade Representacional como perspectiva educacional auxilia o professor na identificação de dificuldades de compreensão do estudante em aprendizagem. A partir de observações das ações do estudante (identificação, tratamento, trocas representacionais, integrações, etc.) frente às representações de diferentes situações é possível descobrir o grau de conexões conquistadas ou não durante seu processo de aprendizagem (LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011).

Ainda nos referindo ao contexto pedagógico, a essencialidade em desenvolver uma proposta instrucional que vise a compreensão do estudante diante de diversificadas representações de um mesmo referente, reside no fato de que cada uma delas carrega em si aspectos mais fortes ou mais fracos do que representa, ou seja, a precisão, a clareza e a relação entre cada representação e o referente não são redundantes. É da diversidade de representações que emerge o significado de conceitos e objetos, pois, como cada representação encerra em si aspectos específicos daquilo que representa, de maneira que nenhuma delas é capaz de descrever completamente seu referente, cada representação permite distintas inferências, afinal, “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que representa e não apresenta idêntica maneira de ver um mesmo conteúdo conceitual” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p. 20).

Assim sendo, essas representações, ainda que tenham uma mesma referência e possam apresentar alguns aspectos similares, não são redundantes entre si, por isso, cada representação pode servir para um propósito diferente e, também, são tais características distintas que fazem com que elas sejam complementares para a compreensão absoluta do conceito.

Em concordância, Ainsworth (1999) afirma que diferentes representações suportam distintos processos computacionais<sup>5</sup> e, mesmo que contenham informações equivalentes, representações diferem em seu poder inferencial. Segundo a autora, não existe uma representação única que seja eficaz para realizar toda uma gama de tarefas, mas algumas são mais propícias do que outras para determinadas atividades. Especificamente, há duas subclasses de categorias quanto à relação entre representações: i) cada representação codifica aspectos particulares de um domínio; e, ii) distintas representações de um mesmo referente apresentam informações diferentes entre si. Ainda, há um grau redundante de informações compartilhadas pelas diferentes representações, além da informação original que é comum a todas elas. Tais redundâncias, quando integradas, suportam interpretações mais sólidas a respeito do domínio (conceito ou objeto) representado.

Em suma, as propostas educacionais pautadas na Diversidade Representacional têm por premissa que diversas representações referentes ao mesmo conceito convergem em suas interpretações e, dessa forma, contribuem para firmar significados dessa concepção, auxiliando o estudante à sua compreensão. Ainda, complementam-se, uma vez que cada representação provê significados específicos, diferentes processos de pensamento e distintos procedimentos.

Essas afirmações corroboram para a defesa de que, ainda que diversificadas representações de um mesmo referente apresentem entre si aspectos distintos e não sendo entre si totalmente redundantes, devem existir alguns elementos comuns entre elas. Lemke (2003) afirma que essa redundância de aspectos entre representações é essencial para fins comunicacionais em sala de aula, uma vez que, nesse ambiente, há inúmeros acontecimentos ao mesmo tempo, caracterizando a dinâmica instrucional como algo complexo.

Exatamente devido a essa característica complexa do ambiente instrucional, existem muitas falhas na comunicação do professor com seus alunos, sendo possível identificar informações vagas, erradas, confusas, misturadas de maneira inconveniente, antecipadas em relação aos objetivos educacionais daquele momento ou em relação aos conhecimentos prévios do estudante, entre outras

---

<sup>5</sup> Aqui entende-se processos computacionais tal como Duval (2009) se refere às representações computacionais, ou seja, como transformações algorítmicas, internas ao registro, com o intuito de produzir uma resposta adaptada, em geral, operacionalizada de maneira não consciente.

situações. Para Lemke (2003), o trabalho em sala de aula com diversificadas representações permite que as redundâncias parciais entre elas sejam identificadas e organizadas no sentido de minimizar os problemas comunicacionais relatados, permitindo que informações sejam revistas, complementadas, corrigidas, aprofundadas e, sobretudo, integradas.

Retomando as considerações de Ainsworth (1999) a respeito das diferentes representações suportarem distintos processos computacionais e diferirem em seu poder inferencial, Laburú e Silva (2011b) afirmam que, para resolver problemas físicos e matemáticos, na maioria das vezes, é mais conveniente recorrer às formas analógicas, como figuras, esquemas, diagramas, entre outros, por serem mais simples e diretos e, portanto, mais favoráveis ao processo de conceitualização do que aos modos textuais e orais.

Na Física, sobretudo, a realidade geralmente é representada de maneira simplificada a partir de modelos, facilitando a análise e o seu tratamento. Nesses modelos, são enaltados os aspectos essenciais para que seja possível a identificação de informações relevantes para realização de tratamentos. Assim, representações no contexto físico podem ser entendidas como meio de “suporte para a construção de entidades mentais ligadas a elementos diretamente perceptíveis, ou não, que os modelos incorporam” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p.14).

Prain e Waldrip (2006) advertem que alguns recursos representacionais podem ser capazes de promover a aquisição de competências, o que é importante para o processo de aprendizagem, mas não suficiente para a promoção da aprendizagem efetiva. Um exemplo é o ensino de Física que privilegia operações de tratamento sobre registros representacionais matemáticos, cujo domínio não é capaz de promover a compreensão do conceito envolvido nesse procedimento.

Muito além de desenvolver competências, Prain e Waldrip (2006) sugerem que os estudantes precisam ser capazes, também, de explicar e de negociar com o professor e demais estudantes seus entendimentos emergentes de representações, por meio de diferentes sistemas representacionais (em que incluímos formas, registros e modos). Segundo os mesmos autores, a aprendizagem científica consiste em um desafio representacional, em que se faz necessária uma variedade de contextos que permitam ao estudante negociar e consolidar suas compreensões a respeito de como as ideias científicas são construídas e interpretadas. Ora, quando estudantes são submetidos a um processo de negociação de significados oriundos

de transformações representacionais, ou seja, da necessidade de re-representar um mesmo conceito ou objeto por meio de diversificados modos, registros e formas representacionais, eles são instigados a integrá-los em um discurso compreensível e, concomitantemente, explicitar entendimento conceitual mais aprimorado (LABURÚ; SILVA, 2011b).

Prain e Waldrip (2006) assinalam que o envolvimento dos estudantes com a integração representacional contribui com o processo de aprendizagem e permite explicitarem seus conhecimentos subjacentes. Nesse direcionamento, as defesas quanto ao papel instrucional e cognitivo das diversificadas formas, registros e modos representacionais pautam-se, essencialmente, na ideia de *re-representar*, na qual a compreensão do estudante atrela-se à generalização e transformação de formas e registros de representação contidas em diferentes modos e em explicações metacognitivas mediadas por diferentes sistemas representacionais.

Pelos apontamentos levantados e considerando características próprias dos conhecimentos científico e matemático, evidenciamos que são compostos por estruturas comunicativas pautadas em uma linguagem de diversidade representacional muito extensa em que, para ambas as áreas do conhecimento, o mais importante não são as representações em si, mas suas transformações (LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011). Especificamente, o desenvolvimento conceitual em Matemática e Ciências depende da coordenação ágil e espontânea das atividades cognitivas de conversão e de coordenação de registros de representação, bem como das atividades de tradução de formas representacionais e integração de multimodos de representação.

Compreendemos, assim, que a aprendizagem consiste em o aprendiz ser capaz de mobilizar conhecimentos dentro e fora do contexto de cada representação ensinada, bem como ser capaz de realizar transformações em e entre representações, oportunamente e com agilidade. Em outras palavras, segundo o viés semiótico, “compreender envolve, em última instância, competência no trânsito intra-representação e inter-representação de um mesmo referente (objeto ou conceito)” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p.19) de maneira coordenada. Dessa forma, possibilita-se o cumprimento das funções de expressão, transformação e objetivação.

A função de *expressão* refere-se à explicitação, ou seja, à manifestação explícita da significação do objeto ou conceito contido na representação. A função

de *transformação*, como já vimos, diz respeito às operações de tratamento e conversão, operações internas e externas ao registro de representação, respectivamente, que são essenciais para que a natureza dos sistemas de representação semiótica seja distinguida, bem como as atividades de tradução e de integração de formas e modos representacionais, respectivamente. Por fim, a *objetivação* compreende o processo que faz passar a representação de um estado não consciente para a tomada de consciência, o que conduz o estudante a descobrir por si mesmo o significado da representação (LABURÚ; SILVA, 2011b).

De maneira complementar, em Radford (2006), observamos que o processo de objetivação tem relação direta com a percepção<sup>6</sup>, no sentido de que o ato perceptivo se desenvolve a partir de um processo mediado por uma atividade multi-semiótica. De tal modo, são os recursos semióticos de diferentes tipos que fazem emergir o significado do objeto ou conceito que se pretende conhecer e, por esse motivo, o autor os denomina de *meios semióticos de objetivação*.

Em outras palavras, a objetivação é uma construção teórica para explicar a maneira pela qual os estudantes se envolvem com algo, a fim de perceber e dar sentido a ele. Segundo Radford (2006), a objetivação passa por várias camadas de consciência, que são progressivamente atingidas à medida em que o aprendiz continua se envolvendo com o objeto de conhecimento, significando-o de maneira cada vez mais precisa a partir da mediação de signos distintos, porém, referentes a esse mesmo objeto. Para o autor, “um sistema semiótico nos fornece maneiras específicas para significar ou dizer certas coisas, enquanto outro sistema semiótico nos oferece outras formas de significação” (RADFORD, 2006, p. 6, tradução nossa). Isso torna evidente o fato de que representações não são redundantes, o que não significa dizer que “o que pretendemos ou expressamos em um sistema semiótico é completamente independente do que se expressa em outro” (ibid., p. 6, tradução nossa).

Para Laburú e Silva (2011a), em convergência e complementação às explanações anteriores, tanto a apreensão quanto o diagnóstico da produção e das representações elaboradas durante o processo de ensino e de aprendizagem científica estão relacionados às análises semióticas, porquanto, às atividades de

---

<sup>6</sup> Percepção é aqui entendida como muito além da capacidade de apreender por meio dos sentidos, mas envolve, também, a apreensão de objetos não concretos, por meio da mente.

visualização e raciocínio e a de comunicação se estabelecem por meio de representações semióticas.

Ressaltamos que as reflexões aqui expostas não implicam em dizer que precisam ser propostas aos estudantes diversas representações de maneira que, somadas ou hierarquizadas, os conduzirão à compreensão de um conceito. Logo, defendemos, até então, ser fundamental que essas representações sejam integradas de modo que os significados em cada uma delas sejam evidenciados e multiplicados um com o outro, conduzindo o estudante a mobilizar raciocínios livremente e de maneira consistente entre diferentes formas, registros e modos representacionais. Para essa finalidade, o papel do professor é imprescindível, pois é o responsável por incentivar o estudante a negociar suas apreensões e questões relacionadas às representações, auxiliando-o a sistematizar seus entendimentos de acordo com as ideias científicas (TYTLER; PRAIN; PETERSON, 2007).

Seja na aprendizagem matemática ou científica, determinadas representações podem melhor se adequar e atender às preferências e diferenças individuais de aprendizagem de cada estudante. Considerando essas particularidades, ao priorizar determinados modos, registros e formas representacionais no contexto instrucional, não se considera o fato de que cada estudante apresenta melhor competência para lidar com um tipo ou outro de sistema representacional e, dessa maneira, pode-se provocar nele o sentimento de incompetência frente ao aprendizado proposto.

O ensino circunstanciado por uma diversidade representacional possibilita atingir diferentes perfis cognitivos e subjetivos individuais, permitindo que cada um deles possa manifestar seus melhores desempenhos na tentativa de significar um conceito por diferentes perspectivas representacionais que melhor lhe convém. Considerando os diferentes perfis em uma sala de aula e, conseqüentemente, as diferentes formas de significação e distintos pontos de vista, é possível que os estudantes se ajudem simultaneamente a partir da negociação de entendimentos, auxiliando uns aos outros, seja preenchendo lacunas no entendimento ou, até mesmo, aprofundando a compreensão particular (LABURÚ; SILVA, 2011b).

A prática pedagógica desenvolvida segundo pressupostos da Diversidade Representacional contribui para que sejam repercutidas formas individuais de agir, pensar, sentir e expressar, e tal repercussão é oriunda das relações existentes entre os conhecimentos que o estudante já possui e as suas representações intuitivas

(LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011). Muito além de potencializar a promoção de uma gama de associações conceituais, a diversidade representacional permite a descentração cognitiva (VUYK, 1981), que é oposto ao mecanismo de centração, o qual implica na maior atenção ser atribuída a um determinado aspecto ou ponto de vista, negligenciando outros. Esse mecanismo de centração acarreta em dificuldades de aprendizagem, pois conduz o estudante a “estabelecer uma perspectiva estereotipada que pode terminar fazendo com que se permaneça refém de um raciocínio circular que impede a abertura para novas possíveis perspectivas” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p. 18).

A descentração cognitiva precisa ser estimulada a partir de novas possibilidades de pensamento. É nesse direcionamento que se sustenta a defesa de que a diversidade de representações contribui a descentração, pois oferece ao estudante possibilidades diversas de caminhos de pensamento para que possa compreender ideias, conceitos e linguagens (LABURÚ; SILVA, 2011b).

Ora, se cada estudante pode percorrer um caminho distinto e particular para a construção de significados, uma vez que esta ocorre com base em seus conhecimentos prévios, não deveria o ensino considerar essa característica para que possa elaborar meios de atingir a aprendizagem do estudante? É nessa perspectiva que o ensino plural em termos de modos, registros e formas representacionais é entendido como uma profícua alternativa pedagógica.

Especialmente no ensino de Ciências e de Matemática, a abordagem segundo perspectivas da Diversidade Representacional permite, ao estudante, recorrer suficiente às diferentes representações como meios provisórios e intuitivos para realizar explorações conceituais e manifestações qualitativas de conhecimentos. Desse modo, representações distintas podem servir como *andaimes conceituais* (AINSWORTH, 1999) para a compreensão conceitual, a partir da evidenciação de congruências entre o referente e a representação e, sobretudo, entre as representações.

A ideia de *andaimes* advém das defesas de Ainsworth (1999) quando, ao se referir à atividade de tradução, propõe que o estudante precisa estabelecer ligações cognitivas entre diferentes representações. Para isso, Ainsworth (1999) sugere a estratégia de *andaimes*, que consiste em o educador dispor aos estudantes, a princípio, ligações completas entre as representações. Na medida que eles manifestarem maior desempenho e conhecimento a respeito de um determinado

domínio, esse fornecimento deve diminuir, de modo a permitir que eles sejam capazes de evidenciar ligações entre representações de maneira independente.

Sintetizando as ideias principais abordadas, afirmamos que as aprendizagens matemática e científica dependem da sinergia cognitiva provocada pela diversidade de representações, pois a aprendizagem efetiva consiste em o estudante ser capaz de desempenhar atividades de transformação inter e intrarepresentacional coordenadamente, de comunicar genuinamente equivalência de significados entre diversificadas representações e de integrar tais significados em um discurso multimodal de representação, não se limitando a um signo ou modo de expressão particular.

De maneira geral, o que pesquisadores têm afirmado é que a aprendizagem efetiva em Ciências (e que se estende para a Matemática) depende de o estudante conseguir “compreender diferentes representações de conceitos e processos científicos, ser capaz de traduzi-las em uma outra, bem como compreender a sua utilização coordenada na representação do conhecimento científico” (PRAIN; WALDRIP, 2006, p. 1844, tradução nossa). Para isso, os autores afirmam que a compreensão de diversos modos é essencial e, por isso, aos estudantes devem ser oportunizadas situações diversas para que não se limitem a modos e temas específicos. Dessa forma, o estudante poderá desenvolver sua compreensão a respeito de conceitos científicos e desenvolver várias maneiras diferentes de explicitá-los.

A atividade semiótica, portanto, não se encontra isolada da atividade conceitual e, por esse motivo, as representações são o centro das análises dos processos de aprendizagem durante a instrução matemática e científica. Essa afirmação conduz à constatação de que a aprendizagem de conceitos não pode ser apartada da aprendizagem de como representar tais conceitos, bem como da significação dessas representações (TYTLER; PRAIN; PETERSON, 2007).

Em concordância, Pozo (2002) defende que a aprendizagem reside na mudança representacional, a qual precisa ocorrer em um sentido progressivo, que tenha como ponto de partida a explicitação de representações informais e, como ponto de chegada, a manifestação de representações cada vez mais próximas das cientificamente compartilhadas. Esse processo, demanda a tomada de consciência do aprendiz a respeito de seu próprio conhecimento e processo de aprendizagem.

Como já mencionamos, os conhecimentos científico e matemático são compostos por estruturas comunicativas pautadas em uma linguagem que abrange uma diversidade representacional muito extensa. Essa diversidade, no contexto de aprendizagem, está subordinada a um duplo, porém inerente, aspecto comum a toda comunicação. Essa dupla compreende, primeiro, o fato de não haver significação completa, mas dependente de uma gama de distintas fontes de informação e de domínios contextuais de experiências, o que significa dizer que são as circunstâncias que favorecem as diversas mensagens possíveis de serem admitidas pelo sinal. Assim, o caminho para o significado é diferente para cada um que realiza uma interpretação, pois cada sujeito parte de condições iniciais distintas de conhecimentos, experiências e habilidades (LABURÚ; SILVA, 2011b).

Considerando esses dois aspectos comuns à comunicação e destacando aquela que acontece no ensino científico e matemático, é categórico que “um significado somente se vê preenchido por integração de um somatório de significados levados pelas várias formas e modos comunicativos, sem que se desconsiderem os já elaborados no passado” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p. 23). É, portanto, a diversidade de representações, circunstanciada pelo diálogo promovido com o intuito de negociar significados entre estudantes e entre estes e o professor, a responsável pelo engendramento de sentidos e objetividade.

Em um contexto mais extenso, a Diversidade Representacional, enquanto perspectiva instrucional, é relevante para que o estudante desenvolva a competência em realizar tratamentos e conversões entre diferentes registros de representação como, também, para que seja capaz de produzir um discurso científico de maneira coerente, produto da coordenação entre registros e da tradução e integração de modos e formas plurais de representação. Logo, o êxito do estudante ao tratar a simbologia envolvida em uma situação depende

[...] da articulação entre a apreensão operatória simbólica das representações e o manejo discursivo integrado das inferências em múltiplas representações, provocando a mobilização de uma rede de definições, conceitos e leis (LABURÚ; SILVA, 2011b, p. 28).

Duval (2009b) apresenta colocações a favor do diálogo e da diversidade de representações para a aprendizagem ao afirmar que, ao proporcionar a estudantes oportunidades para que se esforcem para exprimir suas representações mentais, seja por meio de palavras ou outros registros de representação semiótica, o

professor os auxilia a não somente expressar seus conhecimentos, mas a coordená-los, organizá-los, sistematizá-los e aprimorá-los. Laburú e Silva (2011b) complementam que ao oportunizar que essa explicitação ocorra, permite-se identificar, priorizar e complementar aspectos chaves do conteúdo, bem como ligações conceituais internas e entre representações.

A defesa pela expressão verbal, oral ou escrita, do conhecimento é priorizado dentre os demais meios semióticos. Fundamentado em ideias bakthinianas, Volóshinov (1992) admite que o entendimento verdadeiro é dialógico por natureza e que a compreensão genuína abrange palavras substanciais próprias para redizer o contexto da enunciação de outrem, constituindo paráfrases. Assim, a expressão verbal pode ser entendida como um instrumento propício para verificar a aprendizagem construída ou em construção pelo estudante.

Eco (2003) também reconhece o papel relevante da linguagem verbal, que a faz sobressair aos demais sistemas semióticos. Segundo o autor, toda a atividade humana, assim como todo o conteúdo capaz de ser representado por diversificados sistemas semióticos, podem ser traduzidos em linguagem verbal, mesmo quando o processo inverso não é possível. Ainda que outros sistemas semióticos possam ser mais eficazes para atingir alguns espaços semânticos para os quais a linguagem verbal não é o suficiente ou, até mesmo, não alcança, ainda assim, é a mais poderosa forma de o sujeito traduzir seus pensamentos e todos os demais sistemas semióticos são, de certo modo, mediados pela linguagem verbal.

Dentre os diferentes sistemas semióticos, Laburú, Barros e Silva (2011, p. 473) atribuem à linguagem verbal maior relevância devido à sua melhor capacidade de “expressar raciocínios semânticos, qualificar ideias ou realizar relações entre categorias”, se comparada com outros modos, formas e registros representacionais.

Ao pesquisar o pensamento algébrico e a generalização de padrões de adolescentes em aprendizagem matemática, fundamentado em uma perspectiva semiótica, Radford (2006) estabeleceu níveis progressivos de generalização, afirmando que os níveis mais altos apresentam como característica principal o que denominou de *contração semiótica*, que consiste em uma redução progressiva do ritmo de gestos e outros sistemas semióticos para objetivação, de modo que o estudante passa a utilizar formas reduzidas de expressão. Essa redução passa a ser compensada por uma concentração de significados em menor número de sinais para expressar a generalização. Para Radford (2008), essa contração da expressão

revela um nível mais profundo de consciência e inteligibilidade concomitantes. O autor afirma, ainda, que a contração depende dos sistemas semióticos pelos quais a objetivação ocorre e que ela conduz a um enunciado mais curto, com menos e melhores palavras articuladas, acompanhado ou não de gestos mais curtos e mais precisos, de modo que a fluência é adquirida na mesma proporção em que a contração aumenta.

Estendendo para outros domínios e associando os pressupostos de Eco (2003) aos de Radford (2006), consideramos que a linguagem verbal pode ser entendida como produto de contração semiótica, uma vez que todo o conteúdo capaz de ser representado por meios semióticos diversos são passíveis de serem reduzidos à linguagem verbal, de modo a concentrar, nesse meio semiótico, as significações do conteúdo.

Em direcionamento às abordagens realizadas, que compreendem defesas relativas às atribuições de múltiplas representações para os processos de construção da aprendizagem e explicitação desta, apresentamos, na sequência, aspectos principais de uma teoria que aborda a respeito das atribuições das representações para a tomada de consciência e alcance progressivo de graus mais intensos de explicitação do conhecimento.

## 5 REDESCRIÇÃO REPRESENTACIONAL

Neste capítulo, exploramos os fundamentos teóricos referentes ao modelo de Redescrição Representacional, proposto por Karmiloff-Smith (1994; 2010), no qual a autora descreve o desenvolvimento do sujeito como resultado de um percurso de explicitação progressiva de representações do conhecimento. Nesse processo, a informação inicialmente armazenada na mente do sujeito por meio de representação, se torna progressivamente mais flexível e manipulável a partir de recorrentes processos de redescrição representacional, que implicam no gradativo acesso consciente ao conhecimento e, assim, à sua explicitação verbal.

Inicialmente, fornecemos um panorama das ideias principais de Karmiloff-Smith (1994; 2010) a respeito do modelo teórico de Redescrição Representacional. Em seguida, descrevemos os níveis em que ocorre o progressivo acesso consciente ao conhecimento, devido às recorrentes redescrições representacionais.

### 5.1 MODELO DE REDESCRIÇÃO REPRESENTACIONAL

Com o intuito de explorar a relação entre *meta-processos*<sup>7</sup> não conscientes e aqueles que estão disponíveis ao acesso consciente e à verbalização, de modo não restrito às evidências obtidas por meio de explicações conscientemente acessíveis e verbalizáveis, mas com foco na análise de *pistas* que são manifestadas em procedimentos, Karmiloff-Smith (2010) propõe um modelo teórico para analisar a função da consciência para a aquisição da linguagem. Assim, a autora visa investigar se a consciência explícita necessariamente implica em processos de aquisição espontâneos envolvidos na mudança representacional.

Esse modelo teórico é denominado de *Redescrição Representacional*, no qual a *redescrição* é “uma operação interna de cópia que envolve uma negociação entre informação retida e acessibilidade” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 418). Em outras palavras, a redescrição corresponde a uma formatação (ou uma *re-representação*) interna da representação da informação em maneiras distintas, tornando-a progressivamente mais acessível metacognitivamente.

---

<sup>7</sup> *Meta-processos* ou *metaprocedural* são termos propostos e utilizados por Karmiloff-Smith (2010) que remetem ao aspecto não consciente e fundamental da forma pela qual sujeitos em desenvolvimento espontaneamente “trabalham” suas representações fora das relações normais de *input/output*, que correspondem às relações mentais de entrada e saída (estímulo e resposta).

A metacognição está relacionada à competência do sujeito de reconhecer os próprios conhecimentos já construídos e os que ainda desconhece, bem como os processos e procedimentos já dominados ou não. Segundo Flavell e Wellman (1977), estudantes bem-sucedidos em lidar com tarefas acadêmicas apresentam como característica comum competências metacognitivas bem desenvolvidas, no sentido de que compreendem a tarefa, suas finalidades, como realizá-la, avaliá-la e executá-la. Em complemento, Valente e colaboradores (1989) mencionam que, além disso tudo, a competência metacognitiva abrange a facilidade do sujeito em comunicar verbalmente suas compreensões e procedimentos envolvidos na tarefa com que lida.

É nesse direcionamento que Karmiloff-Smith (2010) refere-se à ideia de metacognição, como consciência do próprio conhecimento e da organização dos próprios processos cognitivos e procedimentos realizados diante de uma tarefa específica. Desse modo, sua concepção a respeito de metacognição aproxima-se da de Flavell (1981), que defende duas formas complementares de compreensão da metacognição: i) *conhecimento sobre o conhecimento*, que diz respeito à tomada de consciência das competências e processos necessários para conclusão de uma determinada tarefa e ii) *controle* ou *auto-regulação*, que compreende a capacidade e avaliação da execução da tarefa e reconhecimento de possíveis correções. Em síntese, o conhecimento metacognitivo está relacionado ao sujeito ter consciência *do que sabe, como utilizar* o que sabe, bem como *onde, quando* e *por que* utilizar o que sabe (ERTMER; NEWBY, 1996).

A teoria de Redescrição Representacional fundamenta-se na premissa de que, durante o desenvolvimento, as representações internas estão inicialmente armazenadas de forma implícita na mente e não disponível para acesso consciente. Karmiloff-Smith (1994) cita que existem maneiras distintas de armazenamento de novas informações na mente de jovens aprendizes. Dentre essas maneiras, o aprendiz pode armazenar em sua mente informações provenientes do ambiente físico (acessíveis por meio da percepção, ou seja, dos sentidos) e de informação linguística fornecida por outra pessoa. Ambos os exemplos fazem menção às fontes externas de informação.

Outra maneira, porém, interna, corresponde ao processamento de entradas e saídas de informação. Karmiloff-Smith (1994) ressalta a ideia de que existe uma forma mais especificamente humana de aquisição do conhecimento, que consiste

em a mente explorar internamente a informação armazenada, seja ela de origem inata ou adquirida, mediante um processo de redescrição de suas representações, ou seja, a partir de um processo de *re-representar* internamente a representação da informação em formatos distintos.

Mas, além desse processo interno, é essencial que ocorra a mudança explícita, isto é, a construção e exploração consciente de analogias, bem como de experimentos reais e de pensamento, que dependem de processos de redescrição representacional, o qual ocorre espontaneamente como parte de um impulso interno, mas que também pode ser desencadeado por influências externas como, por exemplo, recursos metodológicos promovidos em sala de aula.

Portanto, há possibilidade de representações implícitas tornarem-se progressivamente mais explícitas e acessíveis metacognitivamente ao aprendiz (RUSSEL; McGUIGAN, 2003). Nesse contexto, o quadro teórico elaborado por Karmiloff-Smith (1994; 2010) tem o intuito de analisar o “modo pelo qual os processos cognitivos criam relações entre as representações implícitas e as explícitas” (AUGÉ, 2014, p. 33), levando-se em conta que “um aspecto fundamental do desenvolvimento humano é o processo hipotético pelo qual a informação que está em um sistema cognitivo se torna um conhecimento progressivamente explícito nesse sistema” (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 694, tradução nossa) e, dessa forma, mais acessível à consciência e à verbalização .

O processo que compreende desde a informação implícita até seu acesso consciente e verbalização, envolve recorrentes redescrções representacionais. Pannuti (2006) associa a ideia de redescrição representacional a um processo de apropriação de representações internas próprias de cada sujeito e, portanto, inclui “a exploração interna de representações que já foram armazenadas, mediante a re-representação interativa em diferentes formatos representacionais daquilo que já foi representado previamente” (PANNUTI, 2006, p. 857). Logo, a representação torna-se cada vez mais acessível à consciência e, assim, à explicitação. O explicitar de uma representação resulta na atribuição de um novo significado às representações implícitas (AUGÉ, 2014).

Assim sendo, o modelo teórico de Redescrição Representacional distingue representações definidas implicitamente na mente do aprendiz, da representação explícita para a sua própria mente. Esta última é considerada como progressiva e abrange níveis de processamento que se encerram na capacidade de acesso

consciente e verbalizável. Para Karmiloff-Smith (2010), entre os processos de aquisição e os de consciência verbalizável existem meta-processos, denominados pela autora como *metaprocedurais*, que abrangem aspectos não conscientes, porém, fundamentais, nos quais aprendizes espontaneamente redescrevem suas representações.

Em específico ao campo da Linguística, para o qual a teoria de Redescrição Representacional foi desenvolvida, Karmiloff-Smith (1994; 2010) refere-se à explicitação declarativa de conhecimentos ou de representações procedurais do aprendiz ao utilizar a linguagem verbal. A autora afirma que é possível estabelecer uma relação entre essas ideias com as do campo metalinguístico, uma vez que, segundo a teoria de Redescrição Representacional, “a atividade metalinguística revela-se a partir de uma atividade de tradução” (OLIVEIRA, 2009, p. 49) em que operar metalinguisticamente consiste em redefinir uma determinada informação a partir da autonomia do aprendiz quando ele busca por sinônimos, paráfrases, etc. (JAKOBSON, 1978). Trata-se, portanto, “de uma interpretação intralinguística de uma palavra ou frase inserida dentro de outros códigos, que passam por recodificação e por uma tradução interlinguística” (OLIVEIRA, 2009, p. 47).

Entende-se que essa atividade engloba metalinguagens não linguísticas e linguísticas, em que esta está inserida no sistema da própria língua, composta por sintaxe, semântica, dentre outros elementos, enquanto aquela é composta por metalinguagens lógicas e semióticas. A primeira serve para dizer a respeito do valor verdadeiro de frases e, a segunda, compreende a linguagem verbal e sistemas de signos não linguísticos, como por exemplo, esquemas, gestos, entre outros (KIM, 2003).

Karmiloff-Smith (2010) justifica que muitas descrições desenvolvimentistas anteriores aos seus estudos a respeito de processos cognitivos (sua primeira publicação foi em 1974) ressaltam a mudança comportamental e não a representacional que, segundo Karmiloff-Smith (2010), é categórica para a compreensão do desenvolvimento cognitivo em geral, pois uma perspectiva desenvolvimental exige a conceitualização de mudanças no sistema representacional interno do aprendiz. Essas mudanças são as responsáveis pela conexão entre “operadores de consciência” e “consciência” na forma acessível e verbalizável.

O modelo teórico proposto por Karmiloff-Smith (2010) é fundamentado no sucesso do aprendiz e enfatiza a função do acesso progressivo à consciência metalinguística para a aquisição da linguagem. Nesse modelo, o acesso aos diferentes níveis de consciência de aprendizes ocorre por meio da detecção de erros, de correções e de tentativas de formular explicações cada vez mais sólidas, próprias e coerentes. São esses os aspectos que impactam na provocação da consciência explícita e, conseqüentemente, influencia no desempenho subsequente. Além disso, são essas detecções que permitem aos observadores externos o acesso às evidências do processo subjacente à mudança representacional interna do aprendiz. Assim, apesar de os processos internos não conscientes do aprendiz não serem diretamente observáveis por um observador externo, é possível que realize inferências a partir de sequências comportamentais manifestadas pelo aprendiz.

Oliveira (2009) menciona que o modelo de Redescrição Representacional pode ser aplicado a vários domínios do saber, desde que de maneira específica aos objetos individuais desses domínios e de modo recorrente. Essa afirmação fundamenta-se na defesa de que o desenvolvimento não envolve um processo único para qualquer aprendizagem, mas é específico a cada *domínio*, o qual consiste em um conjunto de representações que detém uma área específica do conhecimento. Assim, pode-se considerar a existência de domínios da Física, da Matemática, da Linguística, etc., de modo que *um domínio* pode ser entendido como “um conjunto de representações que sustentam uma área específica do conhecimento” (LORANDI; KARMILOFF-SMITH, 2012, p. 07, tradução nossa).

Karmiloff-Smith (1994) menciona, ainda, a existência de *micro domínios* como, por exemplo, da força resultante ou da refração da luz, dentro de domínios específicos da Física (domínios da Mecânica e da Óptica, respectivamente). São essas existências que justificam a não concordância absoluta de existência de estágios de desenvolvimento, conforme ideias piagetianas, mas que reforçam a defesa de que existem níveis de desenvolvimento e trocas de fases recorrentes que acontecem em momentos distintos, dentro de cada micro domínio, e destaca que o desenvolvimento está implicado a um processo dinâmico entre a mente e o ambiente. Segundo a autora, o processo de redescrição representacional ocorre de maneira recorrente dentro de micro domínios ao longo de todo o desenvolvimento, inclusive em adultos quando diante de uma nova aprendizagem.

Para esclarecer as ideias de Karmiloff-Smith (1994) a respeito do desenvolvimento cognitivo, segundo pressupostos do modelo teórico que propõe, consideremos o exemplo que ela mesma fornece, o da aprendizagem de tocar piano. Inicialmente, há um período em que se pratica uma sequência determinada de notas, depois são executados blocos compostos por várias notas até que, por fim, a música inteira possa ser tocada de maneira mais ou menos automática. Isso caracteriza o que a autora denomina por *alcançar o domínio procedimental* (ou *procedural*). Contudo, essa automatização implica em o aprendiz saber tocar, de maneira restritiva, apenas essa música. Dessa forma, o conhecimento é gerado por representações procedimentais que apenas executam o conhecimento, porém, com pouca ou nenhuma flexibilidade.

No melhor dos casos, o aprendiz será capaz de tocar mais alto, mais lento ou mais rápido, mas dificilmente conseguirá interromper a música e recomeçar de qualquer parte dela, por exemplo. Para isso, Karmiloff-Smith (1994) defende que seria necessário um processo de redescrição das representações procedimentais, mediante o qual as diferentes notas e acordes possam ser convertidos em dados manipuláveis, permitindo suas utilizações para além da maneira sequencial, o que possibilita ao aprendiz atingir o que a autora denomina por *domínio comportamental*. Dessa forma, o aprendiz será capaz de gerar variações da música, trocar a sequência dos compassos, inserir fragmentos de outras composições, enfim, será capaz de adquirir maior flexibilidade e controle representacional, porém, sem perder a capacidade procedimental anterior. Assim, em momentos oportunos, o aprendiz poderá recorrer a habilidades automatizadas ou a representações mais explícitas, as quais permitem maior criatividade.

A partir desse exemplo, Karmiloff-Smith (1994; 2010) esclarece que existem no desenvolvimento da aprendizagem dois direcionamentos complementares, o *procedimental* e o de *explicitação*. O primeiro contempla um processo gradual de conhecimento procedimental, mais automático e menos acessível conscientemente, enquanto que, o segundo, abrange um processo de explicitação e acessibilidade cada vez maior do conhecimento e estrutura-se na conduta. Ambos os direcionamentos são pertinentes para que ocorram transformações cognitivas da informação armazenada na mente (OLIVEIRA, 2009). Entretanto, a essência do desenvolvimento do modelo teórico de Redescrição Representacional pauta-se no segundo processo, o de explicitação, pois é este que permite ao aprendiz

compreender e manifestar suas próprias reflexões e estratégias (KARMILOFF-SMITH, 2010).

Em síntese, o modelo teórico de Redescrição Representacional visa atender aos aspectos não linguísticos de mudança cognitiva, com foco principal na passagem *recorrente* de representações implícitas para a explicitação representacional progressiva nos vários níveis de processamento, os quais apresentamos mais adiante. Ainda, com o modelo teórico de Redescrição Representacional objetiva-se explicar de que maneira as representações de aprendizes se tornam progressivamente mais manipuláveis e flexíveis, como surge o acesso consciente ao conhecimento e como os conceitos são construídos por esses aprendizes. Abrange, portanto, um processo em que a informação já presente nas representações internas, e que funcionam de maneira independente umas às outras, se tornam progressivamente disponíveis a outras partes do sistema cognitivo devido à intervenção de processos de redescrição representacional (KARMILOFF-SMITH, 1994).

Apesar de o foco de pesquisa de Karmiloff-Smith (2010) ter sido diretamente relacionado à aquisição da linguagem, seu modelo teórico é aplicável, até certo ponto, ao desenvolvimento cognitivo geral. A restrição de “até certo ponto” deve-se ao fato de que o modelo teórico de Redescrição Representacional foi desenvolvido especificamente para contemplar as características inerentes da aprendizagem nos domínios da Linguística. Como exemplo, a própria autora afirma a possibilidade de aplicação de seu modelo teórico aos domínios da Física, da Matemática e da Psicologia (KARMILOFF-SMITH, 1994). Porém, é necessário relevar aspectos representacionais próprios de cada domínio antes de estender a eles a aplicabilidade do modelo de Redescrição Representacional.

Independente do domínio considerado, a explicitação é considerada como instância última a ser atingida pelo aprendiz no processo de aprendizagem, o que não implica no abandono do domínio procedimental. Segundo Karmiloff-Smith (2010), a explicitação é caracterizada como um processo que contempla diferentes níveis. Esse pressuposto é fundamentado na consideração de que a dicotomia entre dois níveis, tais como, implícito/explicito ou procedimental/declarativo, não é suficiente para compreender a natureza complexa dos processos envolvidos no desenvolvimento cognitivo (KARMILOFF-SMITH, 2010). Nesse mesmo sentido, encontramos em Pozo (2005) a defesa de que a compreensão do processo de

explicitação é mais adequada quando ela é concebida como um processo dinâmico e progressivo, contemplando diferentes níveis.

Diante do exposto, no modelo teórico elaborado por Karmiloff-Smith (1994; 2010) a passagem recorrente de representações implícitas à explicitação representacional ocorre de maneira progressiva no decorrer dos níveis diversos de processamento, que compreendem desde o nível de conhecimento implícito (I) até três níveis distintos de explicitação (E-i, E-ii e E-iii). Na sequência, apresentamos e descrevemos cada um desses níveis.

## 5.2 NÍVEIS DE EXPLICITAÇÃO

O modelo teórico de Redescrição Representacional contempla quatro níveis, os quais correspondem a “ciclos *recorrentes* de processos que acontecem continuamente à medida que os diferentes aspectos do sistema linguístico se desenvolvem” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 421). São eles:

- **Implícito (I)**: nesse nível, o conhecimento do aprendiz não é por ele definido de maneira representacional, ou seja, “o fato de diferentes procedimentos terem componentes em comum não está representado internamente de forma explícita” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 418). O aprendiz se atenta às informações externas que estão disponíveis e acumula representações sem modificá-las, estocando-as em sua memória sem estabelecer ligações entre elas (OLIVEIRA, 2009), de modo que as informações são codificadas, porém não são utilizadas procedimentalmente de forma consciente. Segundo Oliveira (2009, p. 54), procedimentos “desta natureza ficam implícitos e inflexíveis e são vistos enquanto conjunto e não como partes”.

As representações armazenadas na mente se caracterizam na forma de padrões de ações, permitindo respostas rápidas e, geralmente, corretas para os estímulos do meio externo como, por exemplo, para uma tarefa a resolver em sala de aula. Mesmo que sejam acumuladas representações semelhantes para uma mesma informação, nesse nível não há estabelecimento de relações entre elas, de modo que são armazenadas e utilizadas independentemente umas das outras.

Karmiloff-Smith (1994) resume algumas restrições que incidem sobre as representações desse primeiro nível, a saber: i) a informação é codificada de forma procedimental; ii) as codificações procedimentais são especificadas de maneira sequencial; iii) as novas representações são armazenadas pelo aprendiz de maneira

independente umas das outras e iv) não são estabelecidos vínculos representacionais, seja dentro ou fora de um determinado domínio.

Portanto, o conhecimento nesse nível não está definido representacionalmente pelo próprio aprendiz. Assim, em um determinado procedimento, os componentes desse conhecimento (ou da informação) são acessados e operados separadamente, sequencialmente e mecanicamente. Em outras palavras, nesse nível, as representações se constituem na forma de procedimentos de análise e de resposta aos estímulos externos, e são produtos da informação que é codificada de forma procedimental e sequencial. Desse modo, as novas representações são armazenadas de maneira independente umas das outras e não há estabelecimento de vínculos representacionais inter ou intra-domínios. As representações desse nível não estão disponíveis a outros operadores do sistema cognitivo e, portanto, os potenciais vínculos representacionais e a informação que contém os procedimentos permanecem implícitos, gerando respostas rápidas, porém, inflexíveis.

Como nesse primeiro nível as representações são armazenadas de maneira independente, ocorre no processo pragmático uma simples correspondência ou não correspondência entre procedimentos e adjunções representacionais, no entanto, nenhuma conexão representacional é definida nessa fase. Uma série de representações são organizadas de maneira desconexa, o que evidencia que o aprendiz ainda não tem acesso consciente às possíveis relações que poderiam ser consideradas óbvias por outra pessoa.

Nessa fase, são comuns situações em que o aprendiz manifesta eficácia em procedimentos que realiza, todavia sem sucesso em generalizar tarefas ou problemas que requerem mesmas operações. No máximo, pode ser apresentado um grande número de procedimentos iguais que caracterizam uma utilização adequada de uma forma representacional específica.

- **Explicitação Primária (E-i):** nesse nível, o conhecimento implícito é redescrito no mesmo código representacional (linguístico, espacial, temporal, etc.) em que existia no primeiro nível. As representações E-i apresentam conexões explicitamente definidas, mas que ainda não estão diretamente acessíveis à consciência e, por isso, não podem ser verbalizadas. As representações do nível E-i “São explícitas no sentido de estarem disponíveis na memória, mas implícitas, no sentido de não permitirem acesso consciente” (AUGÉ, 2014, p. 37).

Segundo Karmiloff-Smith (2010), nesse nível as representações implícitas (caracterizadas como procedurais) não são deletadas, mas são redescritas em um nível de explicitação primário, possibilitando que elas sejam manipuladas internamente e que relações entre representações, dentro de um mesmo código, comecem a ser definidas, porém, ainda não há acesso consciente. Na prática, essa afirmação pode ser evidenciada a partir de erros recorrentes apresentados pelo aprendiz durante processos metaprocedurais, em que tais erros estão associados às tentativas equivocadas de associações entre representações distintas, as quais estão atreladas ao processo de redescrição representacional.

As representações desse nível, originadas de um primeiro processo de redescrição, podem apresentar uma grande redução de detalhes se comparado às informações codificadas proceduralmente no nível I, pois são produtos de analogias e simplificações da representação original. Por outro lado, a representação redescrita é cognitivamente mais flexível, pois são produzidas pelo próprio aprendiz, permitindo-o manipulá-las e colocá-las em relação com outras representações redescritas. Por isso, considera-se que nesse nível, o conhecimento é definido explicitamente. Contudo, é exatamente o fato de re-representar que pode conduzir o aprendiz a violar descrições verdadeiras, compreender crenças falsas e utilizar expressões contrárias aos fatos. Isso porque, nesse nível, ainda não se tem acesso consciente às representações, o que explica a manifestação de erros serem mais comuns.

Precisamente, o segundo nível é caracterizado pelo fato de o aprendiz passar de um estágio de armazenamento independente de representações, para um estágio em que começa a se concentrar na organização dessas representações que foram armazenadas. É essa característica que marca o processo inicial de codificação da forma implícita para a forma explícita, ou seja, ocorre a redescrição de representações do primeiro nível em uma forma que permite o acesso ao conhecimento, mesmo que ainda esse acesso seja não consciente (KARMILOFF-SMITH, 2010).

Todavia, essa carga de processamento interno é muito intensa para o aprendiz, o que provoca a ocorrência de novos erros e/ou reparos. Estes são manifestados pelo aprendiz por diferentes formas durante seu anseio em distinguir externamente as novas conexões que estão sendo estabelecidas internamente. Além disso, tais manifestações podem ser entendidas como “escoras de

processamento cognitivo” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 427), uma analogia com os casos de crianças que utilizam os dedos das mãos como apoio durante os primeiros momentos da aprendizagem de contagem. Segundo a autora, o acesso consciente e a verbalização só são alcançados a partir da superação do nível E-i, que começa na segunda redescrição representacional.

- **Explicitação Secundária (E-ii):** as representações desse nível são produtos de uma segunda redescrição sobre representações do nível anterior (E-i). Essa segunda redescrição possibilita o acesso consciente de maneira não restrita ao código linguístico, ou seja, ainda sem expressividade verbal. Segundo Karmiloff-Smith (1994, p. 43), isso quer dizer que há “representações espaciais, cinestésicas ou de outro tipo codificadas de modo não linguístico” e que são acessíveis à consciência.

Nesse terceiro nível, as representações ainda não são verbalizadas, mas estão acessíveis à consciência, pois as representações do aprendiz são inteligíveis à reflexão no instante de produção e compreensão, ou seja, no momento atual de utilização (OLIVEIRA, 2009). Assim, a característica mais marcante de mudança do segundo para o terceiro nível é a “consolidação e estabilidade com relação à definição explícita de conexões representacionais internas” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 429).

- **Explicitação Terciária (E-iii):** nesse último nível, a redescrição representacional ocorre para traduzir as representações E-ii de um código para outro. A partir do momento em que o aprendiz inicia a reconciliação entre representações internas e dados externos, sendo capaz de realizar com facilidade o estabelecimento de novas relações entre representações de entrada e de saída, bem como de integrar diferentes representações em um código único, mais próximo da linguagem natural, é que o mesmo estará transitando entre os níveis E-ii e E-iii (KARMILOFF-SMITH, 1994).

No nível E-iii, diferentes códigos estão envolvidos no processo de tradução, no entanto, códigos abstratos têm posição de destaque dentre os demais por serem mais receptivos à codificação linguística, tornando possível explicitar o conhecimento metacognitivo de forma verbalizável (KARMILOFF-SMITH, 2010). Assim, segundo a autora, é somente nesse último nível

[...] que múltiplas representações do mesmo conhecimento em diferentes códigos conectam-se de forma explícita através de um código comum. A

conexão de múltiplas representações de conhecimentos equivalentes entre diferentes códigos dá maior flexibilidade ao sistema cognitivo humano (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 420).

Ainda, é nesse último nível de explicitação que as “representações são recodificadas em um código suficientemente próximo da língua natural de modo que esta as traduz facilmente em forma verbalizável e comunicável” (OLIVEIRA, 2009, p. 55). São tais verbalizações que permitem a um observador externo inferir com maior precisão quando o aprendiz atingiu o acesso consciente ao conhecimento.

Pannuti (2006) defende que a explicitação verbal e consciente do conhecimento, que previamente esteve contido em procedimentos isolados, é essencial para que relações entre tais procedimentos sejam estabelecidas. A partir da evidenciação e estabelecimento de tais relações, novas compreensões são possibilitadas e maior criatividade e plasticidade de pensamento e ações é atingida. Segundo a autora, o resultado de toda a série de redescições é coexistir na mente múltiplas representações do mesmo conhecimento, com diferentes níveis de detalhe e de expressão. Quando o conhecimento é recodificado de maneira a abranger todos esses sistemas representacionais em um código comum, atinge-se o nível E-iii.

Para ilustrar como identificar os níveis de explicitação, citamos, como exemplo, o experimento de equilíbrio de blocos realizado e analisado por Karmiloff-Smith (1994), o qual consistiu em solicitar para crianças de idades entre quatro e nove anos a colocação de alguns blocos distintos em equilíbrio sobre um suporte de metal estreito. O experimento com blocos foi realizado de três maneiras: i) alguns blocos tinham seus pesos distribuídos de maneira uniforme, de modo que o ponto de equilíbrio era o seu centro geométrico; ii) em alguns blocos foram introduzidos chumbo em um extremo interno, de modo que seus aspectos exteriores permaneceram idênticos aos dos blocos normais, porém com pontos de equilíbrio deslocados do centro de gravidade; e, iii) em alguns blocos foram introduzidos contrapesos claramente visíveis, de modo que seus pontos de equilíbrio também ficaram deslocados do centro de gravidade.

Foi observado que as crianças de quatro e cinco anos de idade resolveram a tarefa com muita facilidade, pautados na informação que emanou de dados observáveis. Essas crianças deslizaram cada um dos blocos ao longo do suporte, identificando as posições de desequilíbrio e corrigindo sua posição. O mesmo

procedimento foi realizado de maneira independente para cada bloco, ou seja, as crianças deslizavam cada bloco sobre o suporte, sem tentar estabelecer relação com os blocos já equilibrados por elas, tratando cada situação como uma nova tarefa. Segundo Karmiloff-Smith (1994), o fato de essas crianças terem armazenado informações sobre cada bloco de maneira independente, bem como por suas condutas terem sido controladas pelos dados empíricos, seus conhecimentos no domínio de equilíbrio de blocos foram caracterizados como de nível I.

Em contrapartida, crianças de seis e sete anos de idade não apresentaram o mesmo sucesso na realização do experimento de equilíbrio de blocos. Segundo Karmiloff-Smith (1994), elas foram orientadas pelo que denominou de “teoria em ação”, que não era explicada verbalmente pelas crianças, mas que esteja subjacente às suas condutas. Essa “teoria em ação” era restrita à ideia de simetria, em que “a teoria do centro geométrico estipula que todos os objetos se equilibram simetricamente a respeito de sua longitude” (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 115. Tradução nossa). Diante disso, a autora afirmou que as crianças de seis anos manifestaram conhecimento em nível E-i, uma vez que a “teoria em ação” elaborada e considerada caracteriza redescritção de representação armazenada em nível I sobre como se equilibram os objetos: “são simétricos e se equilibram em seu centro de gravidade” (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 115. Tradução nossa). Entretanto, apesar dessa informação ser comum e válida para muitos objetos, não se aplica a todos os objetos. Nesse caso, na redescritção realizada, a essência da representação original foi reduzida, de modo que alguns detalhes não foram considerados.

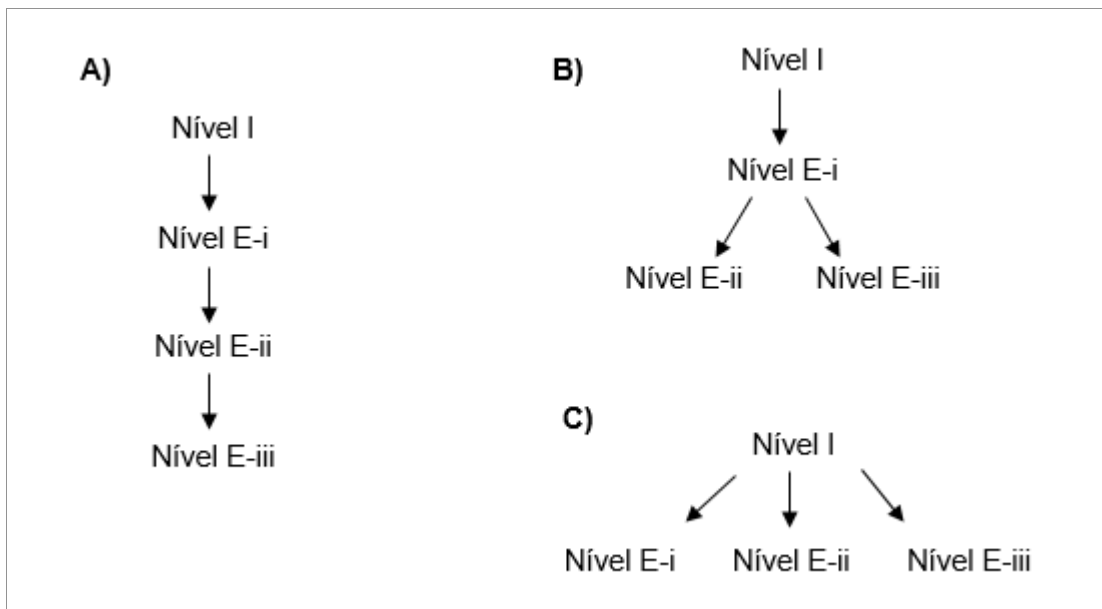
Karmiloff-Smith (1994) enfatiza que uma observação interessante realizada nesses casos é que, apesar do fracasso das crianças de seis anos ao tentar equilibrar blocos com pesos adicionais, elas realizavam outra tentativa de maneira idêntica, ou seja, segundo o centro de gravidade pautado na ideia de simetria. Elas não abandonavam e nem modificavam sua teoria diante dos fracassos em equilibrar os blocos. O abandono ou modificação da teoria dependeria de um novo processo de redescritção representacional.

As crianças de oito e nove anos de idade conseguiram colocar todos os blocos em equilíbrio, porém em um nível de conhecimento superior aos de crianças de quatro e cinco anos. Segundo Karmiloff-Smith (1994), o nível de conhecimento manifestado foi entre E-ii e E-iii, pois tinham conhecimento explícito sobre centro

geométrico e teoria intuitiva sobre a lei de torque, conhecimentos esses que foram identificados por meio da conduta e/ou da verbalização.

Karmiloff-Smith (1994) não descarta a possibilidade de que determinados conhecimentos possam ser aprendidos diretamente de maneira linguística se armazenadas dessa forma imediatamente no nível E-iii, desde que sejam estabelecidos vínculos entre este e outros conhecimentos similares armazenados em outros códigos. Além disso, Karmiloff-Smith (2010) adverte para o fato de que pode demandar muito tempo desenvolvimental para que um aprendiz chegue aos níveis E-ii e E-iii ou, até mesmo, pode ser que nunca os consiga atingir. Especificamente, a autora afirma que, apesar do modelo teórico de Redescrição Representacional ser apresentado como hierárquico, nada impede que a redescrição ocorra de distintas maneiras, conforme ilustra a figura a seguir:

**Figura 6** – Modelos alternativos de redescrição representacional



**Fonte:** adaptada de Karmiloff-Smith (1994, p. 44)

Na figura 6, evidenciamos três modelos alternativos de Redescrição Representacional. O modelo A apresenta a ordem hierárquica da redescrição implícita à de nível E-iii, contemplando sequencialmente todos os níveis do modelo de Redescrição Representacional. O modelo B apresenta um ponto de vista distinto, em que a partir do nível E-i há a possibilidade de se redescrever diretamente aos níveis E-ii ou E-iii. E, ainda, o modelo C apresenta a possibilidade de redescrição

direta do nível I diretamente a um dos níveis de representação explícita, E-i, E-ii ou E-iii.

A partir do experimento com equilíbrio de blocos, proposto por Karmiloff-Smith (1994) a crianças com idades entre quatro e nove anos, podemos elaborar exemplos para ilustrar os modelos alternativos apresentados na figura 6. No processo do item (A), a criança, inicialmente, acumularia informações empíricas, tal como fizeram as crianças de quatro e cinco anos no experimento proposto por Karmiloff-Smith (1994), caracterizando o nível I. Após primeira redescrição dessas representações, a criança daria início aos primeiros estabelecimentos de relações entre representações armazenadas em sua mente, produzindo teorias e representações com informações reduzidas ou, até mesmo, equivocadas, tal como realizaram as crianças de seis e sete anos que participaram do experimento de equilíbrio de blocos, manifestando conhecimento de nível E-i. Após outro processo de redescrição representacional, a criança poderia realizar corretamente o equilíbrio de blocos de pesos distintos, fundamentando-se em conhecimentos teóricos e empíricos, ou seja, associando distintas representações armazenadas em sua mente. Essa associação aconteceria conscientemente, primeiro, sem verbalização dos conhecimentos mobilizados (nível E-ii) e, em seguida, após outro processo de redescrição representacional, com explicitação verbal (nível E-iii).

No processo do item (B), a transição entre os níveis I, E-i e E-ii aconteceriam da mesma forma que para o item (A). O diferencial é que não necessariamente a criança poderia manifestar características do nível E-ii, mas poderia diretamente atingir a explicitação verbal de seus conhecimentos (nível E-iii).

Por fim, no processo do item (C), a partir dos conhecimentos empíricos codificados e armazenados de maneira independente, a criança poderia transitar diretamente para qualquer um dos níveis de explicitação (E-i, E-ii ou E-iii), apresentando características destes, conforme exemplificados, respectivamente, no item (A).

Oliveira (2009) apresenta um quadro resumo de algumas das principais características do modelo de Redescrição Representacional, proposto por Karmiloff-Smith (1994; 2010):

**Quadro 1** – Características do Modelo de Redescrição Representacional

	<i>Nível Implícito (I)</i>	<i>Nível Explícito 1 (E-i)</i>	<i>Nível Explícito 2 (E-ii)</i>	<i>Nível Explícito 3 (E-iii)</i>
<i>Predominância de erros</i>	Não	Sim	Não	Não
<i>Acesso consciente ao conhecimento</i>	Não	Não	Sim	Sim
<i>Explicitação verbal do conhecimento</i>	Não	Não	Não	Sim
	<i>Natureza epilinguística</i>		<i>Natureza metalinguística</i>	

**Fonte:** Adaptado de Oliveira (2009, p. 56)

O quadro resumo mostra dois níveis que melhor representam a evolução das representações linguísticas do aprendiz, E-ii e E-iii, em que emergem as suas atividades metalinguísticas ao lidar com a linguagem (OLIVEIRA, 2009). Os níveis inferiores são de natureza epilinguística, que correspondem a atividades não conscientes, manifestadas de maneira habitual e ordenada pelo locutor (CULIOLI, 1990).

## 6 INSTRUMENTO ANALÍTICO

A partir das abordagens apresentadas nos capítulos anteriores, preparamos o caminho para vincular correlações que evidenciamos entre Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 1998; 2008; 2009a; 2009b; 2009c; 2017), Diversidade Representacional (LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; PRAIN; WALDRIP, 2006; AINSWORTH, 1999; DUVAL, 2003; 2009a; 2009b; 2012; entre outros) e Redescrição Representacional (KARMILOFF-SMITH, 1994; 2010) em relação às aprendizagens científica e matemática, sobretudo, da Física.

Fundamentados nas revisões teóricas mencionadas, neste capítulo, esclarecemos e articulamos os principais elementos e ideias dessas teorias que apresentam implicações diretas aos propósitos desta pesquisa. A partir disso, construímos um instrumento analítico para ser utilizado na investigação de indícios de construções cognitivas de estudantes em aprendizagem em Física. O intuito é que esse instrumento seja utilizado para inferir e categorizar diferentes níveis de explicitação de conhecimentos em domínios e momentos de aprendizagem específicos, considerando que esses níveis de explicitação estão associados aos diferentes graus de apropriação conceitual.

Nas seções a seguir, apresentamos, primeiramente, a articulação teórica que foi realizada a partir da identificação e descrição dos elementos e ideias convergentes entre as três perspectivas teóricas adotadas nessa pesquisa. Para isso, selecionamos e agrupamos fragmentos de textos referentes a cada uma dessas teorias.

Em seguida, apresentamos e discutimos o instrumento analítico que propomos, o qual foi subsidiado pelas compreensões provenientes da identificação e articulação de leituras convergentes entre os referenciais teóricos adotados. Esse instrumento analítico é caracterizado como uma reestruturação do modelo original de Redescrição Representacional (KARMILOFF-SMITH, 1994; 2010), com vistas a atender especificidades das aprendizagens científica e matemática (em específico a da Física), tendo em conta os desafios representacionais que as circunstanciam. São essas especificidades que justificam a integração e articulação de elementos da Teoria dos Campos Conceituais e da Diversidade Representacional ao modelo original de Redescrição Representacional.

## 6.1 ARTICULAÇÃO TEÓRICA

Para a constituição do nosso instrumento analítico, iniciamos por um longo período dedicado aos estudos de diversos artigos e livros produzidos diretamente por autores das teorias e linha de pesquisa contempladas nessa pesquisa, quanto por outros autores fundamentados nessas mesmas perspectivas teóricas. Desses artigos e livros, selecionamos alguns fragmentos de textos em que privilegiamos aqueles contidos em documentos produzidos diretamente pelos autores da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2009a; 2009c; 2017), por nomes associados à linha de pesquisa da Diversidade Representacional (DUVAL, 2009b; AINSWORTH, 1999; PRAIN; WALDRIP, 2006; WON; YOON; TREAGUST, 2014; LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011; LABURÚ; SILVA, 2011b; RADFORD, 2006) e do modelo de Redescrição Representacional (KARMILOFF-SMITH, 1994; 2010).

Ressaltamos que esse mesmo procedimento de identificação de leituras convergentes entre distintas teorias foi realizado em um momento anterior, considerando apenas a Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional. Nesse estudo, o qual resultou na publicação de um artigo científico, evidenciamos que ambas as perspectivas teóricas convergem para a concepção de que as representações são essenciais para processos operacionais e comunicacionais, em que as transformações inter e intrarepresentacionais são entendidas como o centro de todos esses processos, pois contribuem para a significação de conceitos por parte do estudante (BONI; LABURÚ; CAMARGO FILHO, 2018).

Para incluir os pressupostos teóricos da Redescrição Representacional, a qual foi inserida à pesquisa em um momento posterior à produção do artigo mencionado, reiniciamos todo o processo de leitura e seleção de fragmentos de textos referentes a cada uma das três perspectivas teóricas. Para a seleção desses fragmentos, adotamos como critério citações que julgamos características de cada teoria e que fazem referência às propriedades e atribuições das representações em relação ao desenvolvimento cognitivo em Ciências e Matemática. Esses fragmentos foram organizados, primeiro, considerando o universo de citações de um mesmo referencial teórico e, depois, entre os fragmentos dos referenciais das demais perspectivas teóricas, visando obter um panorama das possíveis convergências.

Para essa organização, realizamos agrupamentos por abordagens que ponderamos relevantes ao estudo proposto, reunindo leituras convergentes entre as teorias. Dessa forma, constituímos oito agrupamentos codificados como A1, A2, e assim por diante, representando, respectivamente, agrupamento um, agrupamento dois e, assim, sucessivamente. Esclarecemos que esses agrupamentos foram ordenados aleatoriamente, ou seja, a ordenação não se refere a algum critério específico de relevância. Além disso, os agrupamentos não representam o instrumento analítico que elaboramos, mas nos auxiliaram para o aprofundamento dos estudos teóricos e, portanto, foram fundamentais para a construção desse instrumento. Por esse motivo, decidimos descrevê-los.

Enfatizamos, ainda, que o processo de seleção e de agrupamento de citações dos referenciais teóricos foi realizado à luz da Análise Textual Discursiva (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2011), que é uma modalidade de análise da pesquisa qualitativa<sup>8</sup>.

A seguir, apresentamos em um quadro cada um dos oito agrupamentos, respectivamente com exemplos de fragmentos de textos, segundo cada teoria. Vale ressaltar que os fragmentos apresentados no quadro a seguir são apenas alguns exemplos dentre aqueles que identificamos. Optamos por apresentar exemplos devido à existência de redundâncias entre fragmentos de textos de um mesmo agrupamento e perspectiva teórica, o que nos conduziu ao entendimento de que apenas excertos representativos seriam suficientes para fazermos alusão à descrição e justificativa de cada agrupamento.

---

<sup>8</sup> Essa modalidade de análise da pesquisa qualitativa, a Análise Textual Discursiva, é descrita no capítulo em que apresentamos os procedimentos metodológicos (ver subseção 7.4.1).

**Quadro 2 – Agrupamentos dos fragmentos de textos correspondentes às referências teóricas da pesquisa**

TEORIAS → AGRUPAMENTOS ↓		TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	DIVERSIDADE REPRESENTACIONAL	REDESCRIÇÃO REPRESENTACIONAL (RR)
<b>A1</b>	<i>Existem aspectos comuns entre cada representação e o seu referente, bem como entre representações de um mesmo referente, porém, sem total redundância entre eles.</i>	<p>“A noção de homomorfismo primeiramente se aplica à função que faz passar da realidade à representação. [...] não significa que a representação reflita toda a realidade, nem que toda representação seja necessariamente homomorfa à realidade” (VERGNAUD, 2009a, p. 299).</p> <p>“Existem homomorfismos não somente entre a realidade, de um lado, e as representações, de outro, mas também entre as diferentes formas de representação” (VERGNAUD, 2009a, p. 300).</p>	<p>“[...] <i>toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual</i>” (DUVAL, 2009b, p. 91. Grifos do autor).</p> <p>“[...] há duas sub-classes de categoria (a) em que cada representação codifica aspectos únicos de um domínio e apresenta informações diferentes e (b) em que há um grau de informação redundante partilhada pelos dois, assim como a informação original para cada”<sup>9</sup> (AINSWORTH, 1999, p. 137).</p>	<p>“O modelo RR postula a existência de distintos formatos de representação em cada nível. [...] As representações do nível I estão entre parêntesis, pois não podem ser formados vínculos representacionais inter ou intradomínios”<sup>10</sup> (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 40).</p> <p>“As re descrições são abstrações em uma linguagem de nível superior e, diferente das representações de nível I, não estão postas entre parênteses (quer dizer, as partes componentes estão abertas a potenciais vínculos representacionais intra e interdomínios). As representações E1 são descrições reduzidas que perdem numerosos detalhes da informação codificada proceduralmente”<sup>11</sup> (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 40).</p>

<sup>9</sup> Tradução nossa de: “[...] there are two sub-classes of this category (a) where each representation encodes unique aspects of a domain and presents different information and (b) where there is a degree of redundant information shared by the two as well as information unique to each”.

<sup>10</sup> Tradução nossa de: “El modelo RR postula la existencia de distintos formatos de representación en cada nivel. [...] Las representaciones del nivel I están entre paréntesis, por lo que aún no pueden formarse vínculos representacionales inter o intradominios”.

<sup>11</sup> Tradução nossa de: “Las re descripciones son abstracciones en un lenguaje de nivel superior y, a diferencia de las representaciones de nivel I, no están puestas entre paréntesis (es decir, las partes componentes están abiertas a potenciales vínculos representacionales intra e interdomínios). Las representaciones E1 son descripciones reducidas que pierden numerosos detalles de la información codificada proceduralmente”.

A2	<p><i>Por meio de representações externas o sujeito comunica indícios de representações mentais.</i></p>	<p>“Para compreender a realidade e agir sobre ela, a criança constrói representações mentais dessa realidade. Entre essas representações, algumas não são acessíveis ao observador externo [...]. Mas certas representações são objetiváveis, no sentido de que podemos delas perceber indicadores importantes nas produções do sujeito (palavras pronunciadas, desenhos, gestos analógicos, operações feitas pelos sujeitos, etc)” (VERGNAUD, 2009a, p. 86).</p>	<p>“As representações semióticas [...] parecem apenas ser o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, as tornarem visíveis ou acessíveis a outro (DUVAL, 2009b, p. 15).</p> <p>“[...] pode haver uma grande diferença entre as representações mentais de um sujeito e as representações semióticas que ele produz para exprimir suas representações mentais” (DUVAL, 2009b, p. 45-46).</p>	<p>“A carga computacional gerada por operações metaprocedurais torna necessário, frequentemente, que a criança marque externamente, isto é, comportamentalmente, as novas conexões que se tornaram definidas internamente” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 427).</p> <p>“[...] a maioria dos estudos metacognitivos, se não todos, se concentram na expressividade verbal (quer dizer, no nível E3). Porém, como eu já havia dito, não quero renunciar de antemão a possibilidade de que hajam representações espaciais, cinestésicas ou de outro tipo codificadas de modo não linguístico e que são acessíveis à consciência. Existe, por conseguinte, níveis em que um mesmo conhecimento pode representar-se”<sup>12</sup> (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 43).</p>
A3	<p><i>Além de para fins comunicacionais, as representações externas são essenciais para o desenvolvimento procedimental e cognitivo.</i></p>	<p>“[...] pode-se dizer que o pensamento consiste, ao mesmo tempo, em operações conceituais e pré-conceituais sobre os significados, e em operações simbólicas sobre os significantes, significantes estes que formam vários sistemas simbólicos distintos, tendo eles entre si próprios e com o significado” (VERGNAUD, 2009a, p. 300).</p> <p>“[...] Em outras palavras, toda representação funcional deve [...] prestar-se a operações, isto é, ao que, no início deste livro chamamos de “cálculo relacional” (VERGNAUD, 2009a, p. 304. Grifos do autor).</p>	<p>“[...] as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade” (DUVAL, 2009b, p. 15).</p> <p>“As representações externas preenchem então uma função de comunicação. Mas elas preenchem igualmente duas outras funções cognitivas: a função de objetivação, como todas as representações conscientes, e a função de tratamento” (DUVAL, 2009b, p. 42).</p>	<p>“A carga computacional gerada por operações metaprocedurais torna necessário, frequentemente, que a criança marque externamente, isto é, comportamentalmente, as novas conexões que se tornaram definidas internamente. Em minha opinião, essa marcação comportamental age como uma forma de “escora de processamento cognitivo” (cognitive processing prop)” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 427).</p> <p>“[...] uma vez que representações cinestésicas, espaciais e temporais, assim como as representações de conhecimento linguístico, são representadas em um código comum, isso permitiria que a definição explícita das conexões representacionais operasse no sistema cognitivo” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 476).</p>

<sup>12</sup> Tradução nossa de: “[...] la mayoría de los estudios metacognitivos, si no todos, se centran en la expresabilidad verbal (es decir, en el nivel E3). Sin embargo, como ya he dicho, no quiero renunciar de antemano a la posibilidad de que haya representaciones espaciales, cinestésicas o de otro tipo codificadas de modo no lingüístico y que sean accesibles a la conciencia. Existen, por consiguiente, múltiples niveles en los que un mismo conocimiento puede representarse”.

<b>A4</b>	<i>A aprendizagem está atrelada à coordenação representacional.</i>	<p>“É com a ajuda simultânea dessas diferentes representações que a criança raciocina, passando de um plano a outro em função de necessidades e relações com as quais ela tem que tratar. Pensar consiste não apenas em passar de uma situação real à representação, mas em passar de uma representação à outra e a ela retornar” (VERGNAUD, 2009a, p. 301).</p>	<p>“A questão da coordenação dos registros e os fatores suscetíveis de favorecer esta coordenação aparecem então como questões centrais para as aprendizagens intelectuais” (DUVAL, 2009b, p. 39).</p> <p>“[...] para aprender ciência de forma eficaz os alunos devem compreender diferentes representações de conceitos e processos científicos, ser capaz de traduzi-los em um outro, bem como compreender a sua utilização coordenada na representação do conhecimento científico”<sup>13</sup> (PRAIN; WALDRIP, 2006, p. 1844)</p>	<p>“A conexão de múltiplas representações de conhecimentos equivalentes entre diferentes códigos dá maior flexibilidade ao sistema cognitivo humano” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 420).</p>
<b>A5</b>	<i>A estrutura cognitiva prévia é considerada como um fator relevante para a construção de novas aprendizagens.</i>	<p>“A Teoria dos Campos Conceituais destaca que a aquisição de conhecimento é moldada pelas situações e problemas previamente dominados e que esse conhecimento tem, portanto, muitas características contextuais” (VERGNAUD; MOREIRA, 2017, p. 90).</p> <p>“O conhecimento prévio é determinante no progressivo domínio de um Campo Conceitual, mas pode também, em alguns casos, ser impeditivo. Continuidades e rupturas não são, no entanto, excludentes. Pode haver continuidade e ruptura” (VERGNAUD; MOREIRA, 2017, p. 93).</p>	<p>“Compreensão e reconstrução de representações diferentes em relação um ao outro é um processo altamente personalizado, e até com o mesmo conjunto de representações, os alunos poderão utilizá-los de maneiras bem diferentes (Eilam, 2013), em função do seu conhecimento prévio do tópico (Cook, Carter, e Wiebe, 2008)”<sup>14</sup> (WON; YOON; TREAGUST, 2014, p. 843).</p> <p>“[...] os conhecimentos e experiências prévias dos aprendizes são relacionados, estimulando o desenvolvimento de ulteriores compreensões” (LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011, p. 481).</p>	<p>“[...] conexões definidas de forma explícita são estabelecidas entre entradas previamente representadas de modo independente” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 428).</p> <p>“A perspectiva do desenvolvimento é essencial para a análise do conhecimento humano porque o fato de entender a arquitetura preestabelecida da mente humana, as restrições de aprendizagem e <i>como muda o conhecimento progressivamente ao longo do tempo</i> pode nos dar pistas sutis acerca de seu formato final de representação na mente do adulto”<sup>15</sup> (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 46. Grifos do autor).</p>

<sup>13</sup> Tradução nossa de “[...] to learn science effectively students must understand different representations of science concepts and processes, be able to translate them into one another, as well as understand their coordinated use in representing scientific knowledge”.

<sup>14</sup> Tradução nossa de: “Understanding and reconstructing different representations in relation to one another is a highly personalized process, and even with the same set of representations, students might utilize them in quite different ways (Eilam, 2013), depending on their prior knowledge of the topic (Cook, Carter, & Wiebe, 2008)”.

<sup>15</sup> Tradução nossa de: “La perspectiva del desarrollo es esencial para el análisis del conocimiento humano porque el hecho de comprender la arquitectura preestablecida de la mente humana, las restricciones del aprendizaje y *cómo cambia el conocimiento progresivamente a lo largo del tiempo* puede darnos pistas sutiles acerca de su formato final de representación en la mente del adulto”.

A6	<p><i>A aprendizagem se caracteriza como a capacidade de ir além de saber fazer, mas ser capaz de expressar o que se sabe e o que se faz.</i></p>	<p>“A aprendizagem conceitual inclui a procedimental. Se, de verdade, queremos que os estudantes compreendam os procedimentos científicos eles devem ser capazes de expressar o que estão fazendo; no sentido que aqui temos trabalhado. Esse saber dizer o que se está fazendo é também uma aprendizagem conceitual” (GRECA; MOREIRA, 2003, p. 64).</p> <p>“Então é necessário estabelecer o vínculo entre a formação de conceitos em situações na ação e, a seguir, de forma textual, enunciativa” (VERGNAUD, 2017, p. 19).</p>	<p>“Enquanto claramente alguns recursos e tecnologias promovem a aquisição de competências, e esta aquisição pode ser uma parte importante do desenvolvimento da aprendizagem, esse domínio em si não significa automaticamente aprendizagem em ciência. Estudantes precisavam ser capazes de explicar o fracasso de algumas representações 2D propostas para indicar o seu “conhecimento consciente”<sup>16</sup> (PRAIN; WALDRIP, 2006, p. 1863).</p> <p>“No marco do delineamento de um problema ou conhecimento científico, o êxito no trato da simbologia envolvida vai depender da articulação entre a apreensão operatória simbólica das representações e o manejo discursivo integrado das inferências em múltiplas representações, provocando a mobilização de uma rede de definições, conceitos e leis” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p. 28).</p>	<p>“O desenvolvimento e a aprendizagem parecem, portanto, adotar dois direcionamentos complementares. Por uma parte, se baseiam em processo gradual de procedimentalização (quer dizer, fazer com que o conhecimento seja mais automático e menos acessível). Por outro, implicam num processo de ‘explicitação’ e acessibilidade cada vez maior do conhecimento (quer dizer, representar explicitamente a informação implícita nas representações procedimentais em que se apoia a estrutura da conduta). Ambos os processos são importantes na mudança cognitiva”<sup>17</sup> (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 36).</p> <p>“Existem duas formas de estudar o conhecimento de uma criança: ou ela nos diz, a seu modo, o que sabe, ou nós inferimos o que ela sabe a partir da análise de suas produções” (LORANDI; KARMILOFF-SMITH, 2012).</p>
----	---	---	--	---

<sup>16</sup> Tradução nossa de: “While clearly some resources and technology promote acquisition skills, and this acquisition can be an important part of developing learning, this mastery in itself does not automatically signify learning in science. Students needed to be able to explain the failure of some proposed 2D representations to indicate their “conscious knowledge””.

<sup>17</sup> Tradução nossa de: “El desarrollo y el aprendizaje parecen, por tanto, adoptar dos direcciones complementarias. Por una parte, se basan en el proceso gradual de procedimentalización (es decir, hacer que el conocimiento sea más automático y menos accesible). Por otra, implican un proceso de ‘explicitación’ y accesibilidad cada vez mayor del conocimiento (es decir, representar explícitamente la información implícita en las representaciones procedimentales en que se apoia la estructura de la conducta). Ambos procesos son importantes en el cambio cognitivo”.

<p><b>A7</b></p>	<p><i>A linguagem verbal tem papel de destaque dentre as demais representações.</i></p>	<p>“As formas predicativas do conhecimento são mais analíticas que as formas operatórias do conhecimento que utilizamos na ação, mesmo que, paradoxalmente, são as formas operatórias as fontes das formas predicativas” (VERGNAUD; MOREIRA, 2017, p. 46).</p> <p>“Quando as conceitualizações se inserem na linguagem natural a comunicação e a argumentação enriquecem seu alcance” (VERGNAUD, 2017, p. 82).</p> <p>“Mais que isso, o interesse pela identificação e compreensão de esquemas é mais uma oportunidade de interação aluno-professor, na construção de um diálogo [...]. Este diálogo de evidência dos esquemas é uma chave para a necessária e urgente mudança da organização do trabalho pedagógico, assumindo a verbalização do aluno sobre suas produções como parte essencial da produção matemática na escola” (MUNIZ, 2009, p. 51).</p>	<p>“Para Lotman (apud Eco, 2003, p. 152), a linguagem oral, ou de maneira geral, a linguagem verbal poderia ser definida como o sistema modelizante primário do qual os demais são derivados. Ela é a maneira mais adequada através da qual o homem traduz especularmente os seus pensamentos, de modo que falar e pensar seriam áreas privilegiadas do investigar semiótico. Toda experiência humana e todo conteúdo exprimível por meio de outros artifícios semióticos deveriam poder ser traduzidos em termos verbais, sem que o inverso fosse possível” (LABURÚ; SILVA, 2011b, p. 25).</p> <p>“A língua natural tem um estatuto à parte entre o conjunto dos sistemas semióticos possíveis. Benveniste considerava-a como “a organização semiótica por excelência” (1974, p. 62-63). [...] A potência da língua natural dá valor ao fato de que ela é o sistema semiótico que permite completar dentro de um mesmo ato intencional todas as grandes funções discursivas” (DUVAL, 2009b, p. 22).</p>	<p>“Embora os diferentes códigos estejam todos envolvidos nesse processo de tradução, o código que prevalece na redescrção E-iii é abstrato (alguma forma de “mentais”), que não sofre limitações espaciais, temporais e causais, inerentes à maioria dos outros códigos representacionais. Logo, esse código abstrato é mais receptivo à codificação linguística do que outros códigos, o que explica porque, no final, o conhecimento metacognitivo está frequentemente disponível de forma verbalizável” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 420).</p>
------------------	---	---	--	--

<p><b>A8</b></p>	<p><i>Existem diferentes níveis cognitivos que abrangem desde representações não conscientes, até o acesso consciente ao conhecimento, em que este nem sempre é passível de ser exteriorizado.</i></p>	<p>“Em muitos domínios, em muitos aspectos da nossa vida, a tomada de consciência – que não é, necessariamente, sempre explícita – consiste em mudar nosso ponto de vista sobre os objetos, sobre as propriedades e os atrativos desses objetos” (VERGNAUD, 2017, p. 52).</p> <p>“Para maior clareza é preciso distinguir diferentes níveis de consciência das regras de ação, ou melhor, das “regras de produção das ações do sujeito” [...]. Algumas dessas regras são conscientes, evidentemente, mas elas podem ser inconscientes [...]” (VERGNAUD, 2009a, p. 313).</p>	<p>“A passagem do não-consciente ao consciente corresponde a um processo de objetivação para o sujeito que toma consciência. A objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado. [...] A significação é a condição necessária de objetivação para o sujeito, isto é, da possibilidade de tomar consciência” (DUVAL, 2009b, p. 40-41).</p> <p>“Uma representação interna pode ser consciente ou não-consciente, enquanto que uma representação consciente pode ser, ou não, exteriorizada” (DUVAL, 2009b, p. 43).</p> <p>“A generalidade Factual fornece a matéria-prima que, através de sucessivas <i>contrações semióticas</i>, os alunos mais tarde transformam em formas mais elevadas de generalidade algébrica. A questão aqui não é apenas para dizer a mesma coisa em um código diferente. É um pouco sobre o acesso a formas mais profundas da consciência”<sup>18</sup> (RADFORD, 2006, p. 16. Grifos do autor).</p>	<p>“Meu argumento geral é que as dicotomias de dois níveis, usadas até agora, como implícito/explicito, procedural/declarativo, primeira ordem/segunda ordem, inconsciente/consciente, representacional/metarepresentacional, etc, são insuficientes para captar a natureza complexa dos processos que levam ao acesso consciente. Os diferentes níveis de redescrição e explicitação representacional definidos acima são relevantes para processos gerais de mudança” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 420-1).</p> <p>“[...] no presente modelo, a consciência é uma propriedade emergente do sistema cognitivo geral e de seus processos de gradual explicitação representacional” (KARMILOFF-SMITH, 2010, p. 472).</p>
------------------	--	---	--	--

Fonte: dos autores (2018)

<sup>18</sup> Tradução nossa de: “Factual generality provides the raw material that, through successive semiotic contractions, the students will later transform into higher forms of algebraic generality. The issue here is not just to say the same thing in a different code. It is rather about gaining access to deeper forms of consciousness”.

Na sequência, descrevemos cada um dos agrupamentos apresentados no quadro 2:

**Agrupamento A1** – *Existem aspectos comuns entre cada representação e o seu referente, bem como entre representações de um mesmo referente, porém, sem total redundância entre eles.*

Neste agrupamento, incluímos fragmentos de textos que fazem menção à existência de aspectos comuns entre a representação e o seu referente, bem como entre diferentes representações de um mesmo referente, sem que haja total redundância. Cada representação carrega em si aspectos que permitem reconhecer o referente que representa e podem haver aspectos comuns, também, entre representações distintas de um mesmo referente, porém, cada uma delas não apresenta fielmente todas as características do que representa. Além disso, o que cada representação proporciona são aspectos específicos do referente que, em geral, são diferentes entre as distintas representações.

Vale destacar que o termo *referente* não é comum para os três referenciais teóricos que consideramos no presente estudo. Para Vergnaud (2009a), por exemplo, a representação aplica-se à *realidade*, contudo, o próprio autor esclarece que essa realidade não envolve apenas objetos materiais, diretamente acessíveis à percepção, mas abrange objetos abstratos, como os da matemática. Karmiloff-Smith (1994) refere-se aos *micro domínios* que envolvem informações específicas. Em referenciais da Diversidade Representacional, encontramos, por exemplo, Duval (2009b) que faz menção ao *conteúdo conceitual*.

Optamos por utilizar o termo *referente* no intuito de englobar as diferentes menções encontradas entre autores, compreendendo esse termo como abrangente de objetos reais e abstratos, aos quais há possibilidade de remeter representações. Como nos referiremos especificamente aos conteúdos de aprendizagem em Física, em diversos momentos comumente utilizaremos a expressão *objeto de aprendizagem* ou *conteúdo conceitual*, que estão inclusos no que consideramos como *referente*.

Identificamos concordância entre os três referenciais teóricos de que a existência de congruências parciais entre representação e referente, bem como entre suas distintas representações, são essenciais para que operações externas e internas relacionadas à essas representações aconteçam. Por exemplo, tanto a

resolução de um problema matemático (operação externa), quanto a capacidade cognitiva de estabelecimento de vínculos representacionais (operações internas) dependem de que aspectos comuns entre representação e referente, e entre representações, sejam percebidos pelo aprendiz.

Nesse direcionamento, encontramos na Teoria dos Campos Conceituais a menção aos homomorfismos entre realidade e sua representação, assim como entre diferentes representações, em que defende que a representação só pode ser operatória quando aspectos similares do referente são refletidos por essa representação, bem como entre representações. Além disso, a noção de homomorfismo se aplica às possibilidades de estabelecimento de relações entre realidade e representação, entre diferentes planos de representação e às relações internas a um mesmo plano de representação (VERGNAUD, 2009a).

Segundo referenciais da Diversidade Representacional, a ideia de que não há redundância entre representação e referente, tampouco entre representações, associa-se à defesa de que toda representação traz em si aspectos parciais de um mesmo conteúdo conceitual (DUVAL, 2009b). Ainsworth (1999), por sua vez, complementa que não existem apenas aspectos específicos e distintos entre um referente (que ela denomina como *domínio*) e a representação, e entre representações, mas reconhece que existe um grau de redundância partilhado entre diferentes representações, além de conterem aspectos originais do referente. Essa ideia de não redundância entre diferentes representações de um mesmo referente são considerados por Radford, Bardini e Sabena (2007) como algo positivo para o processo de aprendizagem, pois o fato de cada sistema semiótico apresentar formas específicas de significação implica que uns podem ser mais adequados que outros para atender a diferentes objetivos de aprendizagem e atender às preferências e habilidades características de cada estudante.

As ideias de congruências parciais ou de não redundâncias totais entre referente e representação, bem como entre representações, também podem ser entendidas como partes constituintes do modelo teórico de Redescrição Representacional. Ao apresentar os diferentes níveis de explicitação desse modelo, Karmiloff-Smith (1994) menciona que existem formatos diferentes de representação de um referente em cada nível e que o estabelecimento de vínculos representacionais dentro e fora de domínios específicos é um dos principais fatores que caracterizam a transição progressiva entre os distintos níveis. Logo, para que

seja possível o estabelecimento de vínculos representacionais, é necessário reconhecer que diferentes representações são referentes a um mesmo conceito e que existem aspectos comuns entre representações, bem como entre estas e o que representam. Além disso, a autora também menciona a ideia de não redundância ao afirmar que, ao mudar de nível, as representações passam a apresentar descrições reduzidas, com diminuição de detalhes da informação original e das suas primeiras codificações.

O estabelecimento desse primeiro agrupamento reforça as atribuições de um processo de ensino e de aprendizagem ser promovido na perspectiva de uma diversidade de representações, pois uma defesa comum entre os referenciais adotados envolve a aprendizagem da representação de um referente e que tal representação pode pertencer a distintos sistemas semióticos, contudo, precisa ser identificável no sentido de ser possível reconhecer nela o seu referente. Para isso, alguns aspectos do que ela representa devem ser evidenciados.

**Agrupamento A2** – *Por meio de representações externas o sujeito comunica indícios de representações mentais*

As representações sustentam não apenas procedimentos, mas todo o processamento cognitivo. As representações mentais atreladas a esse processamento não são acessíveis a um observador externo e o procedimento de externar representações mentais não é trivial para o sujeito. Todavia, uma das convergências encontradas nos referenciais teóricos estudados é que as representações externas, que Duval (2009b) denomina por representações semióticas, são um meio de manifestação de indícios do processamento mental de um sujeito. Essas manifestações, portanto, podem ser inferidas a partir de ações, precisamente, a partir de representações semióticas.

Em Vergnaud (2009a) encontramos que a construção de representações mentais é relevante em dois sentidos, para compreensão do que elas representam e para a ação sobre essas representações. Apesar de não ser possível a um sujeito externo evidenciar todo o processamento mental de um outro sujeito, há possibilidades de inferências a partir de indicadores que são manifestados por meio de suas ações, ou seja, por meio de diversificadas representações externas.

Nesse mesmo direcionamento, encontramos defesas na Diversidade Representacional e no modelo de Redescrição Representacional a respeito de

possibilidades de exteriorização de indícios de representações mentais. Para Duval (2009b), essa exteriorização acontece por meio de representações semióticas, porém, estas apresentam muitas divergências em relação à representação mental do sujeito, ou seja, não reflete em totalidade representações mentais. Karmiloff-Smith (2010), em concordância com isso, afirma que apenas *pistas* de processos mentais podem ser observados procedimentalmente e argumenta que a exteriorização de conexões realizadas internamente pelo sujeito é uma necessidade. Esse processo de exteriorização, segundo a autora, acontece em progressivos níveis que contemplam diferentes tipos de representações, sobretudo externas, e que contribuem com a acessibilidade à consciência do processo de construção do conhecimento.

Ora, o processo de aprendizagem é complexo e boa parte dele acontece mentalmente. Entretanto, a partir das manifestações do estudante, por meio de diferentes representações, é possível que um observador externo evidencie *pistas* de propriedades, elementos, conceitos, entre outros, relativos ao conhecimento em construção, que são identificados pelo estudante e colocados em ação em seus procedimentos (conceitos-em-ação), bem como inferir as possíveis regras que são formuladas pelo estudante, as quais conduzem as suas ações (teoremas-em-ação) (VERGNAUD, 2009a). Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, a inferência de invariantes operatórios dará forma aos indícios de representações mentais e processamento cognitivo do estudante em aprendizagem, os quais podem ser evidenciados a partir de diferentes representações.

**Agrupamento A3** – *Além de para fins comunicacionais, as representações externas são essenciais para o desenvolvimento procedimental e cognitivo.*

Muito além de servirem como meio de exteriorizar indícios de representações mentais e de servirem para fins comunicacionais, as representações externas (ou semióticas) são essenciais para operações de pensamento (desenvolvimento cognitivo) e realização de procedimentos (desenvolvimento operacional ou procedimental). Nesse direcionamento, reunimos, nesse agrupamento, os fragmentos de textos em que evidenciamos leituras convergentes a respeito das atribuições das representações para além de fins comunicacionais.

Vergnaud (2009a) destaca que o pensar não envolve apenas operações conceituais e pré-conceituais (que entendemos como estruturas mentais e

conhecimentos prévios), mas ao mesmo tempo, envolve operações simbólicas diversas, sustentando a defesa de que representações são essenciais para operações de pensamento. Por outro lado, as representações também são imprescindíveis para o que Vergnaud (2009a) denomina de *cálculo relacional*, que corresponde à utilização de representações para a realização de operações e procedimentos como, por exemplo, o desenvolvimento de um problema matemático.

Duval (2009b) defende que as representações semióticas são essenciais para o desenvolvimento e o tratamento de atividades, bem como para o processo de objetivação. Ambos são caracterizados pelo autor como funções cognitivas.

Ainda, Karmiloff-Smith (2010) assinala que conexões definidas internamente por um sujeito são exteriorizadas. Ao descrevermos o agrupamento anterior, já apresentamos que essa exteriorização demanda de representações externas. Mas, muito além de servirem operacional e comportamentalmente, essas representações funcionam como “escoras de processamento cognitivo”, ou seja, como suporte para o processamento interno durante a aprendizagem. Segundo a autora, a partir do momento em que diferentes representações externas passam a ser representadas em um código comum, conexões representacionais se tornam cada vez mais explícitas ao sistema cognitivo.

Vale esclarecer que os termos procedimentos, operações e comportamentos não são entendidos por Karmiloff-Smith (2010) da mesma forma que na Teoria dos Campos Conceituais e na Diversidade Representacional, pois seu modelo foi desenvolvido considerando o campo da Linguística. Ela se refere, mais diretamente, aos comportamentos em que representações linguísticas e cinestésicas prevalecem.

Apesar de não haver total convergência entre entendimentos do que é procedimental, operacional ou comportamental entre os três pressupostos teóricos considerados, optamos pelo termo *procedimental* por compreendermos que ele abrange comportamentos (como maneiras de agir diante de uma determinada situação), técnicas, processos e métodos diretamente relacionados à ação diante de situações diversas.

As convergências evidenciadas nesse terceiro agrupamento conduzem ao entendimento de que representações estão presentes em todo o momento de aprendizagem, desde a formação das primeiras representações mentais e primeiros tratamentos realizados sobre representações externas, até níveis cada vez mais

elevados de explicitação do conhecimento, seja no domínio da Linguística, ou da Matemática e das Ciências.

**Agrupamento A4** – *A aprendizagem está atrelada à coordenação representacional.*

Neste agrupamento, reunimos fragmentos de textos em que identificamos a referência aos aspetos relacionados à aprendizagem que são potencializados a partir da utilização dinâmica de diversas representações de um mesmo referente.

Em Vergnaud (2009), observamos que o desenvolvimento cognitivo depende da passagem do real para a representação e, sobretudo, por entre representações distintas do real, de maneira dinâmica e flexível, de modo que o sujeito seja capaz de ir de uma representação a outra e, também, a ela retornar.

Essa dinâmica entre representações vem ao encontro do que Duval (2009b) denomina por coordenação de registros de representação, uma atividade fundamental para a aprendizagem. Prain e Waldrip (2006) afirmam que a aprendizagem em Ciências depende da compreensão de diferentes representações de um mesmo conceito e de processos científicos, da tradução de uma representação em outra e da compreensão de utilização coordenada de diferentes representações. É essa dinâmica representacional que auxilia o aprendiz a descobrir invariâncias entre diversificadas produções semióticas, descobertas estas que são determinantes para o processamento cognitivo.

Nesse direcionamento, Karmiloff-Smith (2010) destaca que é a conexão entre heterogêneas representações de conhecimentos equivalentes que auxilia na flexibilidade do sistema cognitivo, o que permite o acesso consciente ao próprio conhecimento e, assim, a extensão deste para outros domínios. Essa ideia de conexão está associada à concepção de que múltiplas representações redescritas em códigos diferentes que, em seguida, são conectadas, permitem ao aprendiz um acesso cada vez mais próximo do código linguístico, considerado como o mais alto nível de explicitação do conhecimento e do acesso consciente a este.

Estendendo essa ideia ao contexto educacional científico e matemático, a conexão representacional pode ser entendida em um sentido mais profundo que o de relacionar logicamente uma representação à outra por aspectos comuns entre elas. Consiste em uma ação cognitiva de compreender que todas essas representações fazem alusão a um mesmo referente e que é possível estabelecer

vínculos entre uma representação e outra, de modo que seja possível utilizá-las de maneira simultânea e oportuna. Tal entendimento da conexão entre múltiplas representações propende à ideia de coordenação (DUVAL, 2009b).

**Agrupamento A5** – *A estrutura cognitiva prévia é considerada como um fator relevante para a construção de novas aprendizagens.*

Um dos pontos de convergência identificados entre as perspectivas teóricas é a relevância atribuída às estruturas cognitivas prévias como suporte para novas aprendizagens. Assim, no quinto agrupamento reunimos fragmentos de textos em que evidenciamos a menção aos conhecimentos prévios como subsídios relevantes na construção de novas aprendizagens.

A Teoria dos Campos Conceituais, que tem como um dos seus pilares fundamentais elementos do construtivismo piagetiano, considera que a aprendizagem está atrelada à adaptação. Defende-se, nessa teoria, a existência de conhecimentos prévios, oriundos do enfrentamento de situações anteriores, na estrutura cognitiva do sujeito. A partir do momento em que esse sujeito é provocado a enfrentar novas situações progressivamente mais complexas, seus conhecimentos prévios podem ser desestabilizados, o que pode conduzir à evocação, mobilização, modificação, combinação e, até mesmo, substituição desses conhecimentos prévios por outros novos em sua estrutura cognitiva. Portanto, na Teoria dos Campos Conceituais, a ideia de conhecimentos prévios está diretamente associada à noção de esquemas que, por sua vez, dependem de situações.

Segundo Vergnaud e Moreira (2017), é fato que conhecimentos prévios são determinantes para a aprendizagem em um campo conceitual. Contudo, ao mesmo tempo, podem ser impeditivos, uma vez que esquemas estereotipados, como teoremas-em-ação falsos, podem constituir obstáculos de aprendizagem. Por isso, os autores mencionam que a aprendizagem demanda de momentos de continuidades e de rupturas. Continuidades no sentido de deparar com situações em que há possibilidade de evocar conhecimentos prévios, recombina-los ou modificá-los para descrever ou solucionar determinadas situações, e rupturas em momentos que os conhecimentos prévios não são suficientes para descrever ou resolver uma situação. Neste caso, há dois caminhos: os esquemas prévios poderão ser substituídos e, para isso, o sujeito deverá reconhecer a não aplicabilidade deles para

a situação, ou, caso não reconheça essa impossibilidade de aplicação, será conduzido ao erro devido seus esquemas estereotipados.

Essas alternativas justificam a essencialidade de reconhecer e valorizar os conhecimentos prévios de estudantes e de promover situações diversas para que eles tenham a oportunidade de construir e evoluir seus esquemas. Por um lado, a identificação de esquemas estereotipados ou não depende de uma multiplicidade de situações. Por outro, o processo de adaptação desses esquemas ocorrerá a partir de situações que são progressivamente dominadas.

Segundo autores da Diversidade Representacional, esquemas prévios amparam novas compreensões (LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011). Won, Yoon e Treagust (2014) complementam que a compreensão e a reconstrução de representações distintas são muito subjetivas, pois dependem dos conhecimentos prévios de cada pessoa. Inclusive, a maneira como cada sujeito tratará um mesmo conjunto de representações será diferente entre eles devido as suas estruturas cognitivas prévias particulares.

Na Redescrição Representacional, os conhecimentos prévios também têm posição de destaque como suportes para novas aprendizagens. Segundo Karmiloff-Smith (2010), o avanço por entre os progressivos níveis de explicitação de conhecimentos depende de representações internas que foram arquitetadas previamente e de maneira independente, de modo que essas explicitações estão relacionadas às conexões que serão estabelecidas gradualmente entre os diferentes conhecimentos prévios que foram representados internamente pelo sujeito.

**Agrupamento A6** – *A aprendizagem se caracteriza como a capacidade de ir além de saber fazer, mas ser capaz de saber expressar o que se sabe e o que se faz.*

Neste agrupamento, reunimos os fragmentos de textos que indicam que muito mais do que dominar procedimentos, a aprendizagem envolve a capacidade de expressão coerente do conhecimento. Vale destacar que nessa convergência um tipo de conhecimento não é entendido em detrimento do outro, uma vez que a capacidade de expressão do conhecimento é considerada como intrinsecamente relacionada ao desenvolvimento procedimental.

Na Teoria dos Campos Conceituais, defende-se a existência de dois tipos de conhecimentos que são complementares: o conhecimento operatório e o predicativo.

Para Vergnaud (2017), é a partir da ação do sujeito, ao enfrentar situações, que ocorre a formação de conceitos, por meio de vínculos que são estabelecidos entre eles, a partir de suas representações, momento este que caracteriza o que o autor denomina como conhecimento operatório. Contudo, não basta que o aprendiz seja capaz de realizar procedimentos relacionados a determinados conceitos, mas igualmente, ele precisa ser capaz de enunciar o que faz. É essa capacidade enunciativa que o autor denomina como conhecimento predicativo e que é caracterizado como aprendizagem conceitual.

Para Greca e Moreira (2003), a aprendizagem conceitual inclui a procedimental e, por isso, não pode ser inferiorizada em relação à primeira. Entretanto, segundo os autores, é a capacidade de expressão da aprendizagem conceitual que está atrelada à compreensão, pois requer um nível mais elevado de conceitualização do que na aprendizagem procedimental.

Na Diversidade Representacional, também encontramos afirmações relacionadas aos dois tipos de conhecimentos, um pertinente às competências e, outro, à explicitação do conhecimento, em que este tem papel de destaque na aprendizagem. Segundo Prain e Waldrip (2006), o desenvolvimento de competências é uma parte importante da aprendizagem, porém, esse domínio não caracteriza, por si só, que houve compreensão. Para tanto, é imprescindível a capacidade de explicação e, segundo os autores, é essa capacidade que indica o acesso consciente ao conhecimento.

Nesse mesmo direcionamento, Laburú e Silva (2011b) mencionam que o êxito ao tratar de um problema ou conhecimento científico depende da articulação entre a operação simbólica de representações e o discurso integrado, o qual é produto de inferências realizadas sobre múltiplas representações. Para esses autores, a produção do estudante atinge um patamar mais elevado de qualidade quando ele tem a oportunidade de descobrir, a partir da integração representacional, a organização intelectual que deve expressar. Em outras palavras, quando o estudante é submetido a situações que demandem a realização de transformações inter e intrarrepresentacionais, bem como a experimentar a necessidade de re-representar um mesmo conceito de diversificados modos distintos, ao mesmo tempo em que é provocado a integrar essa diversidade para constituir um discurso sólido, coerente e compreensível, o estudante se torna mais propenso a manifestar melhor entendimento conceitual (LABURÚ; SILVA, 2011b).

O conhecimento procedimental, muitas vezes, pode se caracterizar, simplesmente, como um processo automático, em que o estudante pode realizar ações corretas ou coerentes, mesmo sem ter consciência do que faz. Essa afirmação converge com a ideia de representação computacional, segundo Duval (2009b). Isso justifica o fato de que não basta avaliar procedimentos do estudante para inferir a respeito de sua apreensão, mas é preciso que ele seja instigado a expressar seus conhecimentos.

Nesse sentido, encontramos, em Karmiloff-Smith (1994), a defesa de que a aprendizagem envolve dois direcionamentos complementares, um procedimental e, outro, de explicitação. Inclusive, essa é uma das ideias principais que permeia o seu modelo de Redescrição Representacional. Para a autora, o processo de aprendizagem abrange um período procedimental, em que o conhecimento é automatizado e menos acessível conscientemente. Abrange, ainda, um processo gradual de explicitação do conhecimento, que se fundamenta no esforço de especificar informações subjacentes nas representações procedimentais e que conduz ao acesso cada vez mais consciente do conhecimento e de sua construção.

**Agrupamento A7** – *A linguagem verbal tem papel de destaque dentre as demais representações.*

Estão inclusos, neste agrupamento, os fragmentos de textos em que identificamos leituras convergentes que fazem alusão ao papel da linguagem verbal (oral ou escrita) em destaque dentre as demais formas de representação.

Conforme destacado no agrupamento anterior, para a Teoria dos Campos Conceituais, a forma operatória do conhecimento subsidia a sua forma predicativa, em que esta é mais analítica que a primeira e, por isso, merece destaque na investigação da aprendizagem. Segundo Vergnaud (2017), a linguagem verbal (que ele denomina por linguagem natural) é a forma representacional que caracteriza a forma predicativa do conhecimento. Essa forma é mais analítica que outras por permitir a comunicação e o maior alcance conceitual a situações diversas.

Vergnaud (1990) destaca, ainda, que a linguagem verbal perpassa o conhecimento operatório, pois quando o sujeito, em situação, precisa planejar uma sequência de ações, interiormente ele verbaliza seus procedimentos, até que essa sequência se torne automatizada. Portanto, a linguagem verbal pode ser entendida, também, como o sistema semiótico primário, pois antecede a sequência de ações

que conduzem o sujeito à construção de representações e à realização de transformações entre estas.

Nesse sentido, teóricos da Diversidade Representacional também atribuem à linguagem natural um papel de destaque dentre os demais sistemas semióticos na aprendizagem científica e matemática, porquanto Laború e Silva (2011b) mencionam que a linguagem verbal é o sistema modelizante primário a partir do qual outros sistemas semióticos são derivados. Além disso, destacam que é por meio da linguagem verbal que é possível ter acesso, com maior precisão, aos pensamentos do sujeito, e que outros sistemas semióticos podem ser traduzidos para a linguagem verbal, mesmo quando o processo inverso não é possível. Ainda, Duval (2009b) reconhece que a linguagem verbal tem posição de destaque dentre outros sistemas semióticos, pois é capaz de abranger todas as funções discursivas.

No modelo de Redescrição Representacional, o mais alto nível de explicitação é caracterizado pelo fato de o sujeito ser capaz de expressar em linguagem verbal, própria e coerente, o seu conhecimento. Karmiloff-Smith (2010) reconhece que existem diferentes códigos (ou diferentes formas representacionais) envolvidos no processo de redescrição representacional, que delimita a passagem entre um nível e outro de explicitação, mas privilegia a linguagem verbal por entendê-la como um código mais abstrato e que melhor demonstra o acesso consciente do conhecimento.

Em suma, a linguagem verbal tem papel de destaque dentre outros sistemas semióticos por: i) melhor atender a fins comunicacionais; ii) direcionar o conhecimento procedimental e a construção de novas representações; iii) outros sistemas semióticos podem ser integrados e contraídos em linguagem verbal e iv) a linguagem verbal, quando constituída por um discurso consistente, claro e genuíno, manifesta, precisamente, a aprendizagem construída e o acesso consciente ao conhecimento.

**Agrupamento A8** – *Existem diferentes níveis cognitivos que abrangem desde representações não conscientes, até o acesso consciente ao conhecimento, em que este nem sempre é passível de ser exteriorizado.*

Neste agrupamento, incluímos os fragmentos de textos que indicam duas características do processamento cognitivo: seu caráter progressivo e possibilidades de acesso consciente ao próprio conhecimento. Além disso, a respeito do acesso

consciente, destacamos os argumentos que concordam que esse acesso nem sempre é explicitado.

Vergnaud (2017) claramente enuncia que a tomada de consciência nem sempre é explicitada. O mesmo autor também profere que existem diferentes níveis de acesso consciente do sujeito às regras que orientam as suas ações (VERGNAUD, 2009a).

Na Diversidade Representacional, localizamos citações a respeito do processo que faz passar do estágio não consciente ao consciente do conhecimento. Para Duval (2009b), o alcance ao nível de acesso consciente depende de um processo de objetivação, em que o próprio sujeito descobre, aos poucos, o objeto de conhecimento, a partir da significação que o atribui. O mesmo autor menciona que existem representações internas conscientes e não conscientes, e que nem sempre as representações conscientes podem ser exteriorizadas (DUVAL, 2009a). Radford (2006), por sua vez, explica que a generalidade, um dos aspectos da abstração, passa por diferentes níveis, os quais são progressivamente atingidos à medida que acontecem *contrações semióticas*, processo que conduz o sujeito ao acesso de formas mais profundas de consciência a respeito de seu próprio conhecimento, a partir da redução de uma grande quantidade de sistemas semióticos a um número mínimo.

Entendemos a ideia de contração semiótica de Radford (2006) num sentido semelhante às defesas de Karmiloff-Smith (2010) a respeito do processo de redescrição representacional. Afinal, para que ocorra a contração semiótica, é imprescindível o estabelecimento de vínculos entre representações distintas de um mesmo referente, de modo que as significações deste referente possam emergir e ser integradas em sistemas semióticos cada vez mais abstratos, conduzindo o sujeito ao acesso consciente do seu próprio conhecimento. A redescrição representacional, por sua vez, é caracterizada como um procedimento de re-representação, o qual igualmente demanda do estabelecimento de vínculos representacionais em que se espera que o sujeito atinja a capacidade de re-representar determinado conhecimento em um código linguístico considerado como mais abstrato dentre outros códigos representacionais, capaz de servir para fins comunicacionais e para o acesso consciente da cognição.

As descrições e interpretações promovidas até aqui são resultados das relações que evidenciamos a partir de estudos dos pressupostos teóricos da Teoria dos Campos Conceituais, da Diversidade Representacional e da Redescrição Representacional. Destacamos que muitas outras convergências poderiam ser identificadas entre os três referenciais teóricos ou, no mínimo, considerando par a par cada referencial, tal como realizado por Boni, Laburú e Camargo Filho (2018). Todavia, nos concentramos em identificar as aproximações que consideramos mais relevantes aos propósitos da presente pesquisa, por sustentarem nossos pressupostos em relação ao processo de aprendizagem em Física, com ênfase nas atribuições das representações nesse processo, sobretudo, no sentido de servirem como subsídios para a construção do instrumento analítico a que nos propomos e que passamos a apresentar.

## 6.2 CONSTITUIÇÃO E APRESENTAÇÃO DO INSTRUMENTO ANALÍTICO

Com as abordagens precedentes em que retratamos leituras convergentes entre Teoria dos Campos Conceituais, Diversidade Representacional e Redescrição Representacional, compomos os subsídios necessários para sustentar a elaboração de um instrumento analítico, destinado para a investigação de níveis de explicitação de conhecimentos construídos por estudantes em aprendizagem em Física, em domínios (ou em campos conceituais) e momentos específicos desse processo, com o intuito de verificar aprendizagens e problemas relacionados à apropriação conceitual.

Consideramos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais no que se refere à dicotomia entre conhecimento operatório, que passamos a denominar de procedimental, e conhecimento predicativo, considerado como explícito. Ambas as formas de conhecimento estão intrinsecamente relacionadas. Nessa relação, destacamos os esquemas, constituídos por invariantes operatórios, cujas formações, adaptações e explicitações demandam representações diversas. A respeito dessas representações, fundamentados na linha de pesquisa da Diversidade Representacional, reconhecemos que o contexto de ensino e de aprendizagem em Física constitui-se de desafios representacionais, e que é a partir e por meio de diversas representações, especialmente, de traduções, trocas, transformações e

integrações representacionais, que construções cognitivas são sustentadas e exteriorizadas na forma de indícios.

Por fim, na Redescrição Representacional, encontramos o alicerce sobre o qual avistamos a possibilidade de construção de um instrumento analítico. Precisamente, a ferramenta analítica que propomos constitui-se como uma reestruturação do modelo teórico original de Redescrição Representacional, com vistas a atender às especificidades representacionais, da aprendizagem em Física. Assim como no modelo original de Redescrição Representacional, partimos do pressuposto de que existem diferentes níveis de explicitação do conhecimento que vão além da simples dicotomia entre conhecimento operatório (ou procedimental) e predicativo (ou explícito) e que a compreensão do processamento cognitivo está atrelada às mudanças representacionais e tomadas de consciência, conforme também defendem a Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional.

Para analisar os níveis de explicitação do conhecimento de estudantes, construídos em aprendizagem em Física, consideramos que o modelo teórico original de Redescrição Representacional precisa ser adequado de maneira a contemplar, mais diretamente, a relevância das representações externas (semióticas) e suas transformações, tanto para o desenvolvimento da forma procedimental, quanto da forma gradualmente predicativa do conhecimento.

Considerando o papel central das representações no instrumento analítico que estruturamos, vale retomar e esclarecer em que sentido adotamos esse termo nessa tese: i) como interiorização de objetos abstratos (objetos do conhecimento, como conceitos e suas propriedades) e oriundas da percepção de objetos concretos; ii) como constituinte de conceitos, elementos, relações, entre outros, que são pertinentes e que podem ser identificados e utilizados pelo estudante em situação, que são elementos dos invariantes operatórios e iii) como particulares para cada estudante, uma vez que depende de seus conhecimentos mobilizados.

Quanto aos tipos possíveis de representação, adotamos as definições propostas por Duval (2012). Assim, consideramos a existência de representações mentais, computacionais e semióticas. Inclusive, defendemos que o foco da análise ao aplicar o instrumento analítico reside sobre registros de representação semiótica produzidos por estudantes em aprendizagem em Física.

Para cada nível do instrumento analítico que elaboramos com base no modelo teórico de Redescrição Representacional, integramos às descrições do modelo original pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, sobretudo no que tange às ligações entre as formas operatória e predicativa do conhecimento e o papel inferencial de invariantes operatórios, bem como incluímos pressupostos teóricos da Diversidade Representacional, principalmente no que compete às atribuições das representações mentais, computacionais e semióticas para o desenvolvimento do conhecimento procedimental, a apreensão conceitual, a objetivação, o acesso consciente ao conhecimento e a sua explicitação.

Antes de apresentarmos o instrumento analítico que propomos e, em seguida, os procedimentos relacionados à sua aplicação, esclarecemos como as articulações teóricas realizadas na seção anterior implicaram em sua constituição e emprego.

A partir do primeiro agrupamento (**A1** – *Existem aspectos comuns entre cada representação e o seu referente, bem como entre representações de um mesmo referente, porém, sem total redundância entre eles*), ponderemos que a importância de um ambiente instrucional circunstanciado por uma diversidade representacional se justifica pelo fato de que nenhuma representação encerra em si todos os aspectos do que representa, sendo apenas parcialmente redundante ao seu referente e à outras representações deste. Portanto, diferentes representações são necessárias para que o estudante tenha acesso a diferentes informações do referente, de modo a utilizar as representações de maneira complementar para auxiliar na compreensão mais precisa do que elas representam.

Com base nesse agrupamento, elucidamos o contexto educacional e instrumento avaliativo que consideramos como ideal para que o estudante tivesse a oportunidade de atingir o mais alto nível de explicitação de seu conhecimento: envolto por múltiplas representações, permitindo a realização de integrações coerentes e, assim, a explicitação de conhecimentos, o que também acontece por meio de diversas representações.

Em relação à constituição do instrumento analítico, esse primeiro agrupamento também proporcionou implicações, uma vez que indícios de construções cognitivas são manifestados por meio de representações, entendemos que é necessário que o pesquisador, ao investigar graus de apropriação conceitual do estudante, realize suas inferências sobre diversas representações, uma vez que cada uma permitirá o acesso a informações distintas a respeito da aprendizagem

construída pelo estudante, de modo que a análise de diversificadas representações possibilitará um entendimento completo a respeito de seus conhecimentos e poder de explicitação destes.

A partir do segundo agrupamento (**A2** – *Por meio de representações externas o sujeito comunica indícios de representações mentais*), consideramos o fato de que o primeiro nível do instrumento analítico envolve a representação mental do objeto de aprendizagem. Progressivamente, essa representação interna pode ser manifestada na forma de indícios, primeiramente subjacentes às ações do estudante e, por conseguinte, podem ser explicitados por meio de linguagem verbal e coordenação desse registro semiótico com outros diversos. De todo modo, dificilmente o estudante será capaz de expressar suas representações mentais em totalidade e, por isso, pautados nesse agrupamento, sustentamos a defesa relacionada à necessidade de dedicar a atenção aos indícios de conhecimentos construídos pelo estudante e que podem ser inferidos a partir das representações produzidas por ele. Esses indícios caracterizam invariantes operatórios responsáveis por revelar as regras que conduzem o estudante ao êxito ou ao fracasso durante momentos específicos de sua aprendizagem.

Quanto ao terceiro agrupamento (**A3** – *Além de para fins comunicacionais, as representações externas são essenciais para o desenvolvimento procedimental e cognitivo*), sua implicação para a presente pesquisa está relacionada ao papel cognitivo das representações. O instrumento analítico que propomos evidencia que representações perpassam todos os momentos de aprendizagem, de modo que suas atribuições vão muito além de fins comunicacionais, mas desempenham papel fundamental no desenvolvimento cognitivo, desde a representação mental do objeto de aprendizagem e a realização de tratamentos procedimentais por meio da aplicação de representações, até a explicitação cada vez mais consistente do conhecimento.

O quarto agrupamento (**A4** – *A aprendizagem está atrelada à coordenação representacional*) traz em si um aspecto cognitivo diretamente atrelado às aprendizagens científicas e matemática, de modo a enriquecer o modelo original de Redescrição Representacional, contempla que o último nível de explicitação é caracterizado pela verbalização sólida e coerente do conhecimento construído. Tendo em vista os desafios representacionais característicos para as aprendizagens

matemática e científica, consideramos que essa manifestação verbal é essencial, mas não é suficiente para afirmarmos que houve aprendizagem.

Adicionalmente, o estudante precisa ser capaz de realizar a coordenação entre diferentes representações e reconhecer suas aplicabilidades em situações diversas. Não queremos dizer que Karmiloff-Smith (2010) não defenda a coordenação entre representações em sua teoria, mas ela considera que esse processo acontece, sobretudo, entre os níveis de explicitação de modo a resultar em um produto que é a linguagem verbal. Todavia, consideramos que, na aprendizagem científica e matemática, a coordenação representacional também deve se caracterizar como produto final junto à capacidade de elaboração de um discurso coerente e genuíno, e defendemos que ambos os processos estão atrelados.

O quinto agrupamento (**A5** – *A estrutura cognitiva prévia é considerada como um fator relevante para a construção de novas aprendizagens*), assim como o primeiro (A1), apresentou implicações diretas ao contexto de aplicação do instrumento analítico. Com base nesse agrupamento, reconhecemos a essencialidade de investigar conhecimentos prévios de estudantes participantes da pesquisa antes da elaboração das propostas de intervenção e instrumentos avaliativos da aprendizagem, ainda que nosso foco de estudo esteja nas manifestações finais do estudante, ou seja, no instrumento avaliativo, conforme descrevemos mais adiante.

O sexto agrupamento (**A6** – *A aprendizagem se caracteriza como a capacidade de ir além de saber fazer, mas ser capaz de saber expressar o que se sabe e o que se faz*) está atrelado à base do instrumento analítico, ou seja, ao fato de que o conhecimento abrange duas categorias de conhecimento, uma procedimental e uma predicativa. Na primeira, conhecimentos são predominantemente implícitos e subjacentes às ações do estudante. Contudo, a forma procedimental fundamenta a predicativa, em que o conhecimento é cada vez mais acessível conscientemente e, dessa forma, apresenta maior potencial de ser explicitado, seja por meio de palavras ou de outras representações semióticas. Mesmo considerando outras representações além da linguagem verbal, continuamos a nos referir como conhecimento predicativo por partirmos da hipótese de que a integração e coordenação representacional implica em maior facilidade de elaboração de um discurso próprio e coerente ao que é esperado na aprendizagem científica e matemática. Nesse sentido, consideramos que ambas as formas de

conhecimento não são excludentes e que, em geral, a forma predicativa abrange a procedimental.

Em complemento à discussão anterior, o sétimo agrupamento (**A7** – *A linguagem verbal tem papel de destaque dentre as demais representações*) refere-se ao papel de destaque que a linguagem verbal desempenha na aprendizagem, não apenas porque ela manifesta um resultado da integração e coordenação representacional e, assim, maior clareza de apreensões conceituais, mas também porque ela está presente nas demais etapas da aprendizagem, uma vez que, mesmo internamente, existem regras formuladas pelo estudante para guiar suas ações, e estas, em geral, podem ser verbalizadas internamente, no sentido de fornecer um “passo-a-passo” para suas ações. Aliás, são indícios desse “passo-a-passo” que buscamos modelar na forma de teoremas-em-ação.

Além disso, considerando a relevância atribuída à linguagem verbal, até a oral, ponderamos a necessidade de incluir entrevistas nos procedimentos de coleta de informações, com o intuito de auxiliar nas investigações a respeito de apropriações conceituais do estudante, ao comparar suas produções escritas e relatos verbais orais.

Por fim, o oitavo agrupamento (**A8** – *Existem diferentes níveis cognitivos que abrangem desde representações não conscientes, até o acesso consciente ao conhecimento, em que este nem sempre é passível de ser exteriorizado*) implicou, de maneira mais geral, na perspectiva em que se fundamenta o instrumento analítico proposto, pois faz menção ao fato de que não existe uma dicotomia entre conhecimento procedimental e predicativo, mas que existem diferentes níveis pelos quais decorre o processamento cognitivo, níveis esses que abrangem aspectos conscientes e não conscientes. Dessa forma, assim como no modelo teórico original de Redescrição Representacional, no instrumento analítico que propomos são considerados quatro níveis de explicitação distintos, que compreendem desde o conhecimento na forma procedimental, até a explícita (predicativa).

Na sequência, apresentamos o quadro 3, no qual resumimos as implicações de cada um dos agrupamentos que reúnem leituras convergentes entre os referências teóricos dessa tese, para a constituição e a aplicação do instrumento analítico que propomos:

**Quadro 3** – Principais implicações dos agrupamentos para a constituição e a aplicação do instrumento analítico

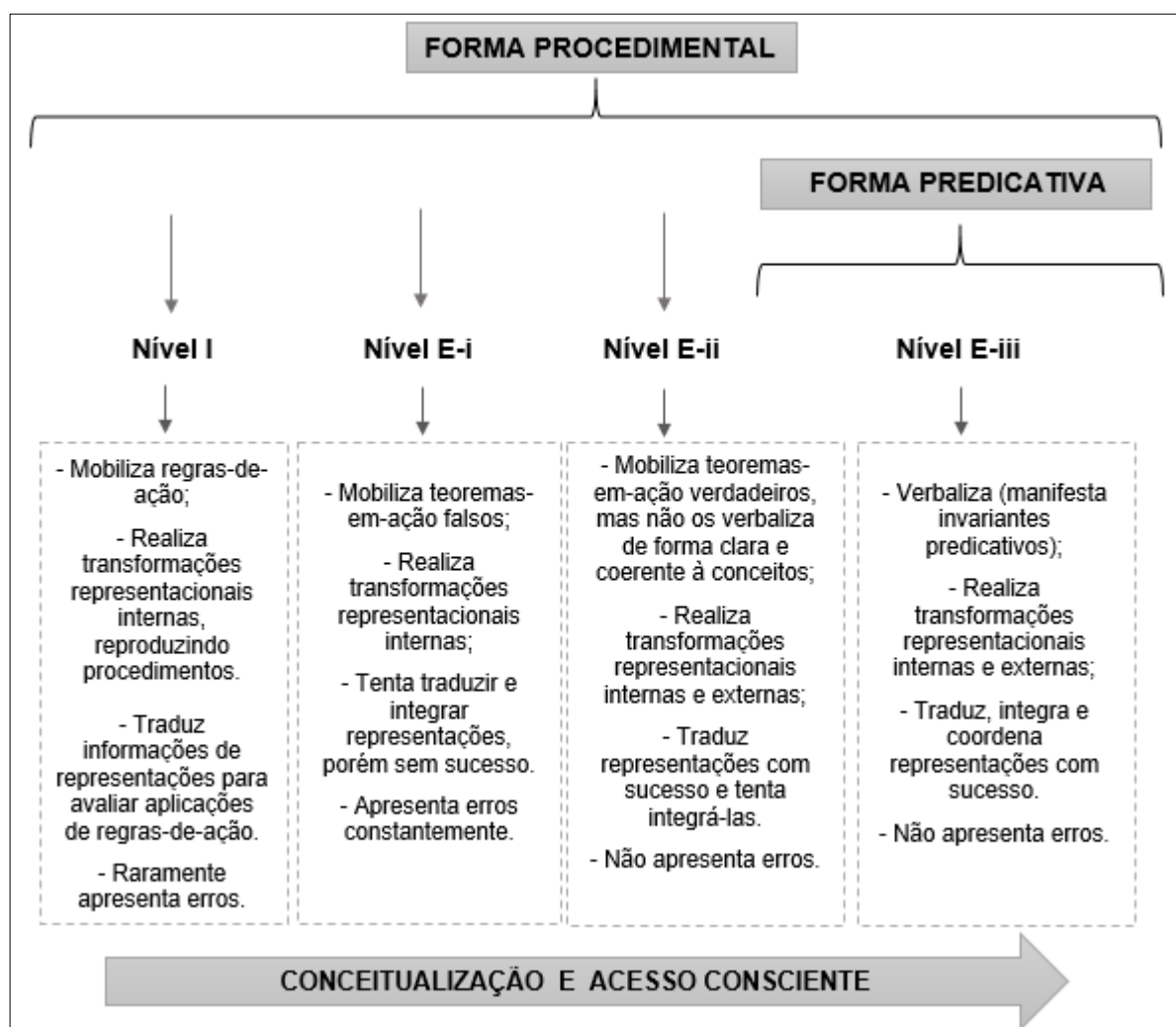
	<b>Constituição do Instrumento Analítico</b>	<b>Aplicação do Instrumento Analítico</b>
<b>A1</b>	A análise de representações diversas contribui para sustentar evidências de apropriações conceituais.	Necessidade de promover ambiente instrucional e instrumento avaliativo abrangendo diversidade representacional.
<b>A2</b>	A análise de invariantes operatórios possibilita o entendimento dos indícios de construções mentais manifestados por meio de procedimentos.	-----
<b>A3</b>	As representações perpassam todo o instrumento, pois cumprem papel operacional, cognitivo e comunicacional.	-----
<b>A4</b>	A aprendizagem científica é caracterizada por explicitação verbal e, também, por coordenação representacional.	-----
<b>A5</b>	-----	Necessidade de aplicação de teste diagnóstico para identificação de conhecimentos prévios dos estudantes.
<b>A6</b>	Estrutura do instrumento, em que a forma predicativa de conhecimento compreende a forma procedimental.	-----
<b>A7</b>	Sustentação de que o nível mais elevado de explicitação do conhecimento abrange a linguagem verbal.	Necessidade de realização de entrevistas para sustentar as inferências sobre produções escritas.
<b>A8</b>	Conservação dos quatro níveis de explicitação propostos no modelo original de Redescrição Representacional, cujas descrições foram reformuladas.	-----

**Fonte:** dos autores (2018)

Fundamentados nas explanações anteriores, a respeito das implicações de agrupamentos de leituras teóricas convergentes para a constituição do instrumento analítico, apresentamos, na figura 7, o diagrama que especifica os elementos principais que constituem o instrumento analítico que estruturamos para análise dos dados da investigação a que nos propomos nesta tese. Por conseguinte, explicamos as ideias gerais a respeito desse instrumento e descrevemos cada um dos níveis que o compõe.

Ressaltamos que o instrumento analítico apresentado na figura 7, é uma versão reformulada do que foi divulgado em Boni e Laburú (2018). Nessa reformulação, acrescentamos especificações e características de cada um dos níveis e visamos esclarecer a relação entre as formas procedimental e predicativa do conhecimento, de modo a evidenciar que, ao atingir a forma predicativa no nível E-iii de explicitação, o estudante continua abrangendo domínio procedimental.

**Figura 7 – Instrumento Analítico**



**Fonte:** adaptado de Boni e Laburú (2018, p. 187)

Conforme mostra a figura 7, o instrumento analítico proposto é constituído por quatro níveis que caracterizam a dinâmica progressiva do processo de conceitualização e acesso consciente ao objeto de aprendizagem. Esses níveis estão compreendidos nas diferentes formas de conhecimento, de maneira que todos I, E-i, E-ii e E-iii, estão contidos na forma de conhecimento que denominamos como

*procedimental*. O nível E-iii está contido, também, na forma *predicativa* do conhecimento. Afinal, fundamentados nas convergências teóricas que identificamos, defendemos que o conhecimento procedimental não é substituído pelo conhecimento predicativo, mas o primeiro passa a compreender esse último, de modo que o estudante manifestará ter atingido o nível E-iii quando apresentar competências e habilidades relativas a ambas as formas de conhecimento.

Ainda que os níveis sejam apresentados em ordem progressiva de conceitualização e acesso consciente, concordamos com a afirmação de Karmiloff-Smith (1994) de que a passagem por entre os níveis do instrumento analítico nem sempre acontece de maneira linear, mas que há diversas possibilidades distintas de transição entre um nível e outro. Por exemplo, é possível que o estudante transite diretamente do nível I ao nível E-ii.

Os três primeiros níveis são caracterizados como de conhecimento procedimental porque, nessas fases, indícios de conhecimentos do estudante são predominantemente manifestados por meio de procedimentos que realiza. Isso não significa afirmar que não existam representações em linguagem verbal nesses níveis, porém, essa forma de expressão não é manifestada da mesma maneira que no nível E-iii, ou seja, na forma de uma produção própria e coerente, fundamentada nas ligações conceituais estabelecidas a partir de representações distintas do conceito, conforme esclarecemos mais adiante, ao descrever cada um dos níveis.

O diagrama geral, mostrado na figura 7, contém quadros logo abaixo de cada nível, os quais fornecem características principais de cada nível. A partir desse ponto, passamos a definir e justificar cada um dos níveis que compõem o instrumento analítico, em que esclarecemos cada uma dessas características:

**Nível I:** Em determinada situação ou momento de aprendizagem, o estudante manifesta que apenas memorizou regras-de-ação, ou seja, acumula e codifica, sequencialmente e sem vinculação, informações que, geralmente, são oriundas da própria instrução como, por exemplo, ao resolver com sucesso um exercício semelhante a outro já exemplificado pelo professor.

As ações do estudante são caracterizadas como reproduções mecânicas, em que ele não é capaz de evidenciar qualquer tipo de compreensão a respeito do que faz e do porquê faz. Um exemplo para ilustrar esse caso é a resolução de um problema em Física, para o qual o estudante identifica palavras e informações

chaves que o permite identificar que fórmula utilizar para a determinação do resultado, porém, ao ser questionado a respeito do resultado obtido, dos processos realizados ou se seria possível resolver de uma outra maneira, revela que todos os passos foram realizados de maneira não consciente, ou seja, sem ter compreensão do que fez.

Os procedimentos são mecânicos, cópia de outros semelhantes já vistos ou realizados anteriormente. É comum que o estudante tenha sucesso na obtenção de resultados corretos, porém, tal fato, não indica que houve aprendizagem. Como as ações mecânicas são caracterizadas por reproduções de informações e regras acumuladas, dificilmente são encontrados erros em produções de estudantes desse nível, uma vez que não há formulação de teoremas-em-ação próprios que orientem suas ações. Além disso, como nesse nível não há total consciência dos procedimentos adotados e dos processos cognitivos, também não há explicitação verbal do conhecimento e, de maneira mais ampla, não há realização de trocas representacionais, apenas tratamento interno sobre registro de representação, o qual, pode ser totalmente ou parcialmente identificável à situação.

**Nível E-i:** É o primeiro nível de explicitação e está contido na forma de conhecimento procedimental. Apesar de primeiros vínculos conceituais começarem a ser estabelecidos entre representações, estes ainda permanecem subjacentes às ações do estudante, pois ele ainda não tem pleno acesso consciente ao conhecimento e ainda manifesta dificuldades de explicitá-lo.

Esse momento é fundamental da aprendizagem, pois inclui as primeiras manifestações de invariantes operatórios que regem as ações. Esses invariantes operatórios são produtos de primeiras tentativas de operações cognitivas sobre representações, em busca de estabelecer vínculos, traduzi-las e integrá-las, ainda que nesse nível prevaleçam operações de tratamento interno em representações. Os invariantes operatórios desse nível são pautados em conceitos-em-ação não pertinentes à situação e em formulação de teoremas-em-ação falsos, que conduzem o estudante ao erro.

Esse nível é de explicitação pelo fato de o estudante manifestar primeiros ensaios de formulação de proposições e de hipóteses a respeito do conhecimento e sua aplicabilidade em situações. Essas proposições podem ser entendidas como o que é denominado por teoremas-em-ação na Teoria dos Campos Conceituais, os

quais se constituem como regras-de-ação formuladas pelo estudante, a partir dos conceitos que já construiu cognitivamente e/ou que identifica em determinadas situações que enfrenta. Esses teoremas-em-ação não são verdadeiros devido equívocos no momento de tentar estabelecer vínculos representacionais (tentativas de tradução e integração representacional sem sucesso) ou identificação de conceitos não coerentes à situação em questão. Entretanto, o estudante os considera como verdadeiros e, assim, ao utilizá-los como norteadores de suas ações, se depara com o erro.

Ainda, esse nível é considerado como de conhecimento da forma operatória porque não há explicitação de maneira direta pelo estudante, mas há manifestações de alguns indícios de seus teoremas-em-ação em seus procedimentos, os quais podem ser inferidos por um pesquisador. O fato de o conhecimento ainda não ser passível de explicitação mais direta e precisa nesse nível é devido ao conhecimento não ser conscientemente acessível ao estudante, o que explica as formulações de teoremas-em-ação não condizentes à situação e suas utilizações, como se assim o fossem.

Como exemplo, podemos considerar o caso de um estudante ao resolver um problema de Física a respeito de composição vetorial de forças, em que realiza traduções e integrações equivocadas de representações de direção e sentido (que caracterizam vetores de forças), devido a mobilização de teoremas-em-ação falsos a respeito de suas definições. Dessa forma, o estudante apresentará erro em sua resposta sobre o sentido e a direção da força resultante e não o perceberá, pois está fundamentado em teoremas-em-ação falsos, porém que considera como verdadeiros.

**Nível E-ii:** Esse nível do instrumento analítico é caracterizado pela formulação de teoremas-em-ação verdadeiros, atividades de tradução (inter e intrarepresentacionais) e primeiras tentativas de integração representacional. Porém, todas essas atividades cognitivas, bem como os teoremas-em-ação produzidos pelo estudante, permanecem subjacentes à suas ações, ou seja, o mesmo ainda não é capaz de elaborar um discurso genuíno e coerente para explicitar seus conhecimentos, uma vez que a formulação desse discurso está atrelada ao domínio de integração representacional. Contudo, todas essas atividades indicam um certo grau de acessibilidade consciente do conhecimento maior do que no nível E-i, o que

faz com que erros em procedimentos de resolução não sejam evidenciados nesse nível.

O que implica na formulação de teoremas-em-ação verdadeiros é a capacidade de realizar transformações de tipo interna e externa em diferentes representações de um mesmo objeto de aprendizagem, em que traduções corretas entre representações são realizadas. Entretanto, nesse nível, o estudante ainda se encontra predominantemente no domínio da forma procedimental do conhecimento, ou seja, boa parte de todas essas suas atividades cognitivas permanecem subjacentes aos seus procedimentos, o que significa que ele não é capaz de formular descrições verbais, orais ou escritas, para explicitar suas ações e conhecimentos de forma precisa e coerente, mas pode fornecer algumas explicações parcialmente corretas, devido suas tentativas de integração.

Como exemplo, podemos considerar o caso de um estudante de Física que, ao resolver um problema envolvendo composição de forças, reconhece as diferenças e relações entre direção e sentido de vetores representativos de forças, realiza operações de soma vetorial corretamente, inclusive utilizando diferentes representações, porém, não explicita verbalmente (de forma oral ou escrita), de maneira sólida, genuína e coerente, os procedimentos realizados e os significados associados ao resultado obtido, segundo o contexto do problema dado.

**Nível E-iii:** O último nível se diferencia do anterior pelo fato de o estudante ser capaz de realizar, com agilidade e em momentos oportunos, a coordenação de diferentes registros de representação, bem como de integrá-los em um discurso sólido, coerente e genuíno para fornecer explicações a respeito do que faz e do porquê o faz. Dessa forma, seu discurso não manifesta somente invariantes operatórios, do tipo teoremas-em-ação, mas proposições que convergem com verdadeiros conceitos científicos. Desse modo, os invariantes não são apenas operatórios, mas abrangem invariantes predicativos e, assim, a explicitação nesse nível ocorre de maneira mais flexível e espontânea, por meio da linguagem verbal e a partir de outros sistemas semióticos. Todos esses aspectos manifestam acesso consciente ao conhecimento e o mais alto nível de conceitualização.

Em suma, partimos da perspectiva de que, durante os primeiros envolvimento do estudante com o objeto de estudo, que acontece a partir de

percepções e codificações internas desse objeto, constituindo representações mentais, o processamento cognitivo é basicamente operacional e, portanto, o conhecimento é considerado como procedimental e implícito. Com a progressiva tomada de consciência a respeito desse processamento cognitivo, o conhecimento procedimental passa a ser integrado e explicitado por meio de representações semióticas cada vez mais complexas e abstratas, até atingir o nível da forma predicativa do conhecimento que abrange a explicitação verbal de forma organizada, coerente e em palavras próprias, formuladas pelo estudante, para expressar o que faz e porquê o faz, bem como a coordenação entre distintas representações semióticas.

Apesar de a análise da passagem por entre um nível e outro não ser o foco desta pesquisa, a qual se concentra em caracterizar, segundo os diferentes níveis de explicitação, conhecimentos manifestados por estudantes em momentos e tarefas específicas a respeito de determinado conteúdo físico, defendemos que a passagem por entre níveis acontece no mesmo sentido defendido por Karmiloff-Smith (1994; 2010): a partir de redescrições de representações de níveis anteriores, ou seja, a partir de processos recorrentes de re-representação. Nesse sentido, consideramos que a progressão entre os diferentes níveis, que compreendem desde a codificação implícita até a explicitação, depende do reconhecimento de ligações conceituais inter e intrarrepresentacionais e do refinamento de invariantes operatórios, cuja veracidade e coerência estão intrinsecamente relacionados às ligações representacionais que são gradativamente estabelecidas.

## 7 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, com vistas a responder à segunda problemática: que níveis de explicitação do conhecimento, acerca de composição vetorial de forças, estudantes do Ensino Médio apresentam por meio de produção, de tratamento e de transformações de diversificadas representações relativas a esse conceito?

Na primeira seção, descrevemos quem são os estudantes participantes da investigação e contextualizamos o campo de pesquisa no qual ocorreu a coleta de informações, posteriormente, submetidas aos procedimentos analíticos. Na seção seguinte, são expostos os instrumentos utilizados para a coleta dessas informações: i) aplicação de uma prova escrita e ii) realização de entrevistas individuais. Na terceira seção, elencamos e descrevemos cada uma das etapas de intervenções e de procedimentos adotados para as coletas de informações. Por fim, na quarta seção, justificamos a natureza qualitativa dessa pesquisa, bem como apresentamos a opção metodológica para organizar, analisar, interpretar e discutir as informações coletadas, a Análise Textual Discursiva (MORAES, 2007; MORAES; GALIAZZI, 2011).

### 7.1 ESTUDANTES PARTICIPANTES E CONTEXTO DO CAMPO DA PESQUISA

Os participantes da pesquisa são estudantes do terceiro ano de uma das turmas do Ensino Médio de um colégio estadual do município de Londrina, Paraná. Optamos por desenvolver a pesquisa nesse colégio devido à fácil acessibilidade, bem como pela aceitação e prontidão por parte da equipe de direção e coordenação pedagógica em receber pesquisadores na instituição.

A investigação foi realizada no final do primeiro semestre do ano de 2017, período em que essa turma estava finalizando os estudos da disciplina de Física, uma vez que o colégio em questão adota o funcionamento do Ensino Médio organizado por blocos de disciplinas semestrais. Nesse contexto, a turma selecionada para a realização da pesquisa, constituída por 27 estudantes, contava com cinco aulas de Física por semana, sendo uma aula às quartas-feiras e aulas geminadas às terças e quintas-feiras. Além das aulas de Física, o professor da disciplina de Geografia nos cedeu algumas horas-aula para a realização da

pesquisa, conforme mencionamos adiante, ao descrever cada uma das etapas que constituíram a investigação.

Em nossos primeiros contatos no colégio, explicamos as propostas da pesquisa à direção e recolhemos o termo de anuência para procedermos com a pesquisa (ver APÊNDICE A). Ainda, durante as primeiras visitas, conversamos com a professora responsável pela disciplina de Física de todas as turmas de Ensino Médio da instituição. Esse contato foi fundamental para conhecermos o colégio em termos de estrutura para a oferta da disciplina, incluindo os materiais e equipamentos disponíveis no laboratório de Ciências, na biblioteca, nas salas de aulas e para reconhecermos a escola em termos pedagógicos.

Em relação a esse segundo ponto, conversamos com a professora no intuito de nos informarmos a respeito dos conteúdos abordados naquele momento, bem como quais seriam as turmas e o período de pesquisa mais indicados para não interferirmos substancialmente em seu trabalho, em relação ao cumprimento de seu planejamento de ensino. Por indicação da professora, optamos pela realização da pesquisa com uma das turmas de terceiro ano da instituição, a qual, segundo a professora, mostraria maior interesse em participar das atividades de investigação a que nos propusemos.

A professora de Física nos informou que havia finalizado os conteúdos programáticos com suas turmas de terceiro ano e que estava realizando com eles a revisão de alguns conteúdos estudados em séries anteriores. O conteúdo revisto no momento em que seria realizada a investigação eram pertinentes ao campo conceitual da Mecânica. Dessa forma, inclusive a pedido da professora, de modo a dar continuidade ao trabalho por ela iniciado, elaboramos e propomos situações de ensino que abrangeram conteúdos fundamentais desse domínio da Física, a saber contemplamos conceitos relacionados à abordagem de força resultante.

Também conversamos com a professora de Matemática da instituição, considerando a possibilidade de investigação nessa disciplina devido à formação da pesquisadora em Matemática e Física (graduação em andamento no momento da investigação). Porém, nos interessamos pela realização da pesquisa na disciplina de Física pelos seguintes motivos: i) por ser uma disciplina científica que apresenta intrínsecas relações com a Matemática, o que permitiria discutir potencialidades de estender a aplicação do instrumento analítico aos domínios científicos e matemático e ii) pelo fato de que, no momento de realização da pesquisa, os estudantes

participantes estavam estudando conceitos pertencentes aos estudos da Mecânica, que julgamos abranger conteúdos com maior potencialidades para a elaboração de propostas pedagógicas e metodológicas diversas, tais como experimentos, aulas expositivas, resoluções de problemas, entre muitas outras, circunstanciadas por diversos desafios representacionais, se comparado aos conteúdos a respeito de Números Complexos, que estavam sendo abordados na mesma turma, na disciplina de Matemática.

Do universo de 27 estudantes, nove deles compuseram a análise da pesquisa, pois consideramos apenas os estudantes que efetivamente participaram de todas as etapas do processo investigativo, conforme descrevemos nas próximas seções. Também, excluimos dos procedimentos analíticos aqueles estudantes que não entregaram o termo de consentimento livre e esclarecido (ver APÊNDICE B), o qual deveria ser assinado pelo aluno e pelo responsável, em caso de aceite em participar da pesquisa. Para garantir o anonimato, a identificação dos estudantes participantes da pesquisa deu-se pela letra E, de estudante, e um número de um a nove (E1, E2, ..., E9).

## 7.2 INSTRUMENTOS DE COLETAS DAS INFORMAÇÕES

As informações para submissão aos procedimentos analíticos, segundo aplicação do instrumento analítico que propomos, foram constituídas por registros escritos, coletados por meio de resoluções produzidas pelos estudantes às questões propostas em uma prova escrita, e por entrevistas, realizadas após aplicação da prova.

Na sequência, descrevemos cada um dos instrumentos adotados para obtenção das informações submetidas à análise.

### 7.2.1 Prova Escrita

No intuito de coletar registros escritos dos estudantes após as intervenções que seriam propostas, elaboramos uma prova escrita composta por sete questões, que contemplam conteúdos pertencentes ao campo conceitual da Mecânica, cujos domínios específicos abordados envolveram conceitos de grandezas escalares e vetoriais, soma vetorial, força resultante e equilíbrio de uma partícula, abordagens

essas que seriam possíveis de contemplar na quantidade de aulas que tínhamos disponíveis para realização da pesquisa.

As questões foram elaboradas pelos pesquisadores após consultar os materiais de Física utilizados pelos estudantes participantes da pesquisa e a partir de conversas com a professora da disciplina, a qual validou as questões. Além dela, três professores de Matemática e três professores de Física, todos eles mestres ou doutores, avaliaram as questões e propuseram sugestões, até chegarmos no arquivo final, conforme consta no APÊNDICE C.

Ao elaborar as questões, além de considerar as sugestões de outros professores e os materiais didáticos utilizados pelos estudantes, buscamos inseri-las na perspectiva da Diversidade Representacional, de modo a abordar e permitir ao estudante manifestar distintas formas e registros representacionais para mesmos domínios. A proposta de elaboração fundamentou-se em conjecturas de por meio de uma multiplicidade representacional é possível inferir indícios de construções conceituais do estudante, bem como evidenciar se ele é capaz de realizar atividades cognitivas relacionadas às representações, como de tradução, integração e coordenação. Ainda, com o intuito de obter esses tipos de informações, orientamos os estudantes a resolverem todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras, o que fez para resolver cada questão. Solicitamos que nenhum cálculo, esquema, desenho e outras formas de representação que utilizassem na resolução de cada questão fossem apagados.

A questão 1 apresenta o contexto de um sujeito que precisa chegar até um determinado destino, cujo caminho é desconhecido e a única informação recebida é “*ande três quadras, vire na esquina e ande mais duas quadras*”. Na situação hipotética, o sujeito não tem nenhum auxílio à disposição, mas na questão um mapa é fornecido para auxiliar o estudante a compreender a situação e responder aos questionamentos que são propostos.

O primeiro, dentre os questionamentos, é a respeito da possibilidade de chegar ao destino desejado apenas com a informação fornecida, sem consulta ao mapa. No segundo questionamento, menciona-se que a situação envolve o conceito de *deslocamento*, que é uma grandeza física, e indaga se essa é uma grandeza escalar ou vetorial. Com esses questionamentos, objetivamos evidenciar se os estudantes reconhecem o conceito de deslocamento como grandeza vetorial e que,

portanto, demanda de módulo, direção e sentido para ser totalmente descrito. Essa primeira questão também contempla uma pergunta referente à diferença entre deslocamento e trajetória, assunto proposto nos momentos de intervenção.

Na questão 2, são apresentados alguns pares de vetores e pede-se para verificar a igualdade entre eles e justificar a resposta fornecida. Com essa questão, objetivamos verificar se os estudantes reconhecem as propriedades que caracterizam dois vetores como iguais ou distintos entre si.

A questão 3 apresenta uma situação de aplicação de forças opostas sobre um carrinho de supermercado, em que, de um lado, há aplicação de duas forças e, do outro, apenas uma, e pede-se ao estudante que determine o módulo e a orientação da força resultante. Diante dessa situação, esperávamos que o estudante realizasse a soma vetorial e descrevesse a orientação da força resultante.

A questão 4 também contempla a soma vetorial, porém, não apresenta nenhuma ilustração da situação. Além disso, não envolve forças opostas entre si, mas forças determinadas por um ângulo de  $60^\circ$ . Para esse caso, também esperávamos que o estudante fosse capaz de determinar o módulo e a orientação da força resultante.

A questão 5, igualmente, trata a respeito de força resultante, mas determinado a partir de duas forças perpendiculares entre si, conforme imagem que ilustra a situação (ver APÊNDICE C). Nessa questão, além de determinar o módulo da força resultante, é solicitado ao estudante que explique o significado do resultado obtido para a situação relatada. Dessa forma, esperávamos que o estudante, muito além de realizar procedimentos matemáticos para determinação da intensidade dessa força, fosse capaz de manifestar, por meio de linguagem verbal escrita, suas compreensões a respeito do resultado obtido, em relação ao contexto considerado.

A questão 6 aborda o equilíbrio de forças. Para ela, esperávamos que o estudante explicitasse suas compreensões referentes ao significado de equilíbrio de um corpo sobre o qual forças são aplicadas e condições em que isso acontece.

Por fim, na questão 7, retornamos à abordagem a respeito de força resultante. São apresentados dois barcos em situações distintas quanto ao direcionamento de forças que são aplicadas sobre eles. Para essa questão, esperávamos que o estudante reconhecesse a influência do ângulo nas distintas situações, A e B, em termos de força resultante em cada caso.

### 7.2.2 Entrevistas

Para compor as informações submetidas à análise, também optamos pela realização de entrevistas semiestruturadas com cada estudante, individualmente. As entrevistas realizadas se caracterizaram como semiestruturadas, pois seguimos um roteiro previamente estabelecido, porém, com liberdade para adaptar as perguntas em determinadas situações ou incluir novas perguntas, visando explorar de maneira mais ampla as situações.

Essa consideração vem ao encontro do que defende Triviños (1987) a respeito das características de uma entrevista semiestruturada. Segundo o autor, esse tipo de entrevista fundamenta-se em questionamentos básicos, atrelados aos objetivos e pressupostos teóricos da pesquisa. A partir das respostas dos entrevistados, os questionamentos podem conduzir a novas perguntas e respostas, o que favorece a compreensão do fenômeno investigado, bem como contribui com a posição consciente e atuante do pesquisador durante o processo de coleta de informações.

Em complemento, encontramos em Manzini (1991) a defesa de que a entrevista semiestruturada abrange perguntas principais e, durante a entrevista, envolve a adição de novos questionamentos, que emergem das circunstâncias do momento. Esses novos questionamentos, segundo o autor, contribuem para que o pesquisador obtenha informações mais livres e menos padronizadas. Assim, as perguntas elaboradas previamente servem como meio de o pesquisador se organizar. Porém, a riqueza da entrevista reside, sobretudo, nos questionamentos que emergem durante o processo de entrevista.

Com a realização de entrevistas por estudante, objetivamos obter maiores subsídios para classificar conhecimentos construídos por cada estudante, de acordo com os níveis de explicitação do instrumento analítico proposto, bem como identificar se haveria ou não a manifestação do que consideramos como invariantes predicativos, na forma de linguagem verbal oral. Com esse intuito, o roteiro elementar de questionamentos pautou-se na prova escrita realizada por cada estudante, e contemplou, basicamente, mesmas perguntas para cada questão dessa prova:

- a) O que você (estudante) compreendeu a partir da questão proposta?
- b) Como você explica os procedimentos que adotou para resolver a questão?

c) Qual o significado do resultado que obteve?

Cada uma das entrevistas foi gravada em áudio e vídeo, no intuito de nos permitir realizar, posteriormente, a identificação de cada estudante, a análise de possíveis representações cinestésicas e a transcrição de cada uma das entrevistas.

### 7.3 ETAPAS DE INTERVENÇÃO E DE COLETA DE INFORMAÇÕES

Na sequência, passamos a descrever cada uma das etapas da coleta de informações para posterior análise, bem como enfatizamos os momentos de intervenção realizados na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, no que diz respeito a um ensino pautado em situações progressivamente mais complexas e, sobretudo, na perspectiva da Diversidade Representacional, uma vez que corroboramos com as defesas a respeito das atribuições de um contexto de ensino e de aprendizagem em Física circunstanciado por múltiplas formas, modos e registros representacionais.

#### *Etapa 1: Apresentação*

No primeiro dia, a pesquisadora acompanhou a professora de Física durante alguns momentos de sua aula desenvolvida com a turma participante da pesquisa. Nesse momento, a pesquisadora se apresentou e explicou os objetivos e a maneira como organizou a pesquisa.

Vale ressaltar que os estudantes foram convidados a participarem da pesquisa e foram informados que, em caso de negação, poderiam apenas participar das aulas que seriam ministradas pela pesquisadora, sob a supervisão da professora de Física da turma, mas que não teriam a obrigatoriedade de participar das atividades avaliativas que seriam propostas. Nesse dia, foi entregue e explicado o termo de consentimento livre e esclarecido (ver APÊNDICE B), o qual deveria ser assinado pelo aluno e pelo responsável, em caso de aceite em participar da pesquisa. Nesse dia estavam presentes todos os 27 estudantes que constituíam a turma.

#### *Etapa 2: Aplicação de prova escrita de caráter diagnóstico*

No dia seguinte, aplicamos aos estudantes algumas questões relativas ao campo conceitual da Mecânica, contemplando as mesmas questões abordadas na

prova escrita (ver APÊNDICE C). Essa aplicação se caracterizou como uma prova escrita de caráter diagnóstico, em que objetivamos identificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos conteúdos que seriam propostos.

Ressaltamos que os resultados dessa prova não foram incluídos nas informações submetidas aos procedimentos analíticos, ou seja, o instrumento analítico que propomos não foi aplicado sobre as informações advindas da prova escrita diagnóstica. Julgamos pertinente aplicar essa prova aos estudantes antes de iniciarmos os momentos de intervenção apenas para que pudéssemos identificar conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos conteúdos físicos que seriam abordados. Nesse sentido, consideramos que essa identificação nos auxiliaria, naquele momento, a refletir as abordagens didáticas de intervenção que seriam elaboradas e propostas para contemplar esses conteúdos nas aulas seguintes.

Nesse dia, contávamos com apenas uma hora aula, tempo que não seria suficiente para conclusão das questões propostas. Por esse motivo, o professor da disciplina de Geografia, que entraria na turma em seguida, nos cedeu mais uma hora aula.

A aplicação dessa prova não foi realizada na sala de aula dos estudantes. Eles foram conduzidos a outra sala próxima, que estava preparada para utilização em todos os demais dias de investigação, contando com três câmeras filmadoras, duas voltadas para os estudantes e, uma, para a pesquisadora.

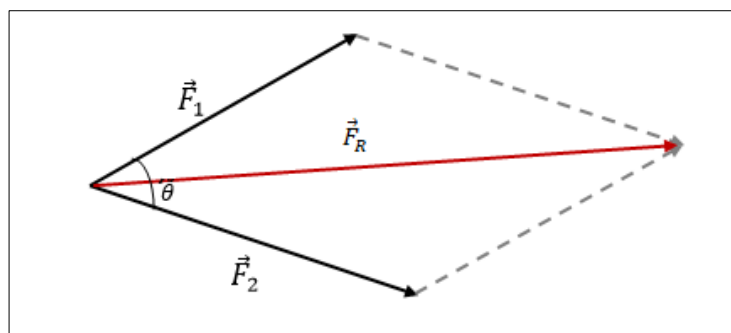
Durante a aplicação, os estudantes não realizaram nenhum tipo de consulta a seus materiais. Eles contaram, apenas, com algumas informações disponibilizadas no quadro de giz, que foram os resultados de ângulos notáveis para as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente e a expressão matemática para adição vetorial, baseada na Lei dos Cossenos,  $|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$ . As informações foram fornecidas de acordo com os símbolos apresentados no livro didático utilizado pelos estudantes participantes da pesquisa.

Justificamos que a referência à expressão da adição vetorial como *baseada* na lei dos cossenos deve-se ao fato de que, na Matemática, essa lei é dada por  $\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \theta$ , em que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  representam dois vetores que serão somados, e  $\vec{c}$  representa o vetor soma ou vetor resultante.

Substituindo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , respectivamente, pelos vetores que representam os módulos das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , e  $\vec{c}$  pelo módulo do vetor força resultante  $\vec{F}_R$ , na Física

aplicamos a regra do paralelogramo para determinar a força resultante ( $\vec{F}_R$ ) a partir de duas forças ( $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ) de mesma origem e ângulo formado entre elas igual a  $\theta$ . Essa regra consiste em traçarmos paralelas a partir dos segmentos orientados representativos de cada uma das duas forças consideradas, obtendo um paralelogramo conforme ilustra a figura a seguir:

**Figura 8 – Regra do Paralelogramo**

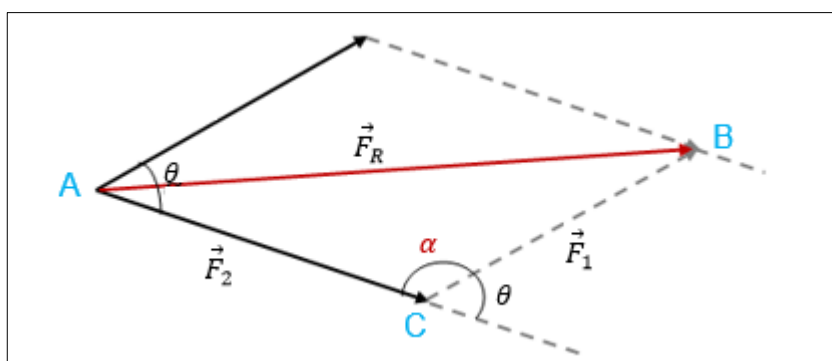


Fonte: dos autores (2017)

Na figura 8 destaca-se a força resultante ( $\vec{F}_R$ ) representada, geometricamente, pelo segmento orientado coincidente à origem das duas forças dadas ( $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ) e extremidade no encontro das extremidades das paralelas traçadas, correspondentes a cada um dos vetores que representam as forças dadas, configurando a força resultante ( $\vec{F}_R$ ) como uma das diagonais do paralelogramo.

Por procedimentos algébricos, o módulo da força resultante ( $\vec{F}_R$ ) é obtido ao aplicar-se a relação trigonométrica Lei dos Cossenos ao triângulo obtido a partir dos vetores  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_R$ , conforme mostra a figura a seguir:

**Figura 9 – Aplicação da Lei dos Cossenos**



Fonte: Dos autores (2017).

Considerando o triângulo ABC, aplicamos a Lei dos Cossenos e obtemos:

$$\vec{F}_R^2 = \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 - 2 \cdot \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 \cdot \cos \alpha$$

Como  $\theta = 180^\circ - \alpha$ , temos:

$$\cos \theta = \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\cos \theta = \cos 180^\circ \cdot \cos \alpha - \text{sen } 180^\circ \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\cos \theta = -1 \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\cos \theta = -\cos \alpha$$

Logo:

$$\vec{F}_R^2 = \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + 2 \cdot \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 \cdot \cos \theta$$

Considerando o módulo dos vetores representativos das forças, escrevemos:

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

Essa última expressão matemática é a que consideramos como baseada na Lei dos Cossenos, utilizada para determinar a adição vetorial nos casos em que duas forças são aplicadas sobre um mesmo corpo de massa (possuem mesma origem) e formam entre si uma medida angular ( $\theta$ ).

Destacamos que no quadro de giz, no momento de aplicação da prova escrita, foi disponibilizado aos estudantes apenas a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos e tabela trigonométrica com ângulos notáveis.

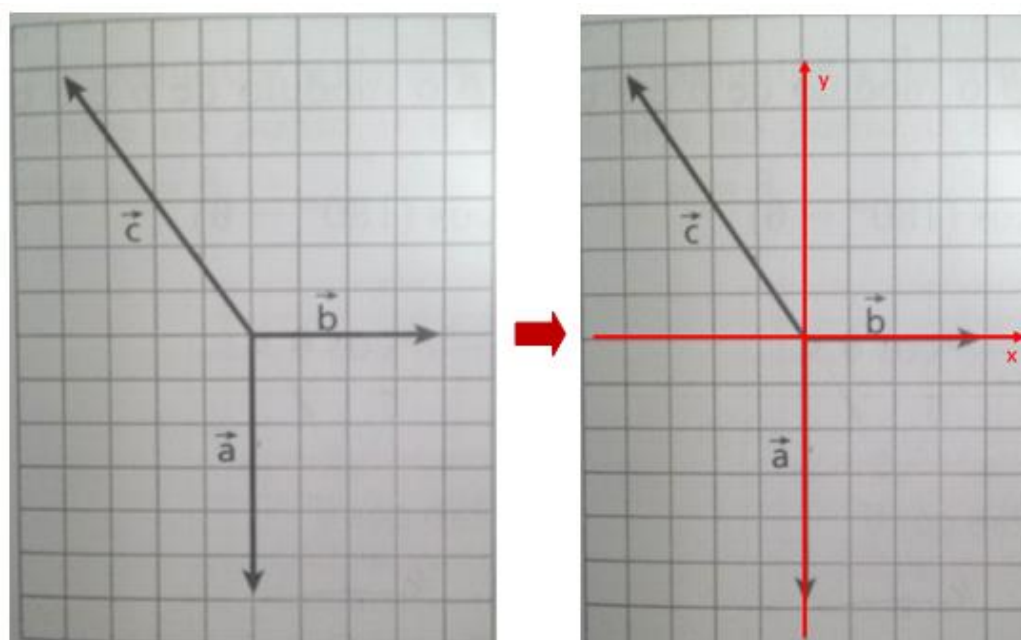
### *Etapa 3: Intervenção 1*

Ainda na mesma semana, iniciamos os momentos de intervenção. No primeiro dia, em que contamos com duas horas aulas, estiveram presentes 25 estudantes e as abordagens didáticas foram referentes às grandezas, escalares e vetoriais, e soma vetorial. Durante essas abordagens, foram contemplados exemplos pertinentes à cinemática vetorial, tais como deslocamento, velocidade e aceleração. Ressaltamos que a abordagem de todos esses conteúdos em apenas duas horas aulas foi possível porque a turma já os havia estudado no primeiro ano do Ensino Médio e revisto recentemente.

Como recursos, utilizamos o quadro de giz e a apresentação de slides para mostrar algumas figuras com o intuito de auxiliar nas explicações e discussões. Por exemplo, utilizamos figuras de crianças brincando de “cabo de guerra” para ilustrar duas forças de mesma direção e sentidos opostos, dentre outras situações em que a ideia de força resultante estivesse presente. Também utilizamos ilustrações para auxiliar na diferenciação de direção e sentido, que são características de um vetor, além do módulo.

Para a abordagem de soma geométrica de vetores (Regra do Polígono), utilizamos algumas impressões contendo representações de vetores com mesma origem no plano cartesiano, conforme exemplificamos na figura a seguir:

**Figura 10** – Exemplo de representação de vetores de mesma origem no plano cartesiano, em material impresso disponibilizado aos estudantes



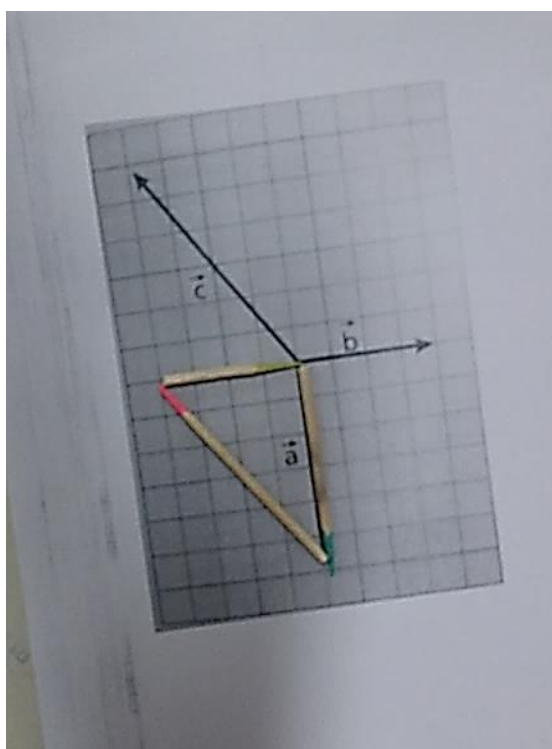
**Fonte:** dos autores (2017)

No exemplo apresentado na figura 10, constam três vetores de mesma origem. Hipoteticamente, os alunos foram conduzidos a interpretar esses vetores como representações de forças sobre um mesmo corpo de massa, e que estaríamos interessados em determinar, geometricamente, a força resultante aplicada sobre esse corpo. Para isso, foram disponibilizados aos estudantes, palitos representando cada um dos vetores, de modo que pudessem ser sobrepostos às impressões e

facilmente ser transladados para a realização da soma vetorial. Cada palito apresentava o mesmo tamanho de um dos vetores representados em materiais impressos, e eram compostos por origem e extremidade colorida, para facilitar a identificação.

Para realização dessa atividade, os estudantes foram organizados em pequenos grupos (máximo de quatro estudantes em cada). Na figura 11, apresentamos a fotografia de um exemplo de atividade desenvolvida por um desses grupos:

**Figura 11** – Exemplo de atividade de soma vetorial com palitos e material impresso, desenvolvida por um dos grupos de estudantes



**Fonte:** dos autores (2017)

Em seguida a essa atividade, os estudantes foram conduzidos a realizar o mesmo procedimento de transposição de vetores para realização de soma vetorial pela Regra do Polígono, porém, sem utilizar palitos, mas apenas lápis e papel. Por conseguinte, demos início às abordagens de soma vetorial por meio de expressões matemáticas, utilizando a expressão algébrica de adição vetorial, baseada na Lei dos Cossenos. Com base nessa expressão, conduzimos os estudantes à percepção de alguns casos particulares da soma vetorial, como o de vetores de mesma origem

e perpendiculares entre si, em que a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, é reduzida ao Teorema de Pitágoras.

Para os casos de forças de mesma direção e sentido, ou de mesma direção, porém, sentido contrário, a partir de figuras apresentadas em slides os estudantes puderam perceber que não há a necessidade de utilização de fórmulas para obtenção da soma vetorial, basta somar ou subtrair os módulos dos vetores, respectivamente, e considerar a direção e sentido do vetor de maior módulo resultante. Por fim, os estudantes foram instigados a demonstrar esses dois casos por meio da expressão matemática de soma vetorial, baseada na Lei dos Cossenos.

Ressaltamos que vários exemplos, inclusive envolvendo conceitos de cinemática vetorial, foram mencionados e utilizados em exercícios e situações-problemas nesse primeiro dia de intervenção, e que todo esse momento foi gravado em áudio e vídeo.

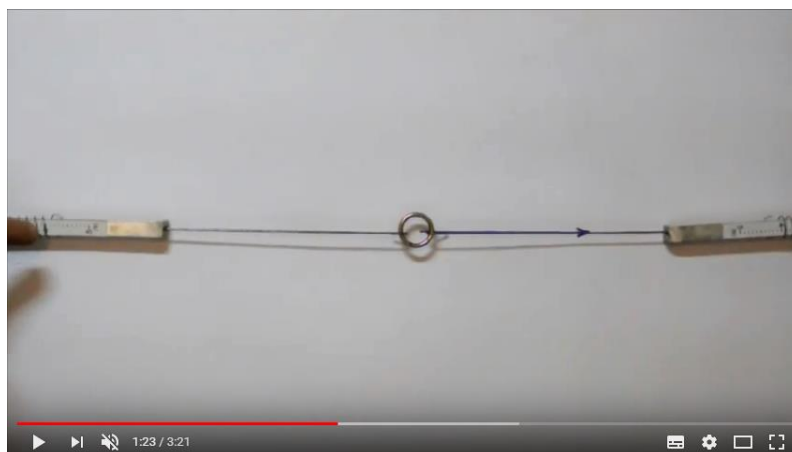
#### *Etapa 4: Intervenção 2*

No segundo dia de intervenção, realizamos uma breve revisão a respeito dos conteúdos abordados no primeiro momento de intervenção e demos início à retomada de alguns conteúdos de Dinâmica, contemplando o efeito dinâmico de uma força, o conceito de força resultante, equilíbrio de uma partícula e conceito de inércia.

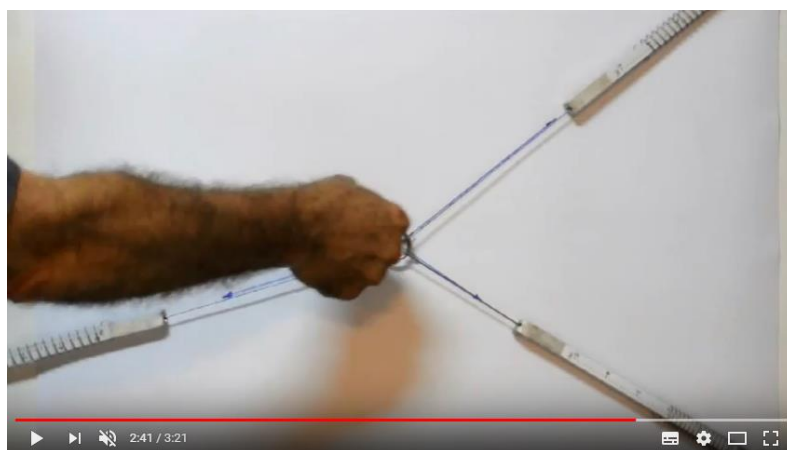
A princípio, a pretensão era realizar com os estudantes as mesmas atividades apresentadas em dois vídeos do YouTube (disponíveis em: <https://www.youtube.com/watch?v=CGhiW4YsbOc> e <https://www.youtube.com/watch?v=Ut7kUpEhd4w>. Acessos em: 26 jun. 2017). Ambos os vídeos apresentam atividades experimentais que contemplam o conceito de força, utilizando dinamômetros. No primeiro vídeo, esses instrumentos são utilizados para a determinação de equilíbrio de forças concorrentes, conforme ilustramos a seguir:

**Figura 12** – Cenas do vídeo de experimentos com dinamômetros para determinação de equilíbrio (a) de duas forças opostas e (b) de três forças concorrentes

(a)



(b)



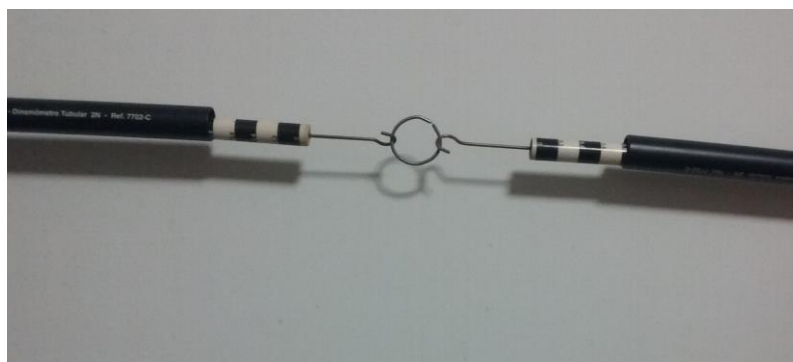
**Fonte:** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CGhiW4YsbOc>. Acesso em: 26 jun. 2017

Optamos por apresentar o vídeo aos estudantes e pausá-lo em momentos que julgamos oportunos para promover discussões e realizar indagações. Para esse momento, a pesquisadora dispôs os estudantes em pequenos grupos, entregou dois dinamômetros para cada, explicou o funcionamento e finalidade desse instrumento e esclareceu que a realização dos experimentos mostrados nos vídeos poderia conduzir a resultados discrepantes, pois os dinamômetros que eles haviam recebido não estavam devidamente calibrados.

Ainda assim, haja vista o interesse dos estudantes e posse dos materiais necessários, eles reproduziram um dos experimentos do primeiro vídeo, conforme ilustra a figura 12(a), em que foram utilizados dois dinamômetros e uma argola para

determinar o equilíbrio de duas forças de mesma direção e sentidos contrários. A figura 13 ilustra essa atividade desenvolvida por um dos grupos de estudantes:

**Figura 13** – Atividade experimental com dinamômetros para determinação de equilíbrio de duas forças concorrentes



Fonte: dos autores (2017)

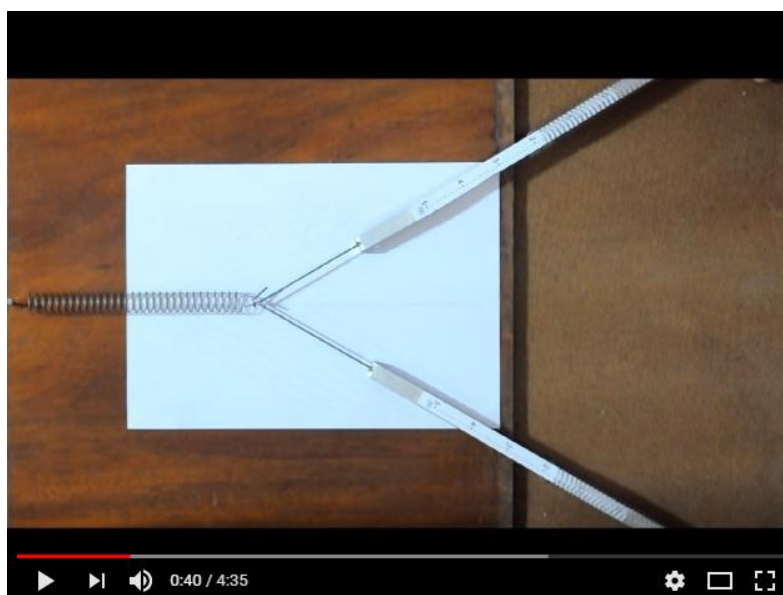
A partir dessa atividade e do vídeo assistido, foi possível discutir a respeito de equilíbrio estático e as condições necessárias para que ocorra esse equilíbrio, tanto no caso de duas, quanto de três forças concorrentes. No quadro de giz, ilustramos as situações a partir de representações de vetores e tratamos matematicamente cada situação assistida no vídeo, inclusive, visando estabelecer relações com os conceitos estudados no primeiro momento de intervenção.

No segundo vídeo, os dinamômetros são utilizados para determinação da soma de duas forças de mesmo módulo, porém, em duas situações distintas: primeiro, considerando um ângulo agudo e, segundo, considerando um ângulo reto.

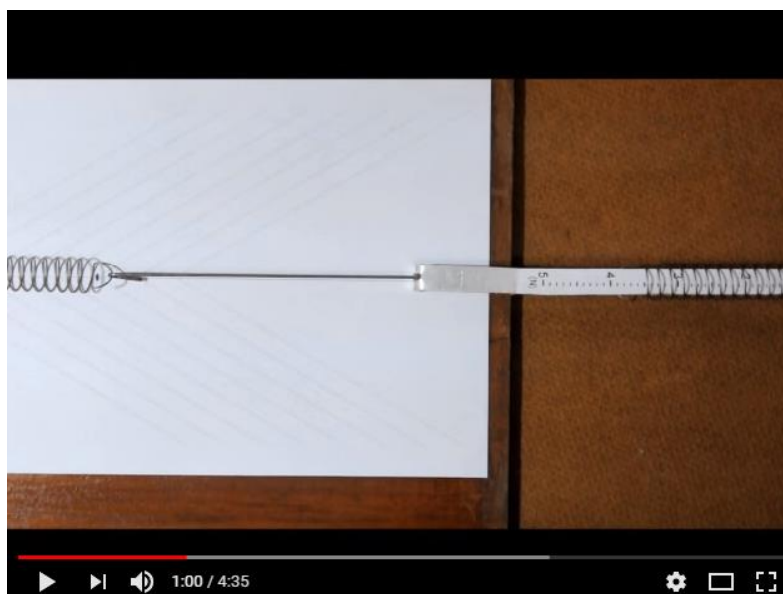
No vídeo, primeiro são exercidas duas forças de dois newtons (2 N) cada sobre uma mola, utilizando dois dinamômetros sobrepostos às direções traçadas em uma folha de papel, direções essas que são determinadas pela inclinação de um ângulo agudo (ver Figura 14(a)). Em seguida, utilizando essa mesma representação e um único dinamômetro, verificamos qual é a força necessária para produzir o mesmo efeito que as duas forças de dois newtons, nas condições em que foram aplicadas (ver Figura 14(b)).

**Figura 14** – Cenas do vídeo de experimentos com dinamômetros para a verificação (a) de duas forças de 2 N cada, em determinadas direções e (b) de uma força resultante

(a)



(b)



**Fonte:** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CGhiW4YsbOc>. Acesso em: 26 jun. 2017

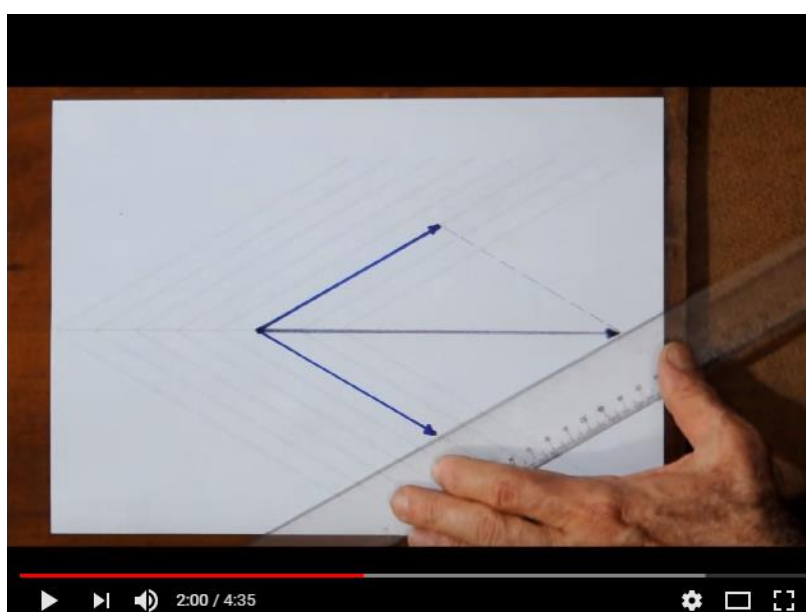
A partir do resultado obtido, uma força resultante de 3,5 N, a pesquisadora estabeleceu mediações, com o intuito de auxiliar os estudantes a evidenciar relações entre o que foi visualizado no vídeo com o que foi discutido no momento de intervenção da aula anterior, a respeito de soma vetorial. A partir das informações

disponibilizadas no vídeo, esperávamos que os estudantes percebessem a possibilidade de determinação do ângulo de inclinação entre as retas direcionais desenhadas na folha de papel, a partir do desenvolvimento da expressão matemática de determinação da soma vetorial:

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_R|^2 &= |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta \\
 (3,5)^2 &= (2)^2 + (2)^2 + 2 \cdot (2) \cdot (2) \cdot \cos \theta \\
 12,25 &= 4 + 4 + 8 \cdot \cos \theta \\
 12,25 - 8 &= 8 \cdot \cos \theta \\
 \frac{4,25}{8} &= \cos \theta \\
 \cos \theta &= 0,53125 \\
 \theta &\approx 57,9^\circ
 \end{aligned}$$

Em seguida, avançamos o vídeo para discutir a soma geométrica de vetores, em que fica evidente a Regra do Paralelogramo, conforme mostra a figura a seguir:

**Figura 15** – Cena do vídeo a respeito da soma geométrica de vetores para a primeira situação do experimento

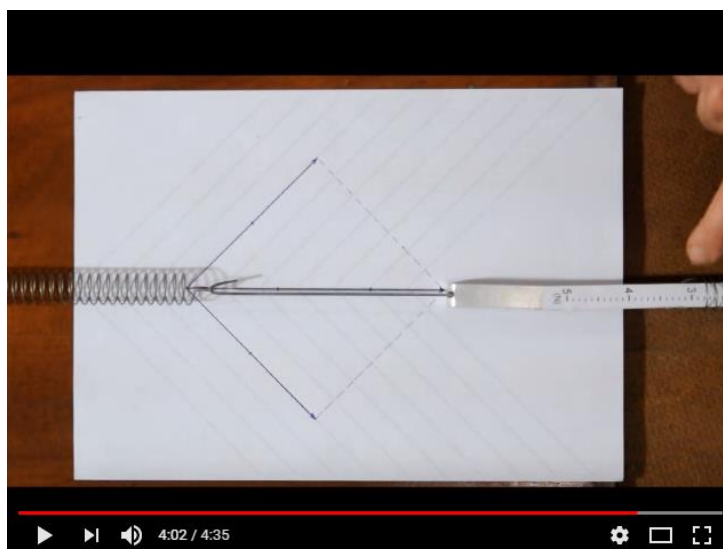


**Fonte:** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CGhiW4YsbOc>. Acesso em: 26 jun. 2017

Por fim, no vídeo, considera-se outras duas direções diferentes da situação anterior, em que, mais uma vez, são aplicadas duas forças de 2 N cada sobre uma

mola e, em seguida, verifica-se a força que sozinha produz o mesmo efeito. Porém, dessa vez, o paralelogramo é inicialmente proposto e o professor do vídeo começa pela verificação da força resultante, obtendo o valor de 2,8 N:

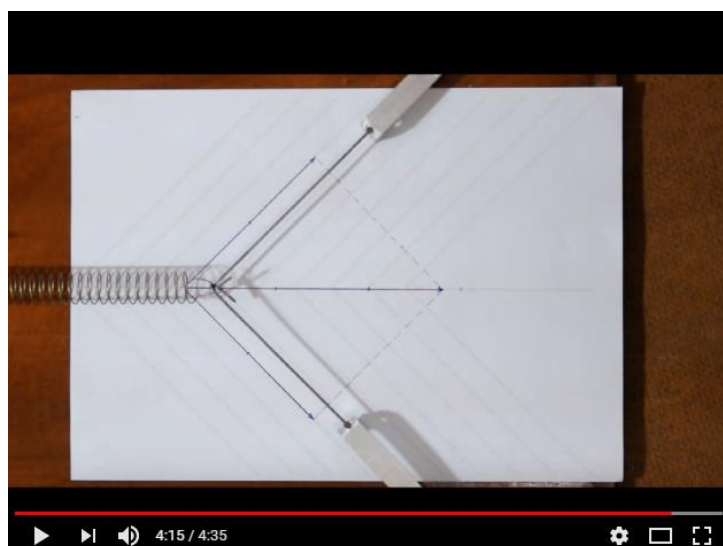
**Figura 16** – Cena do vídeo a respeito da determinação da força resultante da segunda situação experimental



**Fonte:** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CGhiW4YsbOc>. Acesso em: 26 jun. 2017

Por conseguinte, mostra-se o mesmo efeito da força resultante, porém, aplicando sobre a mola, duas forças de 2 N cada:

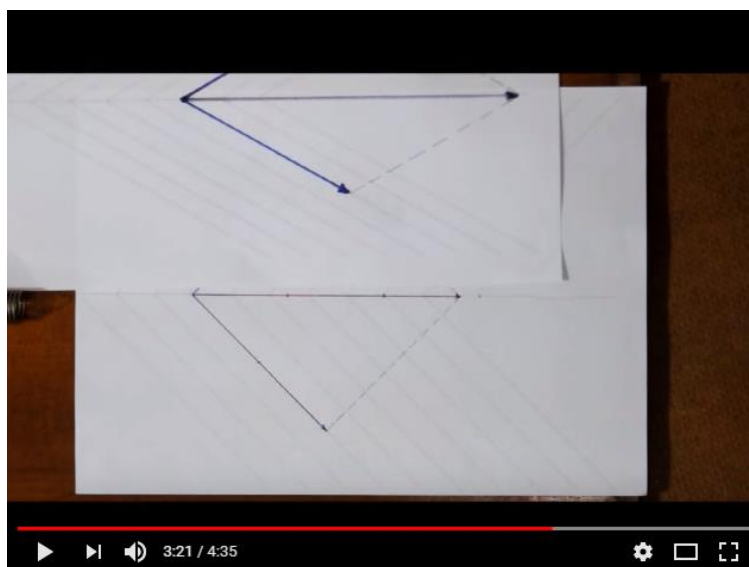
**Figura 17** – Cena do vídeo a respeito da verificação da aplicação de duas forças de mesma intensidade na segunda situação experimental



**Fonte:** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CGhiW4YsbOc>. Acesso em: 26 jun. 2017

Após essas visualizações, retornamos alguns segundos do vídeo e o paramos em uma cena que mostra as duas folhas de papel com direções distintas:

**Figura 18** – Cena do vídeo que mostra as duas folhas de papel com direções distintas



**Fonte:** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CGhiW4YsbOc>. Acesso em: 26 jun. 2017

O objetivo, nesse momento, foi promover discussões e reflexões a respeito das diferenças entre as duas situações observadas. Almejávamos que os estudantes percebessem que a adição de vetores de mesmo módulo nem sempre apresenta mesmo resultado, pois essa adição não depende apenas do valor numérico que representa o módulo do vetor, mas, igualmente, de sua direção e sentido. No caso, esperávamos que os estudantes percebessem que a condição que diferencia a primeira situação da segunda é o ângulo que determina as direções em cada uma dessas situações, fator que influenciou diretamente no valor numérico obtido para a força resultante.

Assim como para a situação anterior, os estudantes também foram instigados a desenvolver procedimentos de cálculo para determinação do ângulo de inclinação da segunda situação:

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$(2,8)^2 = (2)^2 + (2)^2 + 2 \cdot (2) \cdot (2) \cdot \cos \theta$$

$$7,84 = 4 + 4 + 8 \cdot \cos \theta$$

$$7,84 - 8 = 8 \cdot \cos \theta$$

$$\frac{-0,16}{8} = \cos \theta$$

$$\cos \theta = -0,02$$

$$\theta \approx 91^\circ$$

Nesse dia, estiveram presentes 25 estudantes, e todo esse momento de intervenção foi gravado em áudio e vídeo.

#### *Etapa 5: Coleta de registros escritos*

Após todos os momentos de intervenção, no dia seguinte, demos início à coleta de informação que seria submetida aos procedimentos analíticos. Iniciamos pela aplicação da prova escrita (ver APÊNDICE C), com o objetivo de inferir a respeito dos conhecimentos construídos e revelados por estudantes, após momentos de intervenção.

Nessa etapa, disponibilizamos, no quadro de giz, informações a respeito de ângulos notáveis e expressão matemática para determinação de soma vetorial (baseada na Lei dos Cossenos) e os estudantes dispuseram de duas horas aulas para realização da prova.

Apesar de estarem presentes 24 estudantes, apenas 22 aceitaram participar da prova escrita.

#### *Etapa 6: Realização de entrevistas*

Por fim, no dia de aula seguinte, realizamos entrevistas com estudantes participantes da pesquisa. Da mesma forma que na etapa de aplicação da prova escrita, os estudantes foram convidados a participar das entrevistas, dentre os quais 15 aceitaram. As entrevistas foram realizadas individualmente, de modo a estarem presentes em uma sala de aula, durante cada entrevista, apenas a pesquisadora e o estudante. Cada uma dessas entrevistas foi gravada em vídeo e áudio, nos permitindo a posterior identificação de cada estudante e, quando necessário, a visualização de possíveis representações gestuais e cinestésicas.

Esse foi o último dia de aula antes dos estudantes entrarem em período de recesso escolar. Por isso, mais uma vez o professor de Geografia fez a gentileza de

ceder as aulas geminadas que teria nesse dia com a turma e, assim, dispomos de três horas aulas para realização das entrevistas.

Foi nessa última etapa que finalizamos o recolhimento dos termos de consentimento livre e esclarecido, o que nos permitiu delimitar as informações a serem submetidas a procedimentos analíticos. Optamos por considerar as informações obtidas apenas dos estudantes que participaram de todas as etapas da investigação e que nos forneceram, devidamente assinados, os termos de consentimento. Deste modo, conforme já mencionado, foram submetidas a procedimentos analíticos as informações obtidas de apenas nove estudantes, as quais foram, posteriormente, transcritas e comparadas aos registros escritos, durante processo de análise.

No quadro 4, resumimos as atividades propostas em cada uma das etapas:

**Quadro 4** – Resumo das atividades propostas por etapa

<b>Etapas</b>	<b>Atividade(s)</b>	<b>Hora/aula</b>	<b>Conteúdos físicos abordados</b>
<b>1</b>	- Apresentação da pesquisadora e dos objetivos e estrutura da pesquisa. - Entrega do termo de consentimento.	2	-----
<b>2</b>	- Aplicação de prova escrita em caráter diagnóstico.	2	Domínios pertinentes ao campo conceitual da Mecânica, relacionados aos conceitos de grandezas escalares e vetoriais, soma vetorial, força resultante e equilíbrio de uma partícula.
<b>3</b>	- Primeiro momento de intervenção, que abrangeu estratégias didáticas experimentais (palitos e materiais impressos), apresentação de figuras a partir de slides e quadro de giz.	2	Grandezas escalares e vetoriais, soma vetorial (Regras do Polígono e do Paralelogramo) e cinemática vetorial.
<b>4</b>	- Segundo momento de intervenção, que abrangeu estratégias didáticas experimentais (dinamômetros), apresentação de vídeos e quadro de giz.	2	Efeito dinâmico de uma força, força resultante, equilíbrio de uma partícula e inércia.
<b>5</b>	- Coleta de registros escritos por meio de aplicação da prova escrita.	2	Domínios pertinentes ao campo conceitual da Mecânica, relacionados a conceitos de grandezas escalares e vetoriais, soma vetorial, força resultante e equilíbrio de uma partícula.

6	- Realização de entrevistas individuais (coleta de informações verbais orais).	3	Domínios pertinentes ao campo conceitual da Mecânica, relacionados a conceitos de grandezas escalares e vetoriais, soma vetorial, força resultante e equilíbrio de uma partícula.
---	--	---	---

Fonte: dos autores (2018)

Conforme descrições anteriores, a respeito dos procedimentos metodológicos relacionados à coleta de informações, esclarecemos que, durante o desenvolvimento da pesquisa, nos provemos de uma multiplicidade de fontes de coletas de informações. Além de registros escritos, respostas a entrevistas e gravações em áudio e vídeo, a pesquisadora registrava, em todas as etapas, informações relevantes para a pesquisa na forma de anotações em diários de campo.

Em concordância com defesas de Yin (2005), ao recorrermos a diversos meios para coleta de informações, realizamos o que ele denomina por *triangulação*, caracterizado como um processo de utilização de várias fontes de evidências, que permite o cruzamento de informações obtidas por meio de diferentes instrumentos de coleta de informações. Segundo o autor, cada instrumento de coleta de informações apresenta particularidades que se constituem como a base para o descobrimento e a compreensão do fenômeno em investigação e tornam as interpretações e inferências realizadas sobre este mais confiáveis.

Dentre todas as atividades desenvolvidas, conforme descrevemos, ressaltamos que neste estudo consideramos, apenas, as etapas 5 e 6 para realização de procedimentos analíticos. Para justificarmos essa opção, esclarecemos que, a princípio, o nosso objetivo com a pesquisa era analisar aprendizagens dos estudantes nos momentos de prova diagnóstica e de aprendizagem (etapas 2 e 5, respectivamente), bem como os possíveis impactos das atividades de intervenção propostas (etapas 3 e 4) ao compararmos os resultados evidenciamos em ambas as provas. Dessa forma, objetivávamos evidenciar possíveis mudanças de níveis de explicitação, por estudante e por questão, em cada uma das etapas de aplicação de prova escrita (etapas 2 e 3).

Considerando o foco desta tese na elaboração do instrumento analítico, optamos por realizar sua aplicação no intuito: i) de compreender possibilidades de desse processo na análise de manifestações de conhecimentos produzidos pelo

estudante por meio de diferentes registros de representação e ii) de revisar e delinear alguns critérios de sua constituição. Assim, optamos por analisar apenas as etapas 5 e 6, em que esta última ponderamos como essencial para a identificação de conhecimento predicativo.

#### 7.4 ESCOLHA METODOLÓGICA PARA ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES

Considerando a segunda problemática da pesquisa, que consiste em investigar *que níveis de explicitação do conhecimento, acerca de composição vetorial de forças, estudantes do Ensino Médio apresentam por meio de tratamento e de produção de diversificadas representações relativas a esse conceito*, optamos por uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo, segundo pressupostos de Bogdan e Biklen (1994).

Segundo esses autores, a investigação de natureza qualitativa satisfaz cinco características:

- 1) A fonte direta de dados deve ser o ambiente natural em que o investigador se constitui como instrumento principal;
- 2) A investigação é descritiva, de modo que os dados são analisados em totalidade e não reduzidos a informações quantitativas;
- 3) O foco de interesse está mais no processo do que simplesmente nos produtos ou resultados;
- 4) Os dados são analisados pelo investigador de forma indutiva;
- 5) A atribuição de significados tem papel fundamental na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Em conformidade com defesas desses autores, a presente pesquisa se configura como de natureza qualitativa por satisfazer às seguintes características:

- 1) As informações obtidas por meio de registros escritos, diários de campo e gravações em áudio e vídeo foram coletadas no ambiente natural, ou seja, no próprio ambiente escolar dos estudantes participantes da pesquisa, em que a pesquisadora foi a principal responsável pela orientação de todo o processo investigativo;
- 2) Recorremos a diversos instrumentos de coleta de informações com o intuito de descrever os fatos em sua totalidade e o mais fiel possível, tendo em vista garantir maior credibilidade aos resultados de pesquisa;

- 3) Nosso foco principal, durante a coleta de informações, esteve no processo e não apenas nos resultados;
- 4) As informações foram coletadas tendo em vista a posterior realização de análise indutiva, realizada a partir da impregnação dos pesquisadores com as informações coletadas;
- 5) Nosso interesse esteve na compreensão dos significados atribuídos pelos estudantes às situações diversas que foram a eles propostas.

Como modalidade de análise da pesquisa qualitativa, elegemos a realização de procedimentos à luz da Análise Textual Discursiva (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2011) para organizarmos, analisarmos e interpretarmos as informações coletadas. Justificamos essa escolha metodológica por ela envolver processos e perspectivas analíticas que transitam entre a Análise de Conteúdo e a Análise de Discurso, uma vez que nosso foco investigativo está diretamente relacionado a dois vieses, nos conteúdos explicitados por meio das produções escritas dos estudantes, precisamente por meio de seus registros semióticos de representação, e nos conteúdos explicitados por meio de seus discursos.

Na sequência, apresentarmos essa metodologia de análise e, concomitantemente, descrevemos como essa pesquisa se configurou no contexto analítico proposto por essa metodologia.

#### 7.4.1 Análise Textual Discursiva

A Análise Textual Discursiva é uma modalidade de análise da pesquisa qualitativa, caracterizada como um processo de construção da compreensão de um fenômeno em investigação, a partir de novos entendimentos advindos da sequência recorrente de três componentes: a desconstrução dos textos do *corpus* (unitarização), o estabelecimento de relações entre elementos unitários (categorização) e a apreensão do novo emergente (comunicação e validação de novas compreensões) (MORAES, 2003).

De acordo com Moraes (2003) e Moraes e Galiazzi (2011), essa modalidade de análise qualitativa abarca encaminhamentos que transitam entre a Análise de Conteúdo e a Análise de Discurso e, portanto, podemos entender as três modalidades como pertencentes a um mesmo domínio, a de análises textuais. Segundo os autores, dentre as três modalidades de pesquisa, a Análise Textual

Discursiva se diferencia por permitir a compreensão de fenômenos em maior profundidade e complexidade, com vistas à produção de novos entendimentos.

Moraes (2003) e Moraes e Galiuzzi (2011) mencionam que diversos tipos de materiais podem ser submetidos à Análise Textual Discursiva, dentre eles, textos já existentes ou materiais produzidos durante a pesquisa, a partir de entrevistas, observações, anotações diversas, entre outros. Esse conjunto de materiais compõe o *corpus* da pesquisa, termo que a Análise Textual Discursiva utiliza com base na Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004).

Ainda que, em geral, na Análise Textual Discursiva se faça menção a textos como materiais que constituem o *corpus* da pesquisa, o termo “texto” não se refere apenas às produções escritas em linguagem verbal, mas “o termo deve ser entendido num sentido mais amplo, incluindo imagens e outras expressões linguísticas” (MORAES, 2003, p. 194). Essa afirmação complementa nossa opção por essa modalidade de análise, uma vez que nosso *corpus* de pesquisa abrange produções escritas de estudantes, constituídas por diversificados registros semióticos de representação, além de textos resultantes de descrições de entrevistas.

Os materiais do *corpus*, segundo Moraes (2003), ainda não podem ser entendidos como dados de pesquisa, mas apenas como informações, pois eles não trazem em si um significado a ser identificado, mas significantes que exigem do pesquisador a construção de significados baseados em teorias e intenções de pesquisa, que são particulares para cada indivíduo. Nesse contexto, o pesquisador se assume como autor das interpretações que constrói sobre o *corpus* que analisa, porém, sem deixar de ter em mente o autor do texto original (MORAES, 2003).

Ainda a respeito do *corpus* de pesquisa, não necessariamente todos os materiais precisam ser submetidos à procedimentos analíticos. Moraes (2003) indica a possibilidade de analisar apenas uma amostragem do *corpus* definida a partir de um processo de saturação, que consiste em atingir um patamar em que a inclusão de novas informações nos produtos de análise não implica em modificações nos resultados atingidos.

A Análise Textual Discursiva é composta por três ciclos: i) desconstrução e unitarização dos textos do *corpus*; ii) categorização e iii) compreensão e validação de novas compreensões, o que o autor denomina por *captar do novo emergente* (MORAES, 2003).

Após delimitar o *corpus* de pesquisa, dá-se início ao processo de desconstrução e unitarização. Nesse processo, são realizados “recortes” do *corpus*, enfatizando seus detalhes e elementos de acordo com os objetivos da pesquisa. A partir dessa fragmentação, é possível atingir a percepção de sentidos dos textos, em pormenores, permitindo maior compreensão de suas extensões e limitações, que são ponderadas pelo próprio pesquisador. Para Moraes (2003), todo texto possibilita leituras múltiplas, uma vez que estas são circunstanciadas por intenções próprias do leitor e por referenciais teóricos em que se fundamenta. Assim, não existe uma leitura única para um texto específico, mas toda leitura suscita uma interpretação própria para cada leitor.

É a partir da desconstrução que se constitui as *unidades de análise*, que são definidas em função dos propósitos da pesquisa e a partir de um intenso contato e impregnação com o material em análise. Essa constituição é produto de um movimento gradativo de explicitação e de refinamento dos materiais analisados, em que a capacidade de julgamento do pesquisador é fundamental. Todavia, em relação a esse processo de desconstrução, Moraes (2003) adverte que é preciso que o pesquisador se atente para não perder de vista a noção do todo, descontextualizando essas unidades. Por isso, defende-se a necessidade de codificação dessas unidades.

Para Moraes e Galiuzzi (2011), o momento de desconstrução é essencial, pois é necessário desestabilizar a ordem e desorganizar o conhecimento existente para que seja possível atingir novas compreensões. Esses novos entendimentos emergirão a partir do segundo momento do ciclo da Análise Textual Discursiva, a *categorização*, que se constitui como “[...] um movimento intuitivo de reconstrução” (MORAES, 2003, p. 209).

Conforme Moraes (2003), o momento da categorização é um processo auto-organizado, que parte do estabelecimento de relações, das quais emergem interpretações criativas e originais. Essas interpretações são frutos de sucessivos processos de comparação entre as unidades de análise, tendo em vista agrupá-las de acordo com elementos semelhantes entre si. Esses agrupamentos podem decorrer a partir de categorias *à priori* ou conduzir à construção de categorias emergentes (MORAES, 2003).

As categorias *à priori* são o que Bardin (2004) denomina por “gavetas”. São organizações de unidades de análise que apresentam características em comum.

Essas categorias *à priori*, em geral, advém de referenciais teóricos. Já as categorias emergentes são construídas a partir das informações do *corpus* e em consonância com os objetivos de pesquisa. Além dessas duas, existem as categorias classificadas como mistas, pois abarcam características *à priori* e emergentes.

Em relação às propriedades das categorias, Moraes (2003) e Moraes e Galiazzi (2011) destacam que: i) elas necessitam ser pertinentes aos objetivos e objetos de análise, de modo a representar adequadamente as informações categorizadas; ii) as categorias de um mesmo conjunto precisam ser homogêneas, ou seja, suas construções precisam ser feitas a partir de um mesmo princípio e iii) como um texto possibilita múltiplas leituras, a propriedade da exclusão mútua não se aplica à Análise Textual Discursiva. Portanto, uma mesma unidade de análise pode ser classificada em mais de uma categoria, o que representa um aspecto positivo no sentido de superar a fragmentação textual e o reducionismo. Além disso, as categorias precisam ser descritas “a partir de interlocuções empíricas ou ancoragem dos argumentos em informações retiradas dos textos” (MORAES, 2003, p. 204). A descrição densa e composta por citações teóricas é uma das formas de validação das categorias, pois fornece ao leitor uma imagem mais ampla e clara dos fenômenos que descreve.

É a partir da descrição dos elementos, caracterizantes de cada categoria, que se dá início à explicitação de relações entre categorias distintas, processo essencial para estabelecimento do terceiro ciclo da Análise Textual Discursiva, a *captação do novo emergente*, em que se estrutura um metatexto, capaz de abranger os argumentos e compreensões em um todo coerente. É por meio do metatexto que o pesquisador organizará um conjunto de argumentos descritivo-interpretativos no intuito de expressar as compreensões atingidas em relação ao fenômeno investigado, fundamentado nos materiais constituintes do *corpus* da pesquisa (MORAES, 2003).

Esse processo e explicitação das compreensões atingidas é auto-organizado e intuitivo, e as compreensões são aprofundadas, conforme idas e voltas aos ciclos iniciais do processo de análise. O metatexto, produto dessa explicitação, é uma construção do pesquisador. Pode ser mais descritivo, ao evidenciar maior aproximação com os materiais do *corpus*, ou mais interpretativo, quando há maior afastamento dos textos originais, manifestando teorização e abstração mais aprofundada por parte do pesquisador (MORAES, 2003).

A construção desse metatexto pode ser direta ou o pesquisador pode estabelecer relações parciais entre categorias para produzir textos parciais que auxiliem, em seguida, na construção de um texto único. É nesse processo que fica evidente a posição do pesquisador como autor de seus próprios argumentos, sobretudo porque, esse momento de construção, envolve muito mais que descrição e interpretação, mas compreende inferências, que se constituem como esforços do pesquisador em ir além daquilo que está posto ou que pode ser percebido.

Em suma, Moraes (2003) descreve que a Análise Textual Discursiva é um processo analítico recorrente que compreende três ciclos. Esses ciclos compreendem um processo de desconstrução, seguida por reconstrução de um conjunto de materiais de diferentes sistemas representacionais, que conduz à novos entendimentos a respeito do objeto de investigação. Esse processo, envolve a identificação e isolamento de unidades de significação, pautados no *corpus* de pesquisa, a categorização dessas unidades a partir do estabelecimento de relações e a produção de textos descritivos-interpretativos, capazes de comunicar as compreensões atingidas.

Fundamentos nas explicações anteriores a respeito da Análise Textual Discursiva (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2011), elencamos como elementos dessa modalidade de análise qualitativa que se configuram nessa tese:

- a) Na constituição do instrumento analítico, primeiro buscamos identificar leituras convergentes entre as três perspectivas teóricas adotadas nesta tese, de modo que o *ciclo de unitarização* consistiu em selecionar citações que julgamos como características de cada teoria e que fazem referência às propriedades e atribuições das representações em relação ao desenvolvimento cognitivo na aprendizagem de conceitos científicos e matemáticos. Na abordagem empírica atrelada à aplicação do instrumento analítico, considerando os materiais do *corpus*, que abrange registros escritos dos estudantes e transcrição de entrevistas realizadas com cada um deles, realizamos o *ciclo de unitarização*, que consistiu em identificar e codificar os invariantes operatórios e as atividades cognitivas evidentes nos diferentes registros de representação semiótica produzidos.
- b) Caracterizando o *ciclo de categorização*, na constituição do instrumento analítico, constituímos categorias emergentes a partir de informações comuns identificadas e agrupadas com as citações consideradas no ciclo

de unitarização. A partir desses primeiros agrupamentos, foi possível estruturar o instrumento analítico, estabelecendo níveis de explicitação, que foram considerados como categorias *à priori* no momento empírico da pesquisa, ou seja, no momento de aplicação do instrumento analítico para análise das produções escritas e entrevistas coletadas dos estudantes.

- c) A partir das relações estabelecidas nos dois primeiros ciclos, organizamos, na forma de metatexto, as interpretações e inferências emergentes, caracterizando o *ciclo de captar do novo emergente*. Nesse momento, produzimos argumentos próprios para explicitar as relações estabelecidas no movimento analítico realizado, visando responder às problemáticas da pesquisa. Esse processo foi realizado, primeiro, de maneira parcial, em que elaboramos metatextos referentes à análise de cada questão resolvida por estudante. Por fim, descrevemos as interpretações gerais a respeito da aprendizagem de cada estudante, segundo níveis de explicitação. Além disso, esse momento consistiu em um processo de idas e vindas ao instrumento analítico, uma vez que a análise das informações coletadas em sala de aula, com os estudantes participantes da pesquisa, contribuiu para o refinamento e a descrição de cada um dos níveis de explicitação que compõe esse instrumento.

Nos pautamos no processo de saturação para delimitar as questões submetidas aos procedimentos analíticos, pois entendemos que uma amostra específica de questões seria o suficiente para atendermos aos propósitos de pesquisa. Assim, selecionamos para análise apenas as questões 3, 4, 5 e 7, que se referem ao mesmo domínio pertencente ao campo conceitual da Mecânica, o conceito de força resultante, que abrange a composição vetorial e suas operações.

Tal opção justifica-se por dois motivos: i) entendemos que a análise relativa à essas quatro questões caracterizam situações de um mesmo domínio, porém em níveis progressivos de complexidade, o que possibilita a mobilização e adaptação de esquemas e ii) porque a manifestação de invariantes operatórios e de realização de atividades cognitivas associadas às representações são inferidas em maior completude quando consideramos ações do estudante em situações diversas de um mesmo objeto de conhecimento.

As informações contidas em diários de campo e em gravações dos momentos de intervenção foram utilizadas transversalmente e em momentos oportunos das

discussões suscitadas a partir das análises dos materiais que escolhemos enfatizar (registros escritos e entrevistas). Justificamos a maior ênfase atribuída à prova escrita e às entrevistas pelo fato de nosso objeto de pesquisa ser a aprendizagem, a qual é específica para cada sujeito.

## 8 ANÁLISE E DISCUSSÕES DAS INFORMAÇÕES COLETADAS

Objetivando categorizar, em níveis de explicitação, os conhecimentos acerca da composição vetorial de forças que estudantes do Ensino Médio apresentam por meio de tratamento e de produção de diversificadas representações relativas a esse conceito, apresentamos, neste capítulo, os procedimentos de análise das informações coletadas por meio de registros escritos e entrevistas. Para categorizar as aprendizagens em níveis de explicitação, aplicamos o instrumento analítico que propomos nesta tese.

A apresentação das análises foi estruturada por estudantes, de modo que analisamos, discutimos e aplicamos o instrumento analítico a cada uma das questões (número 3, 4, 5 e 7 do APÊNDICE C) resolvidas por eles. Concomitantemente, integramos excertos das entrevistas, visando enriquecer as análises e discussões promovidas para cada questão.

Ao término das abordagens analíticas referentes a cada estudante, organizamos, de maneira sintetizada, as informações referentes aos teoremas-emoção (ou regras-de-ação) e atividades cognitivas associadas às representações, identificados a partir das produções do estudante em cada questão. Por conseguinte, discutimos e justificamos as categorizações dos conhecimentos explicitados pelo estudante, segundo níveis de explicitação do instrumento analítico que estruturamos e aplicamos.

### 8.1 ANÁLISE DO ESTUDANTE E1

Demos início aos procedimentos de análise referente à apreensão conceitual do estudante E1, a respeito de composição vetorial de forças, a partir de suas manifestações em registros escritos e entrevista atinentes à questão 3 da prova escrita. Na figura 19, apresentamos o registro escrito de E1 para a questão 3:

**Figura 19** – Registro escrito de E1 para a questão 3

**QUESTÃO 3**

Dois garotos estão puxando um carrinho de supermercado para um lado enquanto um outro garoto puxa para o outro lado. Cada garoto aplica uma força específica, como mostra a Figura 2:




Figura 2 – Representação dos três garotos puxando um carrinho de supermercado

Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAq218AG/avaliacao-fisica-1-ano-forcas-leis-newton>>. Acesso em: 20 jun 2017.

Qual é o valor (em módulo) e a orientação da força resultante nessa situação?

O valor em módulo ( $F_R = F_1 - F_2$ ) é de -35, e a sua orientação é para o lado esquerdo. Sendo assim, o carrinho será puxado para o lado esquerdo a -35 N

Handwritten calculations on the right side of the page:

$$\begin{array}{r} 37 \\ -45 \\ \hline -8 \\ 37 \\ +45 \\ \hline 82 \end{array}$$

$$37+43 \leftarrow 0 \rightarrow 45 \text{ N}$$

$$80$$

$$F_R = 45 - 80$$

$$F_R = -35$$

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Para justificar seu resultado e responder ao questionamento referente à orientação da força resultante, conforme mostra a figura 19, E1 escreveu:

**E1 (registro escrito):** “O valor em módulo ( $F_R = F_1 - F_2$ ) é de -35, e a sua orientação é para o lado esquerdo. Sendo assim, o carrinho será puxado para o lado esquerdo a -35 N”.

Na resolução da questão 3, conforme apresentado na figura 19, evidenciamos a produção de diferentes registros de representação semiótica, conforme destacados no quadro a seguir:

**Quadro 5** – Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 3

Registro aritmético	$\begin{array}{r} 80 \\ - 45 \\ \hline 35 \end{array}$
Registros algébricos	$F_R = 45 - 80$ $F_R = -35$ $(F_R = F_1 - F_2)$
Registro diagramático	
Registro verbal escrito	<p>O resultado em módulo <math>(F_R = F_1 - F_2)</math> é de <math>-35</math>, o que indica a direção para o lado esquerdo. Sendo assim, o carrinho será puxado para o lado esquerdo com <math>-35</math> N.</p>

Fonte: dos autores (2018)

Segundo as produções de E1, averiguamos que o estudante fez a distinção entre o sentido do movimento e seu sentido oposto, devido atribuição do sinal negativo ao somatório das forças dos meninos à esquerda do carrinho de supermercado, e do sinal positivo à intensidade da força aplicada pelo menino do lado direito, o que indica este último como o sentido do movimento.

Além de realizar o somatório de forças que estão em mesma direção e sentido, o estudante realizou, corretamente, a soma vetorial de forças aplicadas em mesma direção e sentidos opostos e, inclusive, revelou esse conhecimento na forma de expressão algébrica ao atribuir, corretamente, a unidade de medida para a grandeza física força, expressa em Newtons (N).

O estudante E1 reconheceu a necessidade de estabelecimento de referencial para analisar a orientação resultante do sistema de forças, compreendeu e aplicou, corretamente, a soma vetorial de forças em mesma direção, seja em mesmo sentido ou em sentidos opostos, e, além disso, compreendeu o significado do conceito de força resultante. Em relação às representações, E1 traduziu corretamente as informações fornecidas por meio de enunciado em linguagem verbal escrita e

representação figurativa, formando representações identificáveis (ver quadro 5) para realização de tratamento da situação.

Dentre os registros de representação semiótica produzidos por E1 para a questão 3, o estudante sintetizou elementos da representação figurativa dos meninos puxando o carrinho em sentidos opostos, na forma representacional de um diagrama de corpo livre (ver representação diagramática, no quadro 5), que é uma ilustração gráfica utilizada para visualizar as forças aplicadas, movimentos e reações resultantes em um corpo de massa em uma determinada condição.

Entendemos que esse tipo de representação, na forma de um diagrama de corpo livre, caracterizou um processo de redescrição representacional, em que o estudante re-representou explicitamente uma representação em um formato que evidencia características relevantes para o estudo físico do sistema de forças e caracteriza uma forma de representação mais próxima daquelas utilizadas no ensino de Física. Para fornecer esse tipo de representação, ponderamos que E1 realizou atividade cognitiva com determinado grau de complexidade, pois, para isso, o estudante precisou estabelecer relações entre situações e representações vistas em aula com a representação dada na questão, de forma a realizar a tradução de uma representação em outra, a partir de conceitos de força, direção e sentido que identificou, realizando uma *contração semiótica* (RADFORD, 2006) dos elementos essenciais para compreender e elucidar a situação proposta na questão.

Na explicação em registro verbal escrito, E1 justificou a soma vetorial realizada sobre o sistema de forças considerado na questão, bem como o resultado obtido para o contexto. Segundo registro algébrico apresentado, E1 considerou que o sentido direito corresponde ao sentido positivo do movimento (45) e que a intensidade da soma das forças aplicadas no sentido esquerdo tem intensidade maior do que a força aplicada no sentido oposto. E1 justificou que a força resultante indica que o carrinho de supermercado será puxado para a esquerda (representado pelo sinal de menos), atribuindo sentido correto ao resultado que obteve.

Entretanto, nessa explicação, sobretudo a partir da representação algébrica fornecida, E1 informou que o módulo da força resultante é -35 e que o carrinho será puxado para o lado esquerdo a -35 N, que podem indicar, respectivamente, erros conceituais matemático e físico. O primeiro porque, ao se referir ao módulo, o estudante não forneceu um valor absoluto e, o segundo, porque ele descreveu a

intensidade da força resultante com sinal negativo, não esclarecendo que esse sinal apenas faz referência ao sentido resultante dessa força.

No trecho de transcrição de entrevista realizada com E1, não obtivemos esclarecimentos a respeito de suas compreensões relacionadas ao sinal negativo atribuído ao somatório de forças aplicadas pelos meninos à esquerda do carrinho de supermercado:

**E1 (entrevista):** *“Aqui, para saber qual é o módulo das forças, aqui já está dizendo que é 45 e, aqui tem que fazer a soma, que dá 80. Daí, para eu poder fazer o cálculo de qual lado que vai puxar mais, tenho que fazer a conta de menos entre os dois, dá 45 – 80, que dá 35, e vai puxar para a esquerda”.*

Com base nessa explicação, em conjunto aos registros escritos de E1, não é possível concluir se o estudante compreendeu o significado do sentido negativo atribuído como indicador de sentido do movimento. Contudo, a partir dos registros escritos e sua resposta em entrevista, evidenciamos que E1 compreendeu o fenômeno físico de força resultante de um sistema de forças, pois respondeu corretamente o que acontecerá com o carrinho dessa questão, e compreendeu a soma vetorial realizada para sua determinação, uma vez que realizou operações corretamente. Além disso, ele traduziu, coordenou e integrou compreensões advindas de diferentes sistemas representacionais para formular uma explicação coerente para o resultado obtido. Entretanto, não é possível concluir se E1 reconheceu a necessidade de estabelecimento de referencial para determinar a orientação da força resultante, uma vez que não forneceu esclarecimentos a respeito de suas compreensões relativas ao sinal negativo atribuído ao resultado 35 e seu significado para a questão.

A seguir, passamos a discutir as resoluções da questão 4 produzidas pelo estudante E1. Na figura 20, apresentamos a produção escrita de E1 para essa questão:

**Figura 20** – Registro escrito de E1 para a questão 4

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ .

$F_1 = 3$   
 $F_2 = 4$

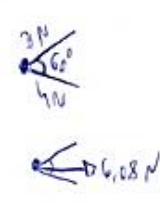
$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 9 + 16 + 12$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 37$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{37}$$


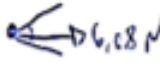
$$|\vec{F}_R| = 6,08 \text{ N}$$


**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Na questão 4, em que o estudante precisaria determinar as características da força resultante produzida por duas forças de mesma origem, que produzem um ângulo de  $60^\circ$  entre si, E1 utilizou a expressão matemática (baseada na Lei dos Cossenos) disponibilizada no quadro de giz para resolver a questão proposta. Além de efetuar atividade de tratamento correto sobre a representação algébrica, fornecendo o valor numérico que indica a intensidade da força resultante e sua respectiva unidade (ver figura 20), o estudante respondeu corretamente as demais características solicitadas, que são elas a direção e o sentido da força resultante. Sustentamos essa afirmação a partir da produção de duas representações diagramáticas da situação, disponíveis no canto superior direito do registro escrito de E1, apresentado na figura 20.

No quadro 6, enfatizamos os registros de representação semiótica produzidos por E1, constituindo sua resposta à questão 4 da prova escrita.

**Quadro 6** – Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 4

Registro algébrico	$ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cos \theta$ $ \vec{F}_R ^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ $ \vec{F}_R ^2 = 9 + 16 + 12$ $ \vec{F}_R ^2 = 37$ $ \vec{F}_R  = \sqrt{37}$ $ \vec{F}_R  = 6,08 \text{ N}$
Registro diagramático (1)	
Registro diagramático (2)	

Fonte: dos autores (2018)

Evidenciamos que E1 percebeu a necessidade de produção de diagramas de corpo livre por reconhecer que não seria possível concluir a direção e sentido da força resultante sem estabelecer um referencial, o qual não foi fornecido pela questão. No registro diagramático (1), destacado no quadro 6, E1 fez alusão às duas forças aplicadas sobre um corpo de massa, de modo a determinarem um ângulo de  $60^\circ$  entre si. No segundo (ver registro diagramático (2), no quadro 6), ele fez referência à força resultante sobre esse mesmo corpo de massa, indicando a direção e o sentido da força resultante.

A partir de suas representações para resolução da questão 4, identificamos que E1 realizou a atividade cognitiva de tradução representacional entre o enunciado fornecido em linguagem verbal escrita e a representação algébrica que produziu. A partir desse fato, realizou a tradução para representações diagramáticas. Além disso, a dinâmica de traduções entre representações envolveu a atividade cognitiva de integração representacional, uma vez que as representações diagramáticas são produtos da incorporação de significações inerentes às representações em linguagem verbal escrita e algébrica.

Em entrevista, E1 explicou:

**E1 (entrevista):** “Aqui precisa do cálculo para saber... para saber para onde que vai... porque tem uma força para esse lado e outra para cá. Dá 6,08, que é o mesmo que puxar com um cabo, por exemplo, que puxar com dois, um de 4 pra cá e um de 3 (E1 faz gestos, indicando ângulo de  $60^\circ$  entre as forças)”.

A partir de sua resposta em linguagem verbal oral, podemos reafirmar a compreensão do estudante a respeito de força resultante. Inclusive, E1 contextualizou a situação, exemplificando-a ao caso de cabos que puxam um corpo de massa em duas situações distintas, porém, equivalentes, o que caracteriza a extensão do conceito a outras situações.

Além disso, a explicação fornecida pelo estudante também caracterizou a atividade cognitiva de integração, uma vez que o discurso explicitado apresentou: i) compreensões oriundas do resultado obtido por meio de tratamento realizado sobre a representação algébrica (ver quadro 6); e ii) unificou e forneceu exemplo prático (cabos puxados) relacionados às representações diagramáticas que expôs em sua produção escrita (ver quadro 6).

O enunciado em linguagem verbal escrita foi ponto de partida das atividades cognitivas representacionais realizadas por E1 e a linguagem verbal oral foi ponto de chegada. Diante disso, inferimos que o estudante realizou a coordenação entre registros de representação, uma vez que transitou por distintos registros de representação semiótica de um mesmo conteúdo conceitual, de modo que partiu e retornou a um mesmo sistema semiótico de representação, o da linguagem verbal, que compreende as formas representacionais oral e escrita.

As produções de E1 para a questão 5 reforçaram nossos argumentos a respeito de graus de apropriação de seus conhecimentos relativos ao conceito de força resultante. A seguir, apresentamos a resolução de E1 para a questão 5 da prova escrita:

**Figura 21** – Registro escrito de E1 para a questão 5

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2$$

$$|\vec{F}_R| = 8^2 + 6^2$$

$$|\vec{F}_R| = 64 + 36$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{100}$$

$$|\vec{F}_R| = 10\text{ N}$$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

O resultado obtido quer dizer que o barco será puxado para a direita à mesma força ~~(de 10 N)~~ equivalente à 10 N. Essa 10 N representa a soma dos vetores 8 e 6, portanto, puxar para a direita com apenas uma força de 10 N em um ângulo de 180° é o mesmo que puxar com duas forças (uma de 8 e uma de 6) com um ângulo de 90°.

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Na explicação do resultado, o estudante declarou que

**E1 (registro escrito):** “O resultado obtido quer dizer que o barco será puxado para a direita à uma força equivalente à 10 N. Esses 10 N representa a soma dos vetores 8 e 6, portanto, puxar para a direita com apenas uma força à 10 N em um ângulo de 180° é o mesmo que puxar com duas forças (refere-se a uma de 8 e, outra, de 6 N) com um ângulo de 90°.

Para essa questão, E1 utilizou a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, para determinar o módulo da força resultante do sistema, solicitado no item (a) da questão. Assim, em sua produção, verificamos dois registros de representação semiótica: registro algébrico e registro em linguagem verbal escrita. Esses registros são especificados no quadro a seguir:

**Quadro 7** - Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 5

Registro algébrico	$ \vec{FR}  =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2$ <del><math display="block"> \vec{FR}  = 8^2 + 6^2</math></del> $ \vec{FR}  = 8^2 + 6^2$ $ \vec{FR}  = 64 + 36$ $ \vec{FR}  = \sqrt{100}$ $ \vec{FR}  = 10\text{ N}$
Registro verbal escrito	<p>O resultado obtido que diz que o barco será puxado para a direita à mesma força <del>(10 N)</del> equivalente à 10 N. Essa 10 N representa a soma das forças 8 e 6, portanto, puxar para a direita com apenas uma força de 10 N em um ângulo de 180° é o mesmo que puxar com duas forças (uma de 8 e uma de 6) com um ângulo de 90°.</p>

Fonte: dos autores (2018)

Apoiando-se na figura fornecida na questão 5 (ver APÊNDICE C) e no resultado obtido com o tratamento do registro algébrico (ver quadro 7), durante a entrevista E1 explicou:

**(E1 – entrevista):** “Aqui, como o ângulo é de 90°, então o cosseno é zero. Aqui ele vai puxar com 10 N para cá, que é a mesma coisa que se ele estivesse sendo puxado com 8 N para lá e 6 N para lá”.

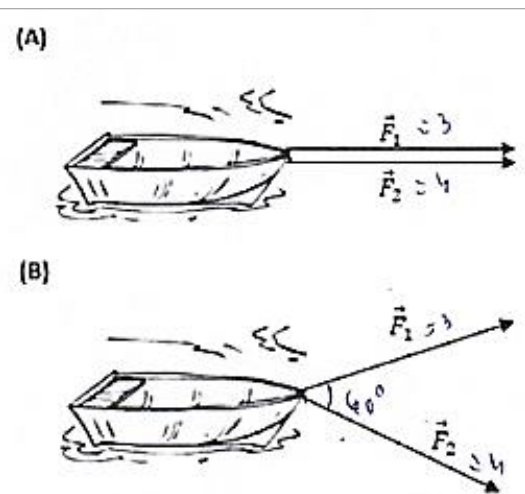
Diante de suas explicações, sobretudo a partir da explicitada em registro verbal escrito (ver quadro 7), verificamos que E1 compreendeu o conceito de força resultante. Quanto à associação da força resultante de intensidade de 10 N ao ângulo de 180°, entendemos que E1 considerou a força resultante do sistema como sendo horizontal, ou seja, paralelo ao rio, o que pode, ou não, condizer com o resultado do problema, uma vez que a questão não especifica se o trajeto do barco é ou não na direção horizontal. Tal entendimento pauta-se na explicação fornecida por E1 em linguagem verbal escrita, em que manifestou, de maneira mais precisa, a compreensão da situação.

Quanto às atividades cognitivas representacionais, mais uma vez defendemos que houve tradução e integração, tendo em vista que produziu representações identificáveis e integrou significações destas em suas explicações. Para essa questão, não foi possível verificar coordenação entre representações, mas

ocorreram conversões entre representações fornecidas na questão (linguagem verbal escrita e figurativa) e representações produzidas por E1 (algébrico e linguagem verbal, escrita e oral).

Por fim, analisamos a resolução de E1 referente à questão 7:

**Figura 22** – Registro escrito de E1 para a questão 7



(A)

(B)

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

Não. Na situação A, a força resultante será a soma de  $F_1$  com  $F_2$  ( $F_1 + F_2$ ); na situação B, a força resultante será calculada através de outra forma ( $|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$ ). Supondo que as forças  $F_1$  de ambas as situações sejam iguais à 3, e que ambas as forças  $F_2$  sejam iguais à 4, na situação A a força resultante será 7 N e na situação B a força resultante será igual a 6,08 N.


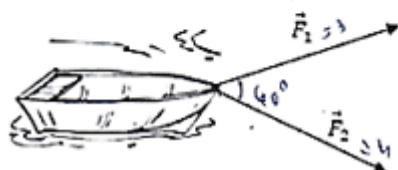
Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

No registro verbal escrito, E1 explicou:

**E1 (registro escrito):** “Não. Na situação A, a força resultante será a soma de  $F_1$  com  $F_2$  ( $F_1 + F_2$ ); na situação B, a força resultante será calculada através de outra forma ( $|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$ ). Supondo que as forças  $F_1$  de ambas as situações sejam iguais à 3, e que ambas as forças  $F_2$  sejam iguais à 4, na situação A a força resultante será 7 N e na situação B a força resultante será igual a 6,08 N”.

Conforme apresentado na figura 22, o estudante E1 produziu registros representacionais algébricos, em linguagem verbal escrita e, ainda, acrescentou informações aos registros figurativos propostos na questão. Esses registros de representação são evidenciados no quadro a seguir:

**Quadro 8** – Registros de representação semiótica apresentados por E1 para a questão 7

Registros algébricos	$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ <p>e</p> <p>... calculada através de outra fórmula <math>( \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2) + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos(\theta)</math>. Dependendo que os ângulos...</p>
Registro verbal escrito	<p>Não. Na situação A, se a força resultante será a soma de <math>F_1</math> com <math>F_2</math> (<math>F_1 + F_2</math>); na situação B, a força resultante será calculada através de outra fórmula <math>( \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2) + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos(\theta)</math>. Dependendo que os ângulos nas situações sejam iguais à B, e que sempre as forças <math>F_1</math> sejam iguais à B, na situação A a força resultante será <math>F_1 + F_2</math> e na situação B a força resultante será igual a <math>6,08N</math>.</p>
Informações complementares aos registros figurativos da questão	<p>(A)</p>  <p>(B)</p> 

Fonte: dos autores (2018)

Conforme informações complementares que atribuiu aos registros figurativos da questão 7 (ver quadro 8), E1 estabeleceu características para cada par de forças aplicadas no barco, em cada uma das situações apresentadas. Ele atribuiu valores numéricos para representar diferentes intensidades de forças, desconsiderando a informação trazida no enunciado de que as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  têm mesmo módulo.

Segundo explicações fornecidas por ele em representação verbal, oral e escrita, compreendemos que o objetivo de atribuição de valores foi justificar a sua resposta.

Sua justificativa e exemplificação numérica foram coerentes para responder à questão proposta e indicam alto grau de apropriação conceitual, pois suas respostas caracterizam realização de atividades cognitivas de tradução das informações presentes na questão, integração de significados atinentes a cada registro representacional e, sobretudo, coordenação entre diferentes registros de representação. Aliás, essa coordenação perpassou os limites da própria questão, uma vez que os exemplos fornecidos por E1 para auxiliar na justificativa de sua resposta valeram-se de resultado já obtido na questão 4.

De maneira geral, E1 revelou ter atingido, no domínio de composição vetorial de forças, o mais alto nível de apropriação do conhecimento em questão. Além de transitar de uma representação à outra, o que fica evidente na análise conjunta das quatro questões, o estudante integrou as compreensões possibilitadas por cada uma delas para construir um discurso genuíno e coerente para explicitar seus entendimentos, sobretudo, na questão 7. Portanto, entendemos que não foi ao acaso as escolhas dos valores atribuídos a cada uma das forças constantes nessa última questão. Esses valores foram informados na questão 4 e, para evitar a realização de muitos cálculos, bem como para reforçar sua resposta, E1 fez a transposição da situação da questão 4 para a 7.

Em outras palavras, E1 se utilizou do contexto da situação 4 para re-representar a situação 7 e, para isso, foi necessário estabelecer relações entre elas em um nível de abstração superior. A partir da evidência de que o estudante transitou por entre representações, inclusive, de uma questão para a outra, justificamos que E1 realizou atividade cognitiva representacional de coordenação.

No quadro 9, sintetizamos os invariantes operatórios evidenciados a partir das produções e explicitações representacionais de E1, os quais são apresentados na forma de teoremas-em-ação. Além disso, no mesmo quadro evidenciamos as atividades cognitivas sobre representações (que apresentamos de forma descritiva), segundo cada questão aplicada.

**Quadro 9** – Síntese de teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E1

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA	
Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais*
<p><b>Q. 3</b></p> <p>1) A <math>\vec{F}_R</math> de <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> equivale a uma força única que, atuando sozinha, provoca o mesmo efeito que <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> provocariam se agissem em conjunto.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentido, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela soma dos valores numéricos de ambas as forças, e será mantida mesma direção e sentido original.</p> <p>3) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentidos opostos, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela subtração dos valores numéricos de ambas as forças, e o sentido é representado pelo sinal obtido.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão).</p> <p>3) Realiza a integração de significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Explicita compreensões a respeito do(s) conceito(s) físicos e procedimentos que realiza, por meio de representação verbal oral.</p>
<p><b>Q. 4</b></p> <p>1) É necessário estabelecer um referencial para descrever direção e sentido da <math>\vec{F}_R</math>.</p> <p>2) A <math>\vec{F}_R</math> de <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> equivale a uma força única que, atuando sozinha, provoca o mesmo efeito que <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> provocariam se agissem em conjunto.</p> <p>3) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão).</p> <p>3) Realiza a integração de significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p> <p>5) Explicita compreensões a respeito do(s) conceito(s) físicos e procedimentos que realiza, por meio de representação verbal oral.</p>

<p><b>Q. 5</b></p>	<p>1) A <math>\vec{F}_R</math> de <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> equivale a uma força única que, atuando sozinha, provoca o mesmo efeito que <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> provocariam se agissem em conjunto.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão).</p> <p>3) Realiza a integração de significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p> <p>5) Explicita compreensões a respeito do(s) conceito(s) físicos e procedimentos que realiza, por meio de representação verbal oral.</p>
<p><b>Q. 7</b></p>	<p>1) A <math>\vec{F}_R</math> de <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> equivale a uma força única que, atuando sozinha, provoca o mesmo efeito que <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> provocariam se agissem em conjunto.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentido, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela soma dos valores numéricos de ambas as forças, e será mantida mesma direção e sentido original.</p> <p>3) Dadas duas forças de mesma origem, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, o ângulo formado entre elas implica diretamente na <math>\vec{F}_R</math>.</p> <p>4) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão).</p> <p>3) Realiza a integração de significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p> <p>5) Explicita compreensões a respeito do(s) conceito(s) físicos e procedimentos que realiza, por meio de representação verbal oral.</p>

Fonte: dos autores (2018)

\*No geral, há evidências de que E1 realizou a coordenação entre registros de representação semiótica de diferentes questões analisadas.

Os teoremas-em-ação apresentados no quadro 9 foram elaborados com base nos conhecimentos a respeito da composição vetorial de forças identificadas nas produções e explicitações de E1. Todos eles são teoremas-em-ação verdadeiros que conduziram E1 a produzir soluções corretas para as quatro questões abordadas e analisadas.

Apesar de não apresentar de maneira consistente compreensões a respeito do sinal negativo atribuído ao resultado obtido na questão 3, diante das análises de invariantes operatórios e atividades cognitivas representacionais identificadas a partir das produções escritas e entrevista, entendemos que E1 claramente alcançou o nível E-iii de explicitação de conhecimentos referentes à composição vetorial de forças, segundo conceitos abordados nas questões analisadas. Conforme mostra o quadro 9, o estudante revelou teoremas-em-ação verdadeiros na resolução de suas questões. Além disso, entendemos que as produções escritas e explicação de E1 para a questão 3 a respondem corretamente e que a mobilização de diversificados registros representacionais caracteriza nível de explicitação E-iii, mesmo que não tenha esclarecido o significado do sinal negativo atribuído ao resultado.

Contudo, o que reforça que E1 atingiu o nível mais elevado de explicitação, são as evidências de que o estudante traduziu, integrou e coordenou diversos registros de representação semiótica na elaboração de discursos genuínos, sólidos e coerentes para explicar suas produções e compreensões em cada uma das questões. Sobretudo, os conhecimentos explicitados por E1 são categorizados no nível E-iii devido à atividade cognitiva representacional explicitada na questão 7, a coordenação representacional, que não ocorreu apenas entre as representações pertinentes à mesma questão, mas abrangeu a transposição de significados atribuídos a outras questões resolvidas anteriormente.

No quadro 10, sintetizamos as características que nos conduziram à categorização das explicitações de conhecimentos de E1, a respeito de composição vetorial de forças, no nível E-iii:

**Quadro 10** – Nível de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E1, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
3, 4, 5 e 7	a) Explicitou, coerentemente e genuinamente, suas compreensões por meio de representação verbal oral; b) Realizou transformações representacionais internas e externas; c) Traduziu e integrou distintas formas representacionais; d) Coordenou registros de representação semiótica; e) Em geral, não apresentou erros em suas produções.	E-iii

Fonte: dos autores (2018)

## 8.2 ANÁLISE DO ESTUDANTE E2

Considerando, também, as questões 3, 4, 5 e 7 da prova escrita, passamos a apresentar as produções e manifestações do estudante E2, começando pela sua produção escrita em resposta à questão 3:

**Figura 23** – Registro escrito de E2 para a questão 3




Figura 2 – Representação dos três garotos puxando um carrinho de supermercado

Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAq2I8AG/avaliacao-fisica-1-ano-forcas-leis-newton>>. Acesso em: 20 jun 2017.

Qual é o valor (em módulo) e a orientação da força resultante nessa situação?

$$\vec{FR} = F_1 + F_2 + F_3$$

$$FR = 37 + 43 + (-45)$$

$$\vec{FR} = 35N$$

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Conforme mostra a figura 23, para a terceira questão da prova escrita, E2 apresentou resultado correto para a intensidade da força resultante do sistema físico considerado, obtido a partir da produção de registro representacional algébrico identificável, em partes, para a situação, sobre o qual efetuou tratamento correto. A produção de registro representacional parcialmente identificável indica que E2 traduziu coerentemente as informações disponíveis nas representações que constituem a questão (verbal escrita e figurativa).

Ao referirmos que a representação semiótica produzida por E2 é identificável em partes, queremos dizer que ela não abrange todas as ligações conceituais necessárias para compreender o seu referente. A partir da representação fornecida pelo estudante é possível evidenciar apenas a intensidade da força resultante, mas ele não elucida as demais características dessa força, a saber, sua orientação (direção e sentido). Ainda que a informação a respeito da orientação da força resultante esteja implícita na resolução de E2, uma vez que o resultado obtido é de sinal positivo, o estudante não explicitou ter reconhecido essa informação.

A partir do registro representacional algébrico (ver figura 23), evidenciamos que E2 estabeleceu um referencial para a determinação da força resultante do sistema físico contemplado na questão, devido ao sinal de menos atribuído à intensidade da força aplicada à direita do sistema ( $\vec{F}_3 = -45 N$ ).

A seguir, apresentamos o trecho da entrevista de E2 referente à questão 3:

**E2 (entrevista):** “Esse daqui, na primeira prova, o que eu lembrava era só de calcular o  $F_R$  inteiro, sem me preocupar com o sentido em que estava. Aí eu lembro que nas suas aulas tinha explicado que o sentido, ele iria... (nesse momento, um colega de turma interrompe a entrevista para avisar E2 que o intervalo tinha começado). Aqui, é... eu tenho que escolher um sentido, um positivo e outro negativo, então eu considerei esse daqui como sendo o positivo (indica o sentido esquerdo) e esse daqui como sendo o negativo (indica o sentido direito) porque é ao contrário. Aí eu coloquei assim o  $F_R$  (indica no registro escrito que produziu)”.

As informações expostas corroboram com a afirmação de que E2 estabeleceu um referencial para determinar a força resultante do sistema composto por duas forças à esquerda e uma força à direita. O estudante optou por considerar o sentido do movimento como sendo o esquerdo.

E2 não forneceu uma explicação para o resultado que obteve e nem indicou qual seria a orientação da força resultante. Entretanto, por meio de sua explicação

evidenciamos indícios de compreensões a respeito da situação proposta na questão, como o reconhecimento de necessidade de estabelecer um referencial. No registro escrito, evidenciamos a compreensão a respeito da adição vetorial para pares de força em duas situações: i) mesma direção e sentido e ii) mesma direção e sentidos opostos.

Nesse caso, houve atividade cognitiva de tradução representacional, em específico, das representações verbal escrita e figurativa para a algébrica, e da figurativa para a verbal oral, bem como houve tentativa de integração de compreensões advindas dessas traduções para fornecer sua explicação em representação verbal oral.

Para a questão 4 da prova escrita, E2 apresentou a produção escrita ilustrada na seguinte figura:

**Figura 24** – Registro escrito de E2 para a questão 4

**QUESTÃO 4**  
Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ .

$$|\vec{FR}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos 60^\circ$$

$$|\vec{FR}|^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{FR}|^2 = 9 + 16 + 12$$

$$|\vec{FR}|^2 = 37$$

$$|\vec{FR}| = \sqrt{37}$$

$$|\vec{FR}| = 6,08 \text{ N}$$

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Para resolver a questão 4, conforme mostra a figura 24, o estudante E2 aplicou a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, a qual estava disponível no quadro de giz no momento de realização da prova escrita. Sobre o registro algébrico, ele efetuou a atividade de tratamento e obteve resultado correto para a intensidade da força resultante da situação dada. Inclusive, apresentou unidade correta para a grandeza força, assim como havia feito na questão 3. Contudo, assim como para a questão anterior, E2 não forneceu explicação em

registro verbal escrito, por exemplo, para o resultado que obteve e nem a orientação da força resultante que, para esse caso, seria necessário o estabelecimento de referencial.

Na entrevista, ao ser questionado a respeito de suas produções e conhecimentos relativos à questão 4 da prova escrita, E2 respondeu:

**E2 (entrevista):** “Aqui eu usei a fórmula que você tinha dado para calcular a força resultante quando tivermos a ação de um ângulo. Então, é isso”.

A partir de sua produção escrita e resposta em entrevista, constatamos que E2, apesar de ter traduzido informações do enunciado de modo a fornecer representação identificável, em partes, à situação, não manifestou compreensão do conceito físico envolvido. O estudante apenas mobilizou, mecanicamente, informações que acumulou de momentos de intervenções. Nesse sentido, a atividade de tradução ocorreu no sentido de reconhecimento de que, para o cálculo de força resultante a partir de forças de mesma origem, que determinam entre si, um ângulo agudo, é necessário aplicar a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos.

Na figura 25, apresentamos a resolução de E2 para a próxima questão submetida a procedimentos analíticos:

**Figura 25** – Registro escrito de E2 para a questão 5

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$|\vec{FR}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos 90^\circ$$

$$|\vec{FR}|^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0$$

$$|\vec{FR}| = \sqrt{100}$$

$$|\vec{FR}| = 10 \text{ N}$$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

as duas forças criam um ângulo de 90 graus.  
Para que podemos descobrir a resultante usamos a fórmula da regra do paralelogramo:

$$|\vec{FR}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

No registro verbal escrito, E2 explicou:

**E2 (registro escrito):** “As duas forças criam um ângulo de 90° graus. Para que possamos descobrir a resultante usamos a fórmula da regra do paralelogramo:  $|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$ ”.

Na resolução da questão 5, E2 apresentou dois tipos de registros de representação semiótica, conforme citamos no quadro seguinte:

**Quadro 11** – Registros de representação semiótica apresentados por E2 para a questão 5

Registro algébrico	$ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos 90^\circ$ $ \vec{F}_R ^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0$ $ \vec{F}_R  = \sqrt{100}$ $ \vec{F}_R  = 10\text{N}$
Registro verbal escrito	<p>as duas forças criam um ângulo de 90° graus          Para que possamos descobrir a resultante usamos a fórmula da regra do paralelogramo:</p>

Fonte: dos autores (2018)

De acordo com o exposto na figura 25, E2 aplicou a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, para determinar a força resultante solicitada na questão 5 e efetuou, corretamente, o tratamento interno sobre o registro algébrico que apresentou, obtendo resultado exato para a intensidade da força resultante.

A partir do registro em linguagem verbal escrita (ver quadro 11) fornecido pelo estudante no item (b) da questão 5, E2 explicou ter utilizado a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, devido ao ângulo reto determinado entre as duas forças dadas.

A seguir, destacamos trecho de entrevista em que E2 forneceu maiores informações a respeito de suas resoluções e compreensões em relação à questão 5:

**E2 (entrevista):** “Para justificar essa conta da questão (a) eu usei a regra do paralelogramo, que eu considere uma força aqui e outra força aqui, e era para calcular essa força que está aqui, que é a força resultante (indicou, por meio de gestos, a configuração da força resultante na figura da questão de maneira correta).”

**Professora:** O que você está me dizendo é que a partir dessa força de 8N e de 6N... o que acontece com esse resultado de 10N?

**E2:** Eu transfiro esse para cá, e esse para cá (indica, gestualmente, transposição correta de vetores, formando um paralelogramo) para calcular a força resultante em 90°.

**Professora:** Então, a força resultante aí é o que?

**E2:** A força resultante?

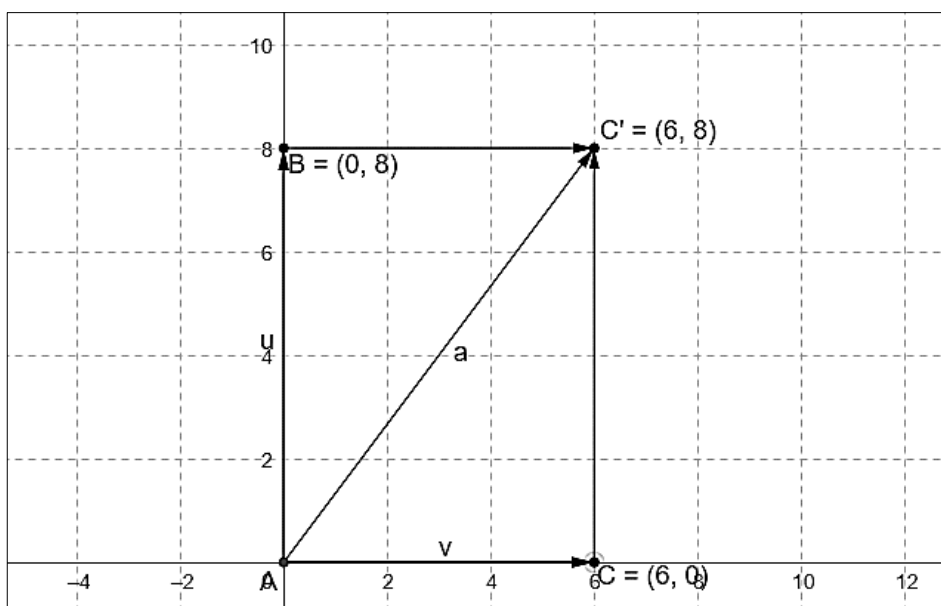
**Professora:** O que acontece com o barco?

**E2:** Eu acho que vai para cá... mais para cá, porque a força de 8N é maior que a de 6N".

A partir da entrevista com E2, evidenciamos que ele compreendeu, mesmo que intuitivamente, a noção de força resultante associada ao contexto da questão 5. Para elucidar seu entendimento a esse respeito, E2 resgatou a ideia de transposição de vetores, explicando que a força resultante da situação em questão corresponde à transferência dos vetores dados para entre eles, e indicou, gestualmente, o direcionamento correto ao afirmar que a força resultante terá orientação que tenderá estar mais próxima da força de intensidade maior.

A seguir, fornecemos uma ilustração para o resultado geométrico de soma vetorial, com o intuito de esclarecer as explicações fornecidas por E2 em sua entrevista:

**Figura 26** – Resultado geométrico para a soma vetorial da questão 5



Fonte: dos autores (2018)

Na figura 26, observamos que no semieixo positivo de x está representado o vetor força de 6 N e, no semieixo positivo de y, o vetor força de 8 N. Pela regra do paralelogramo, o vetor de origem é coincidente à origem dos dois vetores e a extremidade coincidente ao encontro das extremidades das projeções de cada uma das forças correspondente ao vetor força resultante. Quando E2 mencionou “Eu acho que vai para cá... mais para cá, porque a força de 8N é maior que a de 6N”, ele

forneceu uma resposta correta para a orientação da força resultante, de acordo com o resultado geométrico para a soma vetorial proposta na questão, conforme consta na figura 26.


Diante do exposto, verificamos que E2, além de reconhecer que para duas forças de mesma origem, que determinam entre si um ângulo agudo, é possível determinar a intensidade da força resultante a partir da aplicação da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, compreendeu a ideia de força resultante para o contexto da questão, pois reconheceu que essa força equivale à atuação conjunta das duas forças atuantes sobre o mesmo corpo de massa (no caso, o barco).

Em relação às atividades cognitivas representacionais, identificamos que E2 realizou a tradução entre representações fornecidas, de modo a produzir representações identificáveis à situação dada, bem como tentou integrar significações constitutivas de diversificadas representações do mesmo referente, o que o conduziu à elaboração de um discurso para explicitar suas compreensões. Contudo, ainda não há total clareza em suas explicações.

Por fim, apresentamos as produções de E2 para a questão 7 da prova escrita:

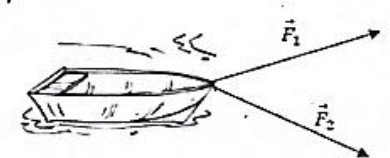
**Figura 27** – Registro escrito de E2 para a questão 7

(A)



(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente,  $60^\circ$  entre si:

(B)



Responda:

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

*Não. Na primeira figura temos um barco sendo puxado na mesma direção e sentido. No segundo caso, as forças criam um ângulo cuja direção e sentido são opostos.*

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Conforme mostra a figura 27, E2 elaborou sua resposta na forma de registro representacional em linguagem verbal escrita, em que diz:

**E2 (registro escrito):** *“Não. Na primeira figura temos um barco sendo puxado na mesma direção e sentido. No segundo caso, as forças criam um ângulo cuja direção e sentido são opostos”.*

E2 afirma que, para as duas situações apresentadas na questão, as forças resultantes não serão iguais e justifica sua resposta valendo-se do fato de que as orientações das forças envolvidas são distintas entre a situação (A) e (B).

Em entrevista, E2 relatou:

**E2 (entrevista):** *“Para fazer essa eu lembrei da última aula. Aqui tem um ângulo de  $60^\circ$  e, não lembro se era isso, professora, mas quanto menor o ângulo, maior a força. Então, aqui, eles estão indo para a mesma direção, tomando um mesmo sentido. Então, já se vê que aqui a força vai ser maior (refere-se à situação A). Já aqui, existe um ângulo (refere-se à situação B). Eu acredito que não tem como comparar onde existe um ângulo com aqui que puxa direto, que não existe um ângulo. O que eu respondi foi que, na primeira figura, existe um barco sendo puxado na mesma direção e sentido. E, na segunda, as forças criam um ângulo, cuja direção e sentido são opostos. Aí, eu vou ter que usar um pouco da lógica: que se já existe um ângulo que faz com que a direção e o sentido sejam opostos, acho que já não pode resultar em uma força que seja igual ou maior do que no primeiro caso, em que puxa para a mesma direção e sentido”.*

Segundo explicação fornecida por E2, compreendemos que sua resposta foi embasada nos vídeos apresentados no último momento de intervenção, os quais mostram que a força resultante é diferente para aplicação de vetores de mesma intensidade, porém, em orientações distintas. Tal constatação se fundamenta na seguinte menção do estudante: *“Para fazer essa eu lembrei da última aula”.*

Para E2, a força resultante é maior, em intensidade, na primeira situação (A), em que as duas forças aplicadas estão agindo na mesma direção e sentido. Ao contrário, na segunda situação (B), E2 afirma que a intensidade da força resultante será menor, devido ao ângulo de  $60^\circ$  entre ambas as forças aplicadas sobre o barco. Contudo, ao se referir à orientação dessas forças, evidenciamos que o estudante se refere à direção e ao sentido de maneira equivocada, uma vez que, na situação considerada, as direções não são opostas e, da forma em que estão dispostas as forças, não é possível estabelecer comparações entre seus sentidos.

Nesse caso, ponderamos que, involuntariamente, E2 utilizou uma expressão incorreta para se referir ao fato de os vetores representativos das forças apresentarem direções diferentes entre si. Para sustentar essa afirmação, consideramos a sequência da entrevista realizada, na qual E2 percebeu o erro em sua afirmação a respeito da relação entre as orientações das forças da situação (B) da questão 7:

**Professora (entrevista):** “Então, aqui (indica situação (B) da questão) os vetores são opostos?”

**E2:** *Sim. Bom... na verdade, eu acho que não. Não é que são opostos. O que quis dizer é que não têm mesma direção e mesmo sentido. Não dá para comparar”.*

E2 realizou atividades cognitivas representacionais de tradução e tentativas de integração. Tais tentativas remetem-se às evidências de que o estudante estabeleceu relações entre informações constantes nas representações fornecidas na questão, de maneira a integrá-las na elaboração de seu discurso. Contudo, assim como para a questão 5, o estudante não forneceu explicações de maneira clara e totalmente condizentes a conceitos físicos. Os resgates a informações anteriores, evidente quando menciona “*Para fazer essa eu lembrei da última aula*”, também são indicadores de que E2 se encontra em um processo de estabelecimento de relações e de explicitação de conhecimentos codificados representacionalmente em sua estrutura cognitiva.

No quadro a seguir, resumimos as regras-em-ação e teoremas-em-ação, bem como as atividades cognitivas relacionadas às representações, que identificamos a partir das produções de E2:

**Quadro 12 – Síntese de regras-de-ação / teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E2**

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA	
Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
<p><b>Q. 3</b></p> <p>1) É necessário estabelecer um referencial para descrever direção e sentido da <math>\vec{F}_R</math>.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentido, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela soma dos valores numéricos de ambas as forças.</p> <p>3) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentidos opostos, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela subtração dos valores numéricos de ambas as forças.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão).</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p>
<p><b>Q. 4</b></p> <p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.</p> <p>2) Não apresenta erros em suas produções.</p>
<p><b>Q. 5</b></p> <p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p> <p>2) A <math>\vec{F}_R</math> de <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> equivale à atuação conjunta dessas forças sobre um corpo de massa.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão).</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p>

<b>Q. 7</b>	<p>1) A <math>\vec{F}_R</math> de <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math> equivale à atuação conjunta dessas forças sobre um corpo de massa.</p> <p>2) Dadas duas forças de mesma origem, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, o ângulo formado entre elas implica diretamente na <math>\vec{F}_R</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão).</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p>
-------------	---	---

Fonte: dos autores (2018)

Segundo procedimentos analíticos sobre as produções de E2, cujos resultados, em termos de teoremas-em-ação, ou regras-de-ação, e atividades cognitivas relacionadas às representações são sintetizados no quadro 12, verificamos que, para a questão 4, E2 manifestou características de conhecimento explicitado em nível I, pois as traduções representacionais realizadas ocorreram no sentido de reconhecimento de possível aplicação de conhecimento armazenado. Além disso, segundo produção e explicação em linguagem verbal oral, evidenciamos que a aplicação de expressão matemática e seu tratamento correto correspondeu à mobilização de regras-de-ação memorizada, que conduziu E2 a reproduzir procedimento correto, porém, sem compreensão. Forneceu, inclusive, representação parcialmente identificável para a situação dada, no sentido de que não abrangeu informações suficientes para caracterizá-la.

Entretanto, nas questões 3, 5 e 7, identificamos nível de explicitação E-ii, pois houve mobilização de teoremas-em-ação verdadeiros. Ainda, evidenciamos a realização de transformações representacionais internas (tratamento) e externas (conversões entre registro algébrico, verbal escrito e verbal oral, na questão 5, e entre registros verbais, escrito e oral, na questão 7). Também, identificamos traduções representacionais e tentativas de integrações que culminaram na explicitação verbal. Todavia, seus discursos ainda não foram integralmente sólidos e claros até mesmo para o próprio estudante. Outra característica evidenciada desse nível de explicitação foi a não apresentação de erros nas resoluções de E2 no que compete aos procedimentos necessários para resolver as questões.

No quadro a seguir, sintetizamos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E2, a respeito de composição vetorial de forças, nos níveis I e E-ii:

**Quadro 13** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E2, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
4	a) Mobilizou regras-de-ação, reproduzindo procedimentos sem compreensão da execução destes e de seus resultados; b) Realizou integração representacional no sentido de identificar elementos das representações constantes no enunciado da questão, de modo a associá-los a alguma situação já vivenciada em outro momento;	I


	c) Não apresentou erros em suas produções.	
3, 5 e 7	a) Explicitou suas compreensões por meio de representação verbal oral, porém, de maneira não totalmente sólida e coerente; b) Realizou transformações representacionais internas e externas; c) Traduziu e tentou integrar diferentes formas representacionais; d) Não apresentou erros em suas produções.	E-ii

Fonte: dos autores (2018)

### 8.3 ANÁLISE DO ESTUDANTE E3

Nesta seção, descrevemos as produções e evidências a respeito dos níveis de explicitação do estudante E3, segundo resoluções apresentadas para as questões 3, 4, 5 e 7 da prova escrita, bem como suas respostas fornecidas por meio de entrevista, em relação a cada uma dessas questões. Na sequência, apresentamos a resolução de E3 para a questão 3:

**Figura 28** – Registro escrito de E3 para a questão 3



**Figura 2** – Representação dos três garotos puxando um carrinho de supermercado

Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content/ADAAAq2I8AG/avaliacao-fisica-1-ano-forcas-leis-newton>>. Acesso em: 20 Jun 2017.

Qual é o valor (em módulo) e a orientação da força resultante nessa situação?

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

*NÃO CONSEGUI RESOLVER, MAS EU SEI QUE O LADO ESQUERDO GANHA.*

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Nessa resolução, em representação verbal escrita E3 relatou:

**E3 (registro escrito):** *“Não consegui resolver não, mas eu sei que o lado esquerdo ganha”.*

Além de representação verbal escrita, E3 apresentou a expressão matemática para soma vetorial, baseada na Lei dos Cossenos, porém, não efetuou atividade de tratamento sobre essa expressão.

Em entrevista, E3 disse:

**E3 (entrevista):** *“Eu fiquei meio em dúvida, por causa que no exemplo do quadro tinha um número aqui (refere-se ao ângulo) e aqui não tem, sabe? Então fiquei com dúvida.*

**Professora:** *E se não tivesse todo esse contexto, fosse só a imagem? O que poderia me dizer a respeito dessa imagem?*

**E3:** *Aqui estão como numa guerrinha de quem tem mais força para puxar. Eu acho que esse lado aqui (refere-se ao esquerdo) ganharia, porque só esse daqui já tem 43 de força, enquanto o outro aqui tem 45. Somando esse daqui, eu acho que ganharia”.*

Segundo depoimento de E3, em comparação com sua produção escrita, evidenciamos que o estudante tentou aplicar a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, que foi disponibilizada no quadro de giz. Porém, ele não reconheceu a informação da medida angular para realizar tratamento sobre essa expressão.

Apesar de não ter apresentado procedimentos de cálculo para determinação do valor numérico da intensidade da força resultante, E3 forneceu resposta correta para a orientação da força resultante durante sua explicação em linguagem verbal oral. Ele considerou que o somatório dos valores numéricos das forças aplicadas pelos meninos, que puxam o carrinho de supermercado para o lado esquerdo, é superior ao valor numérico da força exercida pelo menino que puxa o mesmo carrinho para o lado direito. Dessa forma, reconheceu que a orientação da força resultante seria para o lado esquerdo.

Para a questão 4, E3 não apresentou produção escrita. Em entrevista, ele mencionou:

**E3 (entrevista):** *“Não consegui.*

**Professora:** *Que informações você tem?*

**E3:** *Tem forças... determine o módulo, direção e sentido. Eu não consegui resolver.*

**Professora:** E você acha que dava para usar a fórmula?

**E3:** Eu acho que dá, mas não soube usar aí nessa situação”.

De acordo com o exposto, não houve manifestação de conhecimentos a respeito da decomposição vetorial de forças por meio do envolvimento de E3 com a questão 4 da prova escrita.

Na figura 29, apresentamos a produção escrita de E3 para a resolução da questão 5 da prova escrita:

**Figura 29** – Registro escrito de E3 para a questão 5

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?  $|\vec{F}_R| = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$   
 $|\vec{F}_R|^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$   
 $|\vec{F}_R|^2 = 36 + 64 + 48$   
 $|\vec{F}_R|^2 = 148$   
 $|\vec{F}_R| = \sqrt{148}$   
 $|\vec{F}_R| \approx 12,2 \text{ N}$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.  
 Essa é a força somada dos dois pescadores.

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Na resposta ao item (b) da questão, conforme apresentada na figura 29, E3 escreveu:

**E3 (registro escrito):** “Essa é a força somada dos dois pescadores”.

Conforme mostrado na figura 29, para a questão 5 o estudante E3 produziu dois registros de representação semiótica, conforme especificamos no quadro a seguir:

**Quadro 14** – Registros de representação semiótica apresentados por E3 para a questão 5

Registro algébrico	$ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ $ \vec{F}_R ^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$ $ \vec{F}_R ^2 = 36 + 64 + 48$ $ \vec{F}_R ^2 = 148$ $ \vec{F}_R  = \sqrt{148}$ $ \vec{F}_R  = 12 \text{ N}$
Registro verbal escrito	<p>Essa é a força somada dos dois pescadores.</p>

Fonte: dos autores (2018)

Segundo produções escritas de E3, verificamos a aplicação da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, constituindo um registro algébrico (ver quadro 14). Apesar da coerência em seus procedimentos de cálculo, ao realizar tratamento sobre o registro algébrico, E3 errou ao considerar o resultado do cosseno do ângulo de  $90^\circ$  como  $1/2$ , o que impactou no resultado errado para a intensidade da força resultante.

Em entrevista, E3 expôs:

**E3 (entrevista):** “Aqui o desenho ajudou.

**Professora:** Aqui, nesse caso, você fez e achou a força resultante de 12 N. O que significa essa força de 12 N nessa situação?

**E3:** Seria a força total para mover o barco.

**Professora:** E vai mover para onde?

**E3:** Para frente”.

Comparando o que foi relatado em entrevista com a resposta apresentada para o item (b) da questão, em registro verbal escrito (ver quadro 14), na qual E3 explicou que o resultado obtido corresponde à força somada pelos dois pescadores, verificamos que há compreensão, por parte do estudante a respeito do efeito provocado pelo somatório das duas forças aplicadas sobre o barco e que o resultado da intensidade da força resultante, obtida no item (a) da questão, indica a “força total para mover o barco” (entrevista de E3) para frente.

Para essa questão, E3 apresentou atividades cognitivas de tradução sobre as representações do enunciado da questão e sobre as que ele próprio produziu, bem

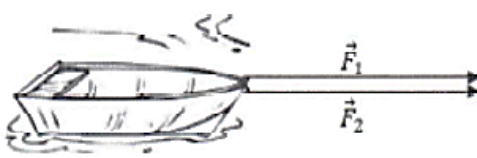
como realizou tratamento (sobre o registro algébrico) e conversão por entre registros de representação (do registro algébrico para o registro verbal oral).

Houve manifestação de teorema-em-ação falso, referente ao ângulo reto e ao seu cosseno, conduzindo ao erro em seu procedimento algébrico. Além disso, suas respostas em representação verbal, oral e escrita, indicam tentativas de integrações representacionais, que o conduziram à elaboração de discursos, porém, em um nível distante dos cientificamente aceitos. Apesar de tentar integrar representações, os conhecimentos mobilizados por E3 ainda tendem mais às informações intuitivas e oriundas de situações familiares já vivenciadas do que em informações conceituais da Física.

Na próxima figura apresentamos a produção escrita de E3 para a questão 7 da prova escrita:

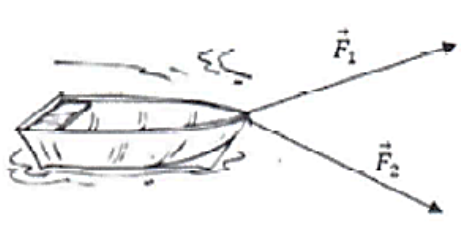
**Figura 30** – Registro escrito de E3 para a questão 7

(A)



(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente,  $60^\circ$  entre si:

(B)



Resposta:

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

*Não. A situação A envolve mais força do que a B.*

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Em resposta à questão 7, por meio de representação verbal escrita, E3 relatou:

**E3 (registro escrito):** “Não. A situação A envolve mais força do que a B”.

Em entrevista, E3 expôs:

**Professora (entrevista de E3):** “Nessa última, nós temos o mesmo barquinho em duas situações, mas a aplicação de forças é diferente. Quais as diferenças aqui.

**E3:** Nesse (refere-se à situação A) estão em paralelo e no outro estão em ângulo de  $60^\circ$  (refere-se à situação B). Com isso, o paralelo tem mais força, porque estão juntos. E aqui, como estão separados, já é outro tipo de força. Já diferencia”.

De acordo com os expostos, evidenciamos que E3 reconheceu a diferença entre as situações (A) e (B), propostas na questão 7, associando essa diferença à medida angular entre os vetores representativos de forças aplicados sobre cada um dos barcos.

Em relação às atividades cognitivas, relacionadas às representações, identificamos a realização de tradução e de transformações representacionais, caracterizadas pelo estabelecimento coerente de relações entre as diferentes formas representacionais do enunciado e produzidas pelo estudante. Ainda, houve tentativa de integração dessas representações, o que afirmamos com base na explicitação que E3 elaborou e forneceu por meio de representação verbal oral. Entretanto, nessa explicitação, não há referências claras a conhecimentos físicos.

No quadro 15, resumimos as regras-de-ação e teoremas-em-ação, bem como as atividades cognitivas relacionadas às representações que identificamos a partir das produções de E3:

**Quadro 15** – Síntese de regras-de-ação / teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E3

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA		
	Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
<b>Q. 3</b>	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada por $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ .	1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão. 2) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.
<b>Q. 4</b>	Não houve.	Não houve.
<b>Q. 5</b>	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ . 2) A $\vec{F}_R$ de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ equivale à atuação conjunta dessas forças sobre um corpo de massa.	1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais. 2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão). 3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais. 4) Apresenta erros em suas produções.
<b>Q. 7</b>	1) A $\vec{F}_R$ de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ equivale à atuação conjunta dessas forças sobre um corpo de massa. 2) Dadas duas forças de mesma origem, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , o ângulo formado entre elas implica diretamente na $\vec{F}_R$ .	1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais; 2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas (tratamento e conversão). 3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais. 4) Não apresenta erros em suas produções.

Fonte: dos autores (2018)

Segundo os procedimentos analíticos realizados sobre produções e explicitações de conhecimentos de E3, inferimos características pertinentes a diferentes níveis de explicitação.

Para a questão 3, evidenciamos que E3 manifestou características de explicitação do conhecimento em nível E-ii, pois, apesar de na produção escrita ter tentado, equivocadamente, aplicar a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos, o que caracterizaria a aplicação de uma regra-de-ação, ele ainda escreve que não sabe resolver, mas sabe que o lado esquerdo ganha, fornecendo uma resposta correta. Contudo, o que sustenta nossa defesa de classificação do conhecimento de E3 como de nível E-ii é o fato de que, quando instigado, ter fornecido uma explicação correta para a situação proposta, manifestando indícios de compreensão de um processo de comparação de lados opostos, em que evidenciou que o lado esquerda ganha e, assim, entendemos que há manifestação de conhecimentos físicos, a partir da mobilização de teoremas-em-ação verdadeiros.

Para a questão 4, não houve explicitação de conhecimentos.

Na questão 5, evidenciamos características dos níveis de explicitação E-i e E-ii, caracterizando as explicitações do estudante E3, para essa questão, como em transição por entre esses níveis. Contudo, classificamos as explicitações de conhecimentos de E3 no nível E-ii, porque evidenciamos: i) a predominância de mobilizações de teoremas-em-ação verdadeiros; ii) realizações de transformações representacionais internas e externas; e, iii) tentativas de integração de significações inerentes a diferentes formas representacionais, fornecendo explicações, em representação verbal oral, condizentes para a situação proposta na questão, porém, ainda com pouco esclarecimento embasado em conceitos físicos. Com base nessas mesmas evidenciações é que justificamos a categorização das explicitações de conhecimentos de E3 para a questão 7, como de nível E-ii, com a diferença de que, ao contrário do que aconteceu na questão 5, não houve mobilização de teorema-em-ação falso e, portanto, não evidenciamos nenhum erro em suas explicitações.

No quadro a seguir, sintetizamos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E3, a respeito da composição vetorial de forças, nos níveis I e E-ii:

**Quadro 16** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E3, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
4	Questão não resolvida.	-----
3, 5 e 7	a) Explicitou suas compreensões por meio de representação verbal oral coerente, porém, não fundamentada em conhecimentos físicos; b) Realizou transformações representacionais internas e externas (quando aplicáveis); c) Traduziu e tentou integrar diferentes formas representacionais; d) Prevaleceram acertos em suas produções.	E-ii

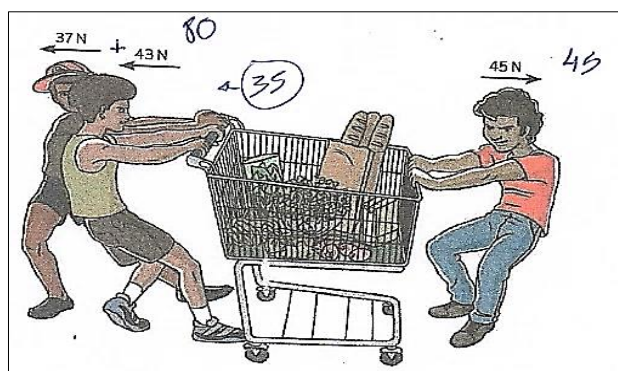
Fonte: dos autores (2018)

#### 8.4 ANÁLISE DO ESTUDANTE E4

Nesta seção, trazemos as discussões analíticas referentes às explicitações de conhecimentos de E4, a partir de evidências de invariantes operatórios (do tipo teorema-em-ação) e atividades cognitivas representacionais constantes em suas produções escritas e relatos verbais orais em entrevista.

Na figura 31, apresentamos a resposta de E4 para a terceira questão da prova escrita:

**Figura 31** – Registro escrito de E4 para a questão 3

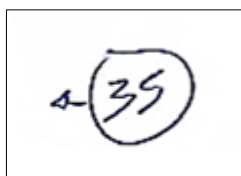


Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Para a questão 3, o estudante E4 realizou tratamento aritmético sobre as informações numéricas existentes na representação figurativa fornecida no enunciado da questão, conforme mostra a figura 31.

Observa-se, nesse tratamento, que E4 enfatizou o resultado obtido (35) a partir do somatório dos valores numéricos correspondentes às intensidades das forças aplicadas pelos meninos que puxam o carrinho de supermercado para o sentido esquerdo. Nessa ênfase, ele atribuiu uma flecha que aponta para o sentido esquerdo, conforme destacamos na figura 32:

**Figura 32** – Ênfase atribuída por E4 para o resultado obtido na questão 3



**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

A ênfase atribuída por E4 ao resultado, apresentando uma flecha apontada para o sentido esquerdo, indica a orientação da força resultante do sistema, cuja intensidade tem valor numérico igual a 35. Tal afirmação é reforçada a partir da resposta fornecida por E4 durante entrevista:

**Professora (entrevista):** “O que você entendeu aqui?”

**E4:** *Que os dois molequinhos ali estão fazendo mais força do que um só. E o carrinho vai para a esquerda”.*

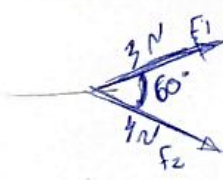
Para essa questão, não há evidências de mobilização de conceitos físicos para resolvê-la, mas as respostas de E4 indicam que ele compreendeu algumas ideias relacionadas à noção de força resultante, como a de soma de vetores de mesma direção e sentido, bem como de mesma direção, porém, sentidos opostos. O estudante traduziu as informações do enunciado, realizou tratamento sobre essas informações, operando corretamente as adições vetoriais e tentou integrar suas compreensões advindas das representações figurativas e matemáticas (aritméticas) para fornecer uma explicação em representação verbal oral.

Para a questão 4, o estudante E4 apresentou a seguinte resolução:

**Figura 33** – Registro escrito de E4 para a questão 4

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de 60°.



$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 9 + 16 + 12$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 37$$

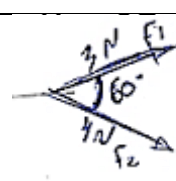
$$|\vec{F}_R| = \sqrt{37} \quad \rightarrow \quad |\vec{F}_R| = 6,08$$

Direção = Direita  
 Sentido = No mesmo sentido  
 Força = 6,08

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Conforme apresentado na figura 33, para a questão 4, o estudante E4 produziu diferentes registros de representação semiótica para a situação proposta na questão, as quais especificamos no quadro a seguir:

**Quadro 17** – Registros de representação semiótica apresentados por E4 para a questão 4

Registro algébrico	$ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ $ \vec{F}_R ^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$ $ \vec{F}_R ^2 = 9 + 16 + 12$ $ \vec{F}_R ^2 = 37$ $ \vec{F}_R  = \sqrt{37} \quad \rightarrow \quad  \vec{F}_R  = 6,08$
Registro diagramático	
Registro verbal escrito	Direção = Direita Sentido = No mesmo sentido Força = 6,08

Fonte: dos autores (2018)

Em entrevista, E4 não forneceu maiores informações para a questão, apenas mencionou:

**E4 (entrevista):** *“Por causa dos números, eu usei a fórmula”.*

Contudo, a produção escrita, conforme apresentamos na figura 33, fornece uma riqueza de explicitações do conhecimento do estudante a respeito da composição vetorial de forças.

Sobre o registro algébrico (ver quadro 17), E4 realizou atividade de tratamento, obtendo resultado correto para a intensidade da força resultante. Com o registro diagramático (ver quadro 17), o estudante elucidou um diagrama de corpo livre, estabelecendo um referencial para caracterizar o contexto fornecido na questão. Com base no registro algébrico e no registro diagramático, E4 atribuiu, por meio de registro verbal escrito (ver quadro 17), as características do vetor força resultante, conforme solicitado na questão. Nessa explicação, identificamos confusões relativas aos conceitos de direção e sentido, tendo em vista que o estudante mencionou que a direção resultante será para a direita e, ao se referir ao sentido, considerou ambos como sinônimos.

Portanto, verificamos: i) predomínio de mobilização de teoremas-em-ação verdadeiros; ii) realização de transformações internas sobre representações (tratamento sobre registro algébrico); e iii) tentativas de tradução de representações, o que evidenciamos a partir da representação diagramática para ilustrar o contexto fornecido na questão, bem como a representação verbal escrita, em que E4 objetivou sintetizar as características do vetor força resultante. Inclusive, entendemos que essa sintetização caracterizou tentativa de integração representacional.

Na figura 34, apresentamos a produção escrita de E4 para a questão 5 da prova escrita:

**Figura 34** – Registro escrito de E4 para a questão 5

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 8^2 + 6^2 + 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 90^\circ$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 64 + 36$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 100$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{100}$$

$|\vec{F}_R| = 10$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

*Usei a fórmula dada pela professora.*

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Como resposta ao segundo item da questão, E4 escreveu:

**E4 (registro escrito):** “Usei a fórmula dada pela professora”.

No item (a) da questão 5, E4 apresentou registro algébrico, constituído pela aplicação e correto tratamento efetuado sobre a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos. No item (b), em representação verbal escrita, E4 não explicou o significado do resultado obtido no item anterior, apenas especificou que utilizou a fórmula fornecida pela professora, a qual foi disponibilizada no quadro de giz no momento de aplicação da prova escrita.

Em entrevista, E4 disse:

**E4 (entrevista):** “Aqui eu cortei essa parte porque o  $90^\circ$  ali vai dar zero. Coloquei o 100 ali na raiz e deu 10.

**Professora:** E o barco, vai para onde?

**E4:** Eu acho que vai para a direita. Eu acho...”.

Conforme relatado na entrevista, E4 descreveu o procedimento realizado sobre o registro algébrico, não mencionando o significado do resultado obtido, segundo o contexto apresentado na questão. Quanto à orientação da força resultante, E4 não apresentou, com convicção, a resposta de que seria para a direita.

A partir do exposto, evidenciamos que E4 mobilizou regras-de-ação, constituídas pela aplicação e tratamento da expressão matemática, baseada na Lei

dos Cossenos, sem manifestar compreensão a respeito da configuração do resultado obtido para o contexto da questão.

Na sequência, trazemos a produção escrita de E4 para a questão 7 da prova escrita:

**Figura 35** – Registro escrito de E4 para a questão 7

(A)

(B)

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

*Não, quando do escrito um ângulo)*

*Na demonstração A soma-se as forças e na demonstração B faz com que não fique igual a força de A*

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Como resposta à questão, conforme mostra a figura 35, o estudante E4 descreveu:

**E4 (registro escrito):** “Na demonstração A soma-se as forças e na demonstração B faz com que não fique igual a força de A”.

Além do registro em linguagem verbal escrita, E4 complementa informações às representações figurativas que compõem o enunciado da questão. Para a situação (A), ele indica, pelo sinal de adição, que as forças serão somadas. Na situação (B), ele apenas indica a medida do ângulo formado entre as duas forças.

Enquanto no registro verbal escrito E4 apenas menciona que a força resultante da situação (A) será diferente da força na situação (B), na entrevista ele esclareceu que a força resultante será maior na primeira situação do que na segunda:

**E4 (entrevista):** *“Aqui em cima, como um puxa do lado do outro, soma-se, aí a força é maior do que se eles puxassem em 60°”.*

Apesar de em nenhum dos dois registros verbais, oral e escrito, E4 ter fornecido explicações físicas para sustentar suas afirmações, ele concluiu, corretamente, que na situação (A) a força resultante será maior que na situação (B), reconhecendo que o ângulo de inclinação é o que implica na diferença entre ambas as situações. Para chegar a essas constatações, evidenciamos que E4 realizou traduções de representações fornecidas no enunciado da questão e tentou integrar significações oriundas delas para fundamentar suas respostas.

No quadro 18, sintetizamos as regras-de-ação e teoremas-em-ação, bem como as atividades cognitivas relacionadas às representações, que identificamos a partir das produções de E4:

**Quadro 18** – Síntese de regras-de-ação / teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E4

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA		
	Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
<b>Q. 3</b>	<p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentido, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela soma dos valores numéricos de ambas as forças.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentidos opostos, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela subtração dos valores numéricos de ambas as forças.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas.</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p>
<b>Q. 4</b>	<p>1) É necessário estabelecer um referencial para descrever direção e sentido da <math>\vec{F}_R</math>.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações internas e externas.</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Predominância de acertos em suas produções.</p>
<b>Q. 5</b>	<p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.</p> <p>2) Não apresenta erros em suas produções.</p>

<b>Q. 7</b>	<p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentido, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela soma dos valores numéricos de ambas as forças.</p> <p>2) Dadas duas forças de mesma origem, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, o ângulo formado entre elas implica diretamente na <math>\vec{F}_R</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica).</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p>
-------------	---	--

**Fonte:** dos autores (2018)

Segundo os procedimentos analíticos realizados sobre produções e explicitações de conhecimentos de E4, inferimos características pertinentes a diferentes níveis de explicitação.

Para a questão 3, categorizamos a explicitação de conhecimentos de E4 no nível E-ii. Ainda que reconheçamos que suas manifestações não tenham abrangido claramente conceitos físicos, identificamos características desse nível (ver quadro 17) e entendemos que os conhecimentos mobilizados, como os relacionados à soma vetorial e orientação da força resultante, os quais caracterizam teoremas-em-ação verdadeiros, são compreendidos pelo estudante.

Dentre as características do nível E-ii que evidenciamos nas representações de E4, enfatizamos a produção de representações identificáveis, a tradução de diferentes formas representacionais, apresentação de procedimentos e resultados corretos e tentativas de integração de significações representacionais, permitindo a elaboração de discurso coerente para fornecer explicações, mesmo que elas não tenham sido completas, no sentido de não ter contemplado maiores detalhes, incluindo conceitos físicos.

Para a questão 4, classificamos a explicitação de conhecimentos de E4 no nível E-ii, pois prevaleceu a mobilização de teoremas-em-ação verdadeiros relacionados ao estabelecimento de referencial e aplicabilidade da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos. O fato de não ter esclarecido compreensões a respeito de distinções e relações entre direção e sentido, conforme registro escrito apresentado, entendemos que o estudante manifestou uma transição entre níveis E-i e E-ii, uma vez que apresenta erros a respeito desse conceito de orientação de uma força resultante. Entretanto, prevalecem na questão características de nível E-ii. Ainda, justificamos a classificação ao nível E-ii, devido atividades representacionais de tratamento interno realizadas sobre registro algébrico e de conversão entre registro em linguagem verbal escrita (enunciado) para registro diagramático e algébrico, tentativas de tradução e integração representacionais, o que constatamos no seu registro verbal escrito, e por não expressar oralmente as suas compreensões relativas à questão.

Na questão 5, os conhecimentos explicitados por E4 foram categorizados no nível I. Assim, justificamos devido à aplicação e tratamento da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, obtendo resultado correto, porém, sem manifestar compreensão a respeito dos procedimentos realizados e do resultado

determinado. Nesse caso, a utilização da expressão matemática se caracterizou como mobilização de regra-de-ação, cuja aplicabilidade foi reconhecida a partir da tradução de elementos chaves do enunciado, que permitiram que E4 associasse o contexto da questão a alguma outra situação parecida, na qual a mesma expressão tenha sido utilizada.

Por fim, na questão 7, evidenciamos que, mais uma vez, o estudante explicitou conhecimentos em nível E-ii. Suas respostas em representação verbal, oral e escrita, advêm de traduções representacionais e caracterizam tentativas de integração de significações delas. Apesar de mobilizar teoremas-em-ação verdadeiros e fornecer explicações coerentes para responder à questão, não categorizamos as explicitações em nível E-iii devido ao fato delas não abrangerem, claramente, conceitos físicos associados à composição vetorial de forças para justificar a resposta.

No quadro a seguir, sintetizamos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E4, a respeito da composição vetorial de forças, nos níveis I, E-i e E-ii:

**Quadro 19** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E4, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
3, 4 e 7	a) Não verbalizou de forma clara e coerente suas compreensões (questão 4) ou explicitou suas compreensões por meio de representação verbal oral coerente, porém, não fundamentada em conhecimentos físicos (questões 3 e 7); b) Realizou transformações representacionais internas e externas (quando aplicável); c) Traduziu e tentou integrar diferentes formas representacionais; d) Apresentou acertos em suas produções.	E-ii
5	a) Mobilizou regra-de-ação, sem manifestação de compreensão; b) Realizou tradução representacional, no sentido de identificar elementos do enunciado da questão e associá-los a alguma situação já vivenciada; c) Não apresentou erros em suas produções.	I

Fonte: dos autores (2018)

## 8.5 ANÁLISE DO ESTUDANTE E5

Nesta seção, descrevemos os procedimentos e resultados analíticos referentes às explicitações de E5 para as questões 3, 4, 5 e 7 da prova escrita.

Para a questão 3, o estudante não apresentou produção escrita e nem resposta verbal oral durante entrevista.

Na figura a seguir, temos a resolução de E5 para a questão 4:

**Figura 36** – Registro escrito de E5 para a questão 4

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ .

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{3}|^2 + |\vec{4}|^2 + 2 \cdot |\vec{3}| \cdot |\vec{4}| \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{9}| + |\vec{16}| + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 25 + 12$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 37$$

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Referente a essa questão, na entrevista, E5 relatou:

**Professora (entrevista):** “Nessa questão você usou fórmula. Por que você achou que deveria usar fórmula aqui?”

**E5:** Não sei explicar muito bem. Foi por causa dos números que eu tinha informação”.

A partir da entrevista e da produção escrita de E5 (ver figura 36), verificamos a mobilização de regra-de-ação, sem manifestação de compreensão a respeito de seus procedimentos e significado do resultado obtido. Essa regra-de-ação corresponde à aplicação de registro algébrico (expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos), sobre o qual foi realizada, corretamente, a atividade de tratamento, ainda que E5 não tenha finalizado o procedimento, determinando o valor da raiz quadrada do resultado obtido a partir dos passos anteriores.

Assim como para questão 4, as produções de E5 para a quinta questão indicam a mobilização de mesma regra-de-ação. Na figura 37, observamos a resolução do estudante para questão 5 da prova escrita:

**Figura 37** – Registro escrito de E5 para a questão 5

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R|^2 = |8|^2 + |6|^2 + \dots$$

$$|\vec{F}_R|^2 = |64| + |36|$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 100$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{100}$$

$$|\vec{F}_R| = 10$$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

*Não sei*

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Em resposta ao segundo item da questão, E5 respondeu:

**E5 (registro escrito):** “Não sei”.

Na sequência, apresentamos trecho da entrevista com E5 em que abordamos essa mesma questão:

**Professora (entrevista):** “Nessa questão você também fez cálculos. Por que?”

**E5:** Porque aqui também tinha informação de números, menos do cosseno. Não tinha informação do cosseno.

**Professora:** Mas mesmo assim você continuou o cálculo. Por que?

**E5:** Por que se o cosseno dá zero não precisa fazer, que é quando tem o ângulo de 90°.

**Professora:** E você chegou nesse resultado de 10 N. Daí, pedi para explicar o significado desse resultado.

**E5:** Não sei”.


Diante da produção escrita e do relato verbal oral de E5, constatamos que o estudante mobilizou regra-de-ação ao aplicar a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos. Apesar de ter realizado tratamento sobre essa representação

algébrica, obtendo resultado numérico correto para a força resultante, E5 não manifestou compreensões relativas aos procedimentos que realizou e resultado que obteve. Contudo, assim como para a questão 4, nessa quinta questão entendemos que ocorreu a tradução das informações do enunciado da questão, permitindo que E5 reconhecesse a aplicabilidade da expressão matemática utilizada, o que não aconteceu para a questão 3.

Por fim, verificamos na figura 38 a produção escrita de E5 para a questão 7:

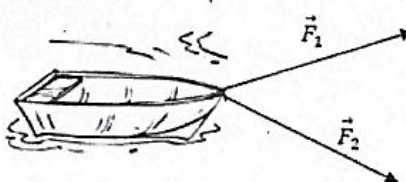
**Figura 38** – Registro escrito de E5 para a questão 7

(A)



(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente,  $60^\circ$  entre si:

(B)



Resposta:

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

*Não. por que o angulo não está igual.*

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Conforme evidenciamos na figura 38, ao ser questionado se a força resultante da situação (A) seria igual em módulo à força resultante da situação (B), E5 respondeu justificando:

**E5 (registro escrito):** “Não, porque o ângulo não está igual”.

A partir de sua produção escrita, afirmamos que E5 reconheceu que ambas as situações são distintas, em termos de força resultante produzida, e reconheceu

que essa diferença se pauta no ângulo formado entre cada par de forças aplicadas, em cada uma das situações, (A) e (B).

Em corroboração e complementação a essa afirmação, nos fundamentamos no seguinte trecho de entrevista:

**Professora (entrevista):** “Aqui temos dois barquinhos iguais e a única coisa diferente, entre eles, é a aplicação de forças. Você acha que aplicar forças dessa maneira (refere-se à situação (A)) e dessa maneira (refere-se à situação (B)) vai dar diferença na força resultante?”

**E5:** Vai.

**Professora:** Onde você acha que seria mais fácil puxar esse barco?

**E5:** Aqui em cima (refere-se à situação (A)).

**Professora:** Por que?

**E5:** Pelo ângulo entre as cordas... pelo jeito que está”.

A partir do que foi apresentado por E5, reafirmamos a compreensão do estudante a respeito da implicação do ângulo entre forças de mesma origem, em relação à força resultante e, em complemento, evidenciamos que E5 compreendeu que a intensidade da força resultante será maior na situação (A) do que na (B), devido à relação angular entre as forças.

A seguir, sintetizamos as regras-de-ação e/ou teoremas-em-ação, bem como as atividades cognitivas representacionais manifestadas nas produções de E5:

**Quadro 20** – Síntese de regras-de-ação / teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E5

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA		
	Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
<b>Q. 3</b>	Não houve.	Não houve.
<b>Q. 4</b>	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada por $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ .	1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.  2) Não apresenta erros em suas produções.
<b>Q. 5</b>	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ .	1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.  2) Não apresenta erros em suas produções.
<b>Q. 7</b>	1) Dadas duas forças de mesma origem, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , o ângulo formado entre elas implica diretamente na $\vec{F}_R$ .	1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais;  2) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.  4) Não apresenta erros em suas produções.

Fonte: dos autores (2018)

Segundo as informações sintetizadas no quadro 20, a respeito de regras-de-ação ou teoremas-em-ação, assim como de atividades cognitivas representacionais, verificamos explicitações de conhecimentos de E5 em níveis I e E-ii.

Para as questões 4 e 5, o estudante E5 apresentou mobilização de uma mesma regra-de-ação, a aplicação da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, configurando registros representacionais algébricos parcialmente identificáveis, sobre os quais efetuou atividade de tratamento e obteve resultados corretos. Todavia, não manifestou compreender os motivos por ter aplicado essa expressão, nem tampouco o significado do resultado obtido para o contexto da questão. A aplicabilidade da expressão foi reconhecida a partir da tradução de informações constantes no enunciado das questões (informações numéricas, segundo E5).

Já para a questão 7, classificamos a explicitação do conhecimento de E5 no nível E-ii, pois apresentou teorema-em-ação verdadeiro, bem como realizou atividades de tradução e tentativas de integração para produzir respostas coerentes para as situações abordadas, (A) e (B). Tais respostas, apesar de abrangerem justificativas coerentes, não forneceram conceitos físicos associados à composição vetorial de forças de maneira clara.

Para a questão 3, não foram apresentadas resoluções e, por isso, não houve classificação em nível de explicitação.

No quadro 21, resumimos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E5, a respeito de composição vetorial de forças, nos níveis I e E-ii:

**Quadro 21** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E5, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
3	Não houve.	-----
4 e 5	a) Mobilizou regra-de-ação, sem manifestação de compreensão; b) Realizou tradução representacional, no sentido de identificar elementos do enunciado da questão e associá-los a alguma situação já vivenciada; c) Não apresentou erros em suas produções.	I
7	a) Explicitou suas compreensões por meio de representação verbal oral coerente, porém, não fundamentada em conhecimentos físicos; b) Traduziu e tentou integrar diferentes formas representacionais; c) Apresentou acertos em suas produções.	E-ii

Fonte: dos autores (2018)

## 8.6 ANÁLISE DO ESTUDANTE E6

Na presente seção, apresentamos os procedimentos analíticos desenvolvidos a partir das produções de E6 para questão da prova escrita.

Para a questão 3 dessa prova escrita, E6 não apresentou resolução e, em entrevista, relatou:

**Professora (entrevista):** “Aqui você colocou que não soube fazer. Mas, se fosse só por essa figura, você poderia dizer o quê a respeito dela?”

**E6:** *Que os dois meninos aqui (refere-se aos meninos do lado esquerdo do carrinho) têm forças diferentes, mas que o outro aqui (refere-se ao menino do lado direito do carrinho) tem força maior que os dois e está puxando o carrinho para o outro lado.*

**Professora:** *E o que mais?*

**E6:** *Que esses dois aqui vão vencer?”*

Diante do seu relato na entrevista, apreendemos que E6 não manifestou conhecimentos pertinentes à composição vetorial de forças. Ao ser instigado, o estudante apenas descreveu a figura fornecida no enunciado da questão. Ao referir que, juntos, os dois meninos da esquerda venceriam a disputa de puxar o carrinho de supermercado, fazendo alusão à orientação da força resultante e deixando implícita a ideia de adição dessas duas forças de mesma direção e sentido, E6 não

forneceu uma afirmação, mas uma interrogativa, visando obter, ou não, a aprovação da professora.

Para a questão 4, E6 apresentou a produção escrita mostrada na figura a seguir:

**Figura 39** – Registro escrito de E6 para a questão 4

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de 60°.

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R| = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$|\vec{F}_R| = 9 + 16 + 6 + 24 = 2160$$

$$|\vec{F}_R| = 2160$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{2160}$$

$$|\vec{F}_R| = 46,47$$

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Em entrevista, E6 apenas descreveu os procedimentos que realizou em sua produção escrita:

**Professora (entrevista):** “Aqui você fez o cálculo. E por que você acha que tinha que usar a fórmula nesse caso? E o que significa o resultado?”

**E6:** Eu fiz a fórmula, mas fiquei confusa. Eu acho que não tinha que colocar o grau... o ângulo em grau. Mas eu coloquei. Depois que coloquei os valores... 3 vezes 3, que dá 9, 4 vezes 2, que dá 16. Daí, fiz mais dois da fórmula, daí fiz duas vezes 3, que dá 6, e fiz 6 vezes 3 que dá 24. Daí, eu fiz 24 vezes 90, que deu 2160. Daí, fiz a raiz quadrada de 2160 e deu esse resultado”.

Considerando sua produção escrita (ver figura 39) e relato em entrevista, evidenciamos que E6 aplicou a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, sem compreensão dos procedimentos realizados e resultado obtido. Dessa forma, a utilização da expressão se configurou como mobilização de regra-de-ação, cuja aplicação foi reconhecida a partir da tradução de elementos do

enunciado, os quais permitiram a E6 estabelecer um comparativo com outras situações já vivenciadas em que a mesma expressão foi aplicada.

Essa expressão se configurou, também, como um registro de representação algébrica, sobre o qual E6 realizou atividade de tratamento, porém, obteve resultado errado, devido ao acúmulo de erros que tiveram origem desde a substituição equivocada da informação da medida do ângulo. Inclusive, o valor numérico dessa medida caracteriza outro indicador de reprodução mecânica (sem compreensão), pois, no enunciado da questão, é fornecido a medida angular de  $60^\circ$ , e não de  $90^\circ$ , como utilizada por E6.

Erro similar é evidenciado na resolução de E6 para a questão 5, conforme apresentamos na figura seguinte:

**Figura 40** – Registro escrito de E6 para a questão 5

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R| = 6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ$$

$$|\vec{F}_R| = 36 + 64 + 2 + 12 + 2880$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{2880}$$

$$|\vec{F}_R| = 53,66.$$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

O resultado que eu fiz foi seis x seis, mais oito x oito. Repeti o dois daí fiz dois x seis, que deu doze e fiz doze x oito, que deu noventa e seis. Daí, fiz noventa e seis vezes trinta graus, que deu dois mil e oitocentos e oitenta e seis. Três vírgula zero e seis.

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Transcrevemos, com correções, a explicação de E6 para o item (b) da questão 5:

**E5 (registro escrito):** “O resultado que eu fiz foi seis x seis, mais oito x oito. Repeti o dois e fiz dois x seis, que deu doze. Fiz doze x oito, que deu noventa e seis. Daí, fiz noventa e seis vezes trinta graus, que deu dois mil,

*oitocentos e oitenta. Fiz raiz de dois mil, oitocentos e oitenta, que deu cinquenta e três, vírgula sessenta e seis”.*

Assim como evidenciamos na resolução da questão 4, novamente E6 mobiliza a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, como regra-de-ação aplicada sem compreensão, tendo em vista que efetua sobre esse registro de representação algébrico a atividade de tratamento e obtém resultado errado, decorrente do acúmulo de erros por substituição equivocada da medida angular. Cabe destacar que, mais uma vez, E6 utilizou medida angular diferente da fornecida no enunciado da questão.

Em sua explicação, no item (b) da questão, o estudante apenas descreveu os procedimentos de cálculo que realizou e, na entrevista, forneceu as seguintes explicações:

**Professora (entrevista):** *“Aqui, você fez o cálculo e chegou a um resultado. O que significa o resultado para essa situação aqui?”*

**E6:** *Que tem uma força puxando o barco, só que uma força está 8 N e, a outra, 6. Eu acho que as forças são iguais, o módulo que é diferente, mas a direção e o sentido é igual.*

**Professora:** *O que você quer dizer?*

**E6:** *A força vai ser igual, mas em módulo diferente.*

**Professora:** *E qual a diferença entre força e módulo?*


**E6:** *Não sei explicar”.*

No depoimento de E6, evidenciamos ideias confusas a respeito de força e módulo, grandezas essas que o estudante considera como distintas, porém, sem conseguir explicar suas diferenças. Além disso, também há informações confusas a respeito de direção e sentido. Assim, de maneira geral, verificamos que nenhuma das explicações fornecidas por E6, seja em representação verbal oral, ou escrita, apresentam explicitação de conhecimentos coerentes para justificar ou descrever conceitos físicos sobre composição vetorial de forças, conforme solicitados na questão.

Na figura 41, apresentamos a resposta de E6 para a questão 7 da prova escrita:


**Figura 41** – Registro escrito de E6 para a questão 7

(A)



(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente, 60° entre si:

(B)



Resposta:

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

*sim são iguais mas sentido diferente  
mas o resultado vai ser o mesmo.*

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Em seu registro escrito, E6 respondeu:

**E6 (registro escrito):** “Sim, são iguais, mas sentido diferente. Mas o resultado vai ser o mesmo”.

Conforme mostra a figura 41, E6 menciona que as forças resultantes para ambas as situações propostas na questão 7, (A) e (B), serão iguais em módulo, mas que seus sentidos serão distintos.

Referente a essa questão, apresentamos trecho de entrevista realizada com E6:

**E6 (entrevista):** “Eu acho que as forças são iguais, em módulo elas também estão iguais, mas o sentido é diferente. Eu acho que um (barco) vai ser puxado para frente e, o outro, também, só que os dois vão ser puxados com força igual, mas com módulo diferente”.

Novamente evidenciamos informações confusas a respeito de força e módulo, bem como a respeito da orientação dos barcos, uma vez que o estudante afirma que os sentidos resultantes dos barcos da situação (A) e da situação (B) serão

diferentes, contudo, menciona que ambos serão puxados para frente, com mesma força e módulos diferentes.

No quadro 22, sintetizamos as regras-de-ação/teoremas-em-ação e as atividades cognitivas representacionais manifestadas nas produções de E6:

**Quadro 22** – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E6

PROVA ESCRITA		
	Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
Q. 3	Não houve.	Não houve.
Q. 4	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada por $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ .	1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.  2) Apresenta erros em suas produções.
Q. 5	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada por $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ .  2) <b>As definições de “módulo” e de “força” são distintas.</b>  3) <b>Direção, sentido, força são expressões equivalentes para referir a orientação resultante.</b>	1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.  2) Tenta traduzir e integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.  3) Apresenta erros em suas produções.
Q. 7	1) <b>As definições de “módulo” e de “força” são distintas.</b>  2) <b>Direção, sentido, força são expressões equivalentes para referir a orientação resultante.</b>	1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.  2) Tenta traduzir e integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.  3) Apresenta erros em suas produções.

Fonte: dos autores (2018)

Segundo as informações sintetizadas no quadro 22, a respeito de regras-de-ação/teoremas-em-ação, bem como de atividades cognitivas representacionais, verificamos explicitações de conhecimentos de E6 em níveis I e E-i.

Para a questão 3, não foram apresentadas resoluções e, por isso, não houve classificação em nível de explicitação.

Para a questão 4, o estudante E6 apresentou mobilização de uma regra-de-ação, a aplicação da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos. Essa expressão se configurou como registro representacional algébrico parcialmente identificável, pois seu resultado evidencia o valor numérico da intensidade da força resultante. Sobre esse registro, E6 efetuou atividade de tratamento e obteve resultados incorretos, devido substituições indevidas de valores no início desse. O estudante não mostrou compreender os procedimentos realizados no tratamento da expressão, nem o significado do resultado obtido para o contexto da questão. Desse modo, a aplicabilidade da expressão foi reconhecida a partir da tradução de informações constantes no enunciado da questão.

A explicitação de conhecimentos de E6 para as questões 5 e 7 foram categorizadas no nível E-i. Essa categorização pautou-se nas evidências de teoremas-em-ação falsos, os quais são destacados no quadro 22. Além disso, E6 tentou realizar atividades de tradução e de integração para produzir suas respostas à questão em representação verbal, oral e escrita. Por se fundamentar em teoremas-em-ação falsos, essas respostas foram elaboradas erroneamente, contemplando informações confusas.

Especificamente na questão 5, o estudante mobilizou mesma regra-de-ação utilizada na questão 4 e apresentou resultado equivocado devido ao acúmulo de erros em seu tratamento que começou com a atribuição errada de valor para medida angular entre forças de mesma origem.

No quadro 23, resumimos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E6, a respeito de composição vetorial de forças, nos níveis I e E-i:

**Quadro 23** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E6, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
3	Não houve.	-----
4	a) Mobilizou regra-de-ação, sem manifestação de compreensão; b) Realizou integração representacional, no sentido de identificar elementos do enunciado da questão e associá-los a alguma situação já vivenciada; c) Apresentou erros em suas produções.	I
5 e 7	a) Mobilizou teoremas-em-ação falsos; b) Tentou traduzir e integrar diferentes formas representacionais; c) Apresentou erros em suas produções (respostas incoerentes e confusas).	E-i

Fonte: dos autores (2018)

### 8.7 ANÁLISE DO ESTUDANTE E7

O estudante E7 não apresentou resolução, por meio de produção escrita, para a questão 3 da prova escrita. Em entrevista, ele apenas respondeu que acreditava que o carrinho seria movido para o lado direito, mas não explicou como chegou a essa conclusão.

Na figura a seguir, apresentamos a resolução de E7 para a questão 4:

**Figura 42** – Registro escrito de E7 para a questão 4

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de 60°.

$$|F_r| = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|F_r| = 9 + 16 + 12$$

$$|F_r| = \sqrt{37}$$

$$|F_r| = 6,08$$

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Conforme mostra a figura 42, para a questão 4, o estudante E7 produziu representação parcialmente identificável para a situação, pois forneceu corretamente o resultado numérico para a intensidade da força resultante, porém, não respondeu qual seria a orientação dessa força. Para determinar esse resultado numérico, E7 realizou a atividade de tratamento sobre a representação algébrica, que consistiu na aplicação da expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos.

A seguir, apresentamos trecho da entrevista de E7:

**Professora (entrevista):** “Aqui você usou fórmula. Por que você achou que deveria usar fórmula?”

**E7:** “Porque você mostrou outro dia um exemplo com  $F_1$  e  $F_2$ , e aqui também informa”.

O relato de E7 indica que o procedimento algébrico adotado em sua produção escrita (ver figura 42) consistiu de regra-de-ação memorizada e reproduzida, caracterizando uma resolução realizada e obtida sem compreensão dos conceitos envolvidos. Entretanto, o reconhecimento da aplicabilidade da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, para resolver essa questão sugere que E7 traduziu informações fornecidas pelo enunciado da questão, a qual foi proposta em representação verbal escrita.

Na próxima figura, apresentamos a resolução de E7 para a questão 5 da prova escrita:

**Figura 43** – Registro escrito de E7 para a questão 5

Resposta:

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$F_R^2 = 6^2 + 8^2$$

$$|F_R^2 = 36 + 64$$

$$|F_R^2 = \sqrt{100}$$

$$|F_R^2 = 10$$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

Quer dizer que a mesma força não aplicada nos dois pescadores

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Conforme ilustra a figura 43, para a questão 5 o estudante E7 aplicou a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, e realizou corretamente a atividade de tratamento sobre ela. Inclusive, o estudante reconheceu a possibilidade de redução dessa expressão para o Teorema de Pitágoras, o que é possível devido ao ângulo reto formado entre as duas forças de mesma origem.

No item (b) da questão, em que se pede a explicação para o resultado obtido, E7 respondeu:

**E7 (registro escrito):** *“Quer dizer que a mesma força é aplicada nos dois pescadores”.*

A partir do registro escrito apresentado por E7 para responder ao item (b) da questão 5, não foi possível concluir se houve compreensão a respeito do conceito físico envolvido na questão, ou seja, se ele entendeu o efeito da força resultante sobre a situação proposta. A partir do que tentou explicitar em representação verbal escrita entendemos que E7 considerou o resultado obtido no item (a) como uma força aplicada sobre cada um dos pescadores e não como resultado de suas ações conjuntas.

A seguir, apresentamos um excerto da entrevista com E7 em que exploramos seus entendimentos a respeito da quinta questão:

**Professora (entrevista):** *“Aqui tem um barquinho. Você utilizou a fórmula e chegou no resultado 10. O que significa esse resultado no caso do barquinho?”*

**E7:** *A força que as duas pessoas fazem juntas para puxar.*

**Professora:** *E vai puxar para onde?*

**E7:** *Para o mesmo lado, porque um puxa desse lado e um desse lado, ele vai ficar assim mais ou menos (indica, gestualmente, que o barquinho será puxado entre as duas forças, mais próximo da de maior valor numérico da intensidade)”.*

A partir das respostas fornecidas por E7 durante a entrevista, evidenciamos que houve compreensão do efeito resultante provocado pela ação conjunta de forças aplicadas pelos dois pescadores sobre o barco.

Ainda que E7 tenha novamente aplicado e realizado tratamento sobre a representação algébrica, entendemos que o estudante foi além da aplicação de regra-de-ação nessa questão, pois, apoiado na representação figurativa dada na questão (ver APÊNDICE C), ele foi capaz de atribuir significado coerente ao


resultado obtido. Nesse sentido, evidenciamos que E7, além de traduzir informações pertinentes do enunciado (que contempla representação verbal escrita e figurativa), realizou transformações internas (tratamento sobre registro algébrico na resolução do item (a) da questão) e externas (conversão entre registro algébrico e registro verbal, oral e escrito). Além disso, o estudante integrou compreensões advindas das diversas representações fornecidas pela questão produzidas por ele para explicitar seus entendimentos. Tais entendimentos contemplaram teoremas-em-ação verdadeiros associados à soma vetorial e ao conceito e efeito da força resultante.

Contudo, segundo explicação de E7 em representação verbal oral, verificamos que seu discurso não teve fundamento efetivo em conceito físico sobre força resultante, mas em ideia intuitiva sobre possível comportamento resultante do barco que, segundo E7, vai *“Para o mesmo lado, porque um puxa desse lado e um desse lado, ele vai ficar assim mais ou menos”*. Ao dizer isso, seus gestos indicaram, aproximadamente, a orientação correta do barco, segundo resultado geométrico para a soma vetorial da questão 5 (ver figura 26). Todavia, o estudante não esclareceu, de maneira explícita, que essa orientação é devido à diferença de intensidades de forças exercidas por ambos os pescadores e, por isso, esse conhecimento se caracterizou como teorema-em-ação, ou seja, como invariante operatório e não como invariante predicativo.

A figura 44 contempla a produção escrita de E7 para a questão 7 da prova escrita:

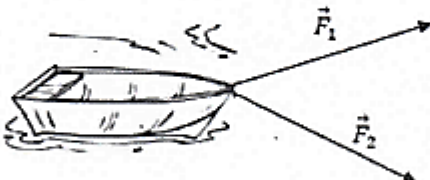
**Figura 44** – Registro escrito de E7 para a questão 7

(A)



(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente,  $60^\circ$  entre si.

(B)



Resposta:

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

Não, porque a figura A está puxando num ângulo de  $60^\circ$ , então a força vai demorar mais para ser puxado do que o barco na figura A.

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Em representação verbal escrita, E7 respondeu:

**E7 (registro escrito):** “Não, porque a figura [B] está puxando num ângulo de  $60^\circ$ , então o barco vai demorar mais para ser puxado do que o barco na figura A”.

Já em entrevista, E7 forneceu a seguinte resposta:

**E7 (entrevista):** “Na figura (A) as pessoas vão conseguir puxar o barco com menos dificuldade e, na (B), terão uma dificuldade maior para puxar o mesmo barco”.

Em todas as respostas de E7, por meio de representação verbal, oral e escrita, o estudante manifestou teorema-em-ação verdadeiro, relacionado à diferença de força resultante entre as situações (A) e (B), devido à distinção entre ângulos formados por cada par de forças. Evidenciamos que o estudante traduziu as

informações presentes nas representações do enunciado (verbal escrito e figurativo, conforme APÊNDICE C), bem como integrou suas compreensões para fornecer uma explicação coerente para a situação. Contudo, apesar de fazer menção ao ângulo, suas respostas não contemplam conceitos físicos. Por exemplo, em nenhum momento o estudante menciona *força resultante* ou *soma (vetorial) de forças* e, por isso, entendemos que seus conhecimentos ainda se caracterizam apenas como teoremas-em-ação.

No próximo quadro, resumimos as regras-em-ação e/ou teoremas-em-ação, assim como as atividades cognitivas representacionais reveladas nas produções de E7:

**Quadro 24** – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E7

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA		
	Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
<b>Q. 3</b>	Não houve.	Não houve.
<b>Q. 4</b>	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada por $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ .	1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.  2) Não apresenta erros em sua produção.
<b>Q. 5</b>	1) Para duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , de mesma origem e que determinam entre si um ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$ , a força resultante é determinada por $ \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta$ .  2) A $\vec{F}_R$ de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ equivale à atuação conjunta dessas forças sobre um corpo de massa.	1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.  2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica) e realiza, sobre elas, transformações interna (tratamento) e externa (conversão).  3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.  4) Não apresenta erros em suas produções.
<b>Q. 7</b>	1) Dadas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , o ângulo formado entre elas implica diretamente na $\vec{F}_R$ .	1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.  2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica).  3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.  4) Não apresenta erros em suas produções.

Fonte: dos autores (2018)

Segundo as informações sintetizadas no quadro 24, a respeito de regras-de-ação/teoremas-em-ação, bem como de atividades cognitivas representacionais, caracterizamos as explicitações de conhecimentos de E7 em níveis I e E-ii.

Para a questão 3, não foram apresentadas resoluções e, por isso, não houve classificação em nível de explicitação.

Para a questão 4, o estudante E7 mobilizou como regra-de-ação a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos. Essa expressão se configurou como registro representacional algébrico parcialmente identificável, pois seu resultado evidencia o valor numérico da intensidade da força resultante, mas contempla informações relacionadas à orientação dessa força, de modo a caracterizá-la totalmente. Sobre esse registro, E7 realizou atividade de tratamento e obteve resultado correto, porém, não mostrou compreender os procedimentos realizados no tratamento dessa expressão nem o significado do resultado obtido para o contexto da questão, tendo em vista que a aplicabilidade da expressão foi reconhecida a partir da tradução de informações constantes no enunciado da questão.

Para as questões 5 e 7, a explicitação de conhecimentos de E7 foi categorizada no nível E-ii. Essa categorização pautou-se nas evidências de teoremas-em-ação verdadeiros, tradução de informações das formas representacionais do enunciado e produzidas por ele, bem como em tentativas de integração para produzir suas respostas para cada questão, por meio de representação verbal, oral e escrita. Nessa integração, evidenciamos a falta de contemplação de conceitos físicos para sustentar suas respostas, ainda que estas tenham sido coerentes para o contexto de cada uma das questões.

No quadro 25, resumimos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E7, a respeito de composição vetorial de forças, nos níveis I e E-ii:

**Quadro 25** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E7, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
3	Não houve.	-----
4	a) Mobilizou regra-de-ação, sem manifestação de compreensão; b) Realizou tradução representacional, no sentido de	I

	identificar elementos do enunciado da questão e associá-los a alguma situação já vivenciada; c) Não apresentou erros em suas produções.	
5 e 7	a) Explicitou suas compreensões por meio de representação verbal oral coerente, porém, não fundamentada em conhecimentos físicos; b) Traduziu e tentou integrar diferentes formas representacionais; c) Apresentou acertos em suas produções.	E-ii

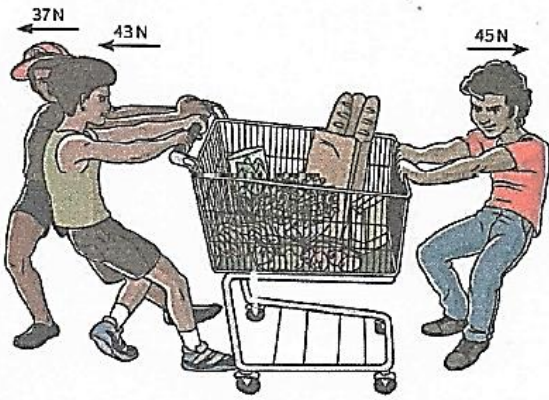
Fonte: dos autores (2018)

### 8.8 ANÁLISE DO ESTUDANTE E8

Nesta seção, apresentamos os procedimentos analíticos sobre as resoluções apresentadas por E8 para as questões 3, 4, 5 e 7 da prova escrita.

Na figura 45, mostramos a produção escrita de E8 para a questão 3:

**Figura 45** – Registro escrito de E8 para a questão 3



**Figura 2** – Representação dos três garotos puxando um carrinho de supermercado  
 Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAq2I8AG/avaliacao-fisica-1-ano-forcas-leis-newton>>. Acesso em: 20 jun 2017.

Qual é o valor (em módulo) e a orientação da força resultante nessa situação?

$37 + 43 - 45 = 35$  para o direito.

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Para resolver a questão 3, o estudante E8 recorreu à representação aritmética que, associada à representação verbal escrita, caracterizou um registro de

representação semiótica parcialmente identificável para a situação, uma vez que contemplou o valor numérico da intensidade da força resultante e o seu sentido, mas não forneceu a direção.

Apesar de realizar tratamento correto sobre a representação aritmética, há erros na resolução de E8. Conforme verificamos na figura 45, E8 atribuiu sinal positivo para as duas forças aplicadas à esquerda do carrinho de supermercado e negativo para a força aplicada à direita. Apesar de ter obtido valor numérico correto a partir das operações matemáticas realizadas, E8 atribuiu, equivocadamente, sinal negativo ao resultado. Além disso, indicou o sentido errado para a força resultante, segundo referencial que adotou.

Na sequência, apresentamos um excerto da entrevista realizada com o estudante E8, abordando a terceira questão:

**Professora (entrevista):** *“Por que você apresentou essa resposta?”*

**E8:** *“Porque se tem uma força para cá (esquerda), tipo de força maior, vai puxar mais para cá (esquerda). Se tem uma força maior para lá (direita), essa força fica tipo um cabo de guerra, daí eu fiz aquele de mais e menos”.*

Com base no que foi relatado por E8 em entrevista, evidenciamos que a orientação da força resultante não foi determinada pelo estudante a partir do resultado obtido para a soma vetorial, conforme apresentado no registro aritmético mostrado na figura 45. O estudante considerou cada força individualmente e, nesse contexto, a que apresentou maior valor numérico indicou a orientação da força resultante. Assim, para a questão 3, E8 indicou o sentido direito para a força resultante devido à força aplicada pelo menino da esquerda ser superior, numericamente, às forças aplicadas por cada um dos meninos que se encontram ao lado esquerdo do carrinho, desconsiderando que a soma das forças desses dois é superior a aplicada pelo menino à direita. Diante do exposto, verificamos a manifestação de teorema-em-ação falso a respeito da orientação da força resultante, conduzindo o estudante ao erro.

Houve tentativas de tradução e integração entre representações do enunciado e produzidas pelo próprio estudante. A tradução ocorreu sobre informações do próprio enunciado, permitindo a produção de representações parcialmente identificáveis à questão, bem como sobre produção escrita do estudante, culminando na tentativa de integração de significações para constituir um discurso

explicativo para a situação, a qual foi incoerente para o contexto por ter sido fundamentado em teorema-em-ação falso.

A próxima figura expõe a resolução de E8 para a questão 4 da prova escrita:

**Figura 46** – Registro escrito de E8 para a questão 4

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ .

$$|F_R|^2 = |F_1|^2 + |F_2|^2 + 2 \cdot |F_1| \cdot |F_2| \cdot \cos$$

$$|F_R|^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|F_R|^2 = 9 + 16 + 12$$

$$|F_R| = \sqrt{37}$$

$$|F_R| = 6,08$$

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

A partir da tradução das informações fornecidas no enunciado, E8 reconheceu a possibilidade de aplicação da expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos, produzindo registro algébrico parcialmente identificável para a situação, uma vez que, a partir de seu tratamento, foi possível obter apenas o valor numérico da intensidade da força resultante. Para caracterizar efetivamente a força resultante, além do valor numérico seria necessário estabelecer um referencial e, a partir dele, indicar direção e sentido.

A seguir, apresentamos trecho da entrevista realizada com E8, em que ele explicou sua resolução para a questão 4:

**E8 (entrevista):** “Agora eu joguei na fórmula.

**Professora:** E por que você achou que precisava fazer isso?

**E8:** Porque aqui está falando do ângulo e aqui está falando de força. Aí, eu lembrei que é de força resultante”.

No relato de E8, evidenciamos que a aplicação da expressão matemática, conforme mostra a figura 46, consistiu na mobilização de regra-de-ação em que o tratamento interno realizado contemplou procedimentos e resultados obtidos sem compreensão, caracterizando uma reprodução procedimental baseada em situações similares vivenciadas em momentos instrucionais anteriores.

Na sequência, vemos a resolução de E8 para a questão 5:

**Figura 47** – Registro escrito de E8 para a questão 5

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$|F_R|^2 = 8^2 + 6^2 + 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 0$$

$$|F_R|^2 = 64 + 36 + 0$$

$$|F_R| = \sqrt{100}$$

$$|F_R| = 10$$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

*Joguei na fórmula.*

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Em resposta ao segundo item da questão, E8 escreveu:

**E8 (registro escrito):** “Joguei na fórmula”.

Conforme mostrado na figura 47, mais uma vez E8 traduziu informações das representações do enunciado, de modo a reconhecer a aplicabilidade da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, para resolver a questão. Sobre o registro algébrico, é efetuada a atividade de tratamento, conduzindo o estudante ao resultado correto. Apesar da resolução correta, no item (b) da questão, não é apresentada explicação ou justificativa para os procedimentos realizados e resultado obtido.

Em entrevista, E8 também não soube explicar ou justificar seus procedimentos e resultado:

**E8 (entrevista):** “É a mesma coisa, só muda a abertura que é de 90°.

**Professora:** E aqui tinha que explicar o significado.

**E8:** Eu não soube escrever.

**Professora:** Mas você tinha falado que sabia que deveria usar a fórmula para calcular a força resultante. Mas o que significa a força resultante nessa situação?


**E8:** Força resultante é... Eu não sei como explicar”.

E8 explicou, em entrevista, que a resolução da questão 5 é análoga à da questão 4, cuja diferença é apenas o ângulo formado entre os pares de forças de mesma origem em cada questão. Apesar de E8 ter mencionado que utilizou a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos para resolver a questão 4, porque precisaria determinar características da força resultante, suas produções indicaram que ele não compreendeu a definição desse conceito físico.

Por fim, para a questão 7, o estudante E8 apresentou a seguinte resposta:


**Figura 48** – Registro escrito de E8 para a questão 7

(A)



(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente,  $60^\circ$  entre si:

(B)



Resposta:

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

*não, pois quanto maior a abertura maior a força.*

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Conforme mostra a figura 48, para a questão 7 o estudante E8 escreveu:

**E8 (registro escrito):** “Não, pois quanto maior a abertura, maior a força”.

Segundo produção escrita de E8, a força resultante está atrelada à abertura, ou seja, ao ângulo formado entre cada par de forças de mesma origem, de modo que quanto maior a abertura, maior será a força.

A seguir, apresentamos um excerto da entrevista realizada com E8 em que contemplamos a sétima questão:

**E8 (entrevista):** *“Aqui temos duas situações com o mesmo barco. Aqui duas pessoas puxando e, aqui, também duas pessoas puxando. Estão puxando da mesma maneira?”*

**E8:** *Não.*

**Professora:** *E o que você acha que vai acontecer com a força resultante?*

**E8:** *Quanto maior a abertura, maior será a força.*

**Professora:** *O que você quer dizer com isso?*

**E8:** *Eu acho que aqui vai ter mais dificuldade (refere-se à situação B).*

**Professora:** *Aqui vai ter mais dificuldade? Por que?*

**E8:** *Acho que sim. Porque se usar mais força fica mais difícil. No outro (refere-se à situação A), vai usar menos força e vai ser mais fácil”.*

A partir da entrevista, E8 esclareceu a comparação que explicitou em registro verbal escrito. Ao mencionar que quanto maior a abertura, maior será a força, o estudante quis dizer que maior será a força necessária para provocar o mesmo efeito que em outra situação, cuja abertura é menor (situações (B) e (A), respectivamente).

Apesar de traduzir informações das diferentes representações do enunciado e tentar integrar suas compreensões advindas delas para fornecer uma explicação coerente para a situação, identificamos que elas não se fundamentaram, literalmente, em conceitos físicos, uma vez que em nenhum momento há menções, por parte do estudante, a respeito de força resultante, medida angular entre as forças de mesma origem, direcionamento resultante, entre outros. Apesar de coerentes, suas explicações estão mais próximas de embasamento intuitivo do que de científico.

No quadro 26, sintetizamos as regras-em-ação e/ou teoremas-em-ação, bem como as atividades cognitivas representacionais reveladas nas produções de E8:

**Quadro 26** – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E8

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA	
Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
<p><b>Q. 3</b></p> <p>1) É necessário estabelecer um referencial para descrever direção e sentido da <math>\vec{F}_R</math>.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentido, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela soma dos valores numéricos de ambas as forças.</p> <p>3) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentidos opostos, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela subtração dos valores numéricos de ambas as forças.</p> <p><b>4) O direcionamento da força resultante corresponde ao direcionamento da força individual de maior intensidade que atua sobre um sistema.</b></p>	<p>1) Tenta realizar atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representação parcialmente identificável e realiza, sobre ela, transformação interna (tratamento).</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Apresenta erros em suas produções.</p>
<p><b>Q. 4</b></p> <p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.</p> <p>2) Não apresenta erros em sua produção.</p>
<p><b>Q. 5</b></p> <p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.</p> <p>2) Não apresenta erros em sua produção.</p>

<b>Q. 7</b>	1) Dadas duas forças de mesma origem, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ , o ângulo formado entre elas implica diretamente na $\vec{F}_R$ .	1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais. 2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica). 3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais. 4) Não apresenta erros em suas produções.
-------------	--	---

**Fonte:** dos autores (2018)

De acordo com as informações sintetizadas no quadro 26, a respeito das regras-de-ação/teoremas-em-ação, bem como das atividades cognitivas representacionais, verificamos explicitações de conhecimentos de E8 em níveis I, E-i e E-ii.

Para a questão 3, o estudante E8 apresentou teoremas-em-ação verdadeiros a respeito do estabelecimento de referencial e soma vetorial de forças de mesma direção e em mesmo sentido ou sentidos contrários. Porém, também apresentou teorema-em-ação falso (destacado no quadro 26) que, integrado aos demais teoremas-em-ação, implicou em um discurso equivocado, bem como na produção de um registro representacional parcialmente identificável para a situação proposta na questão. Assim, a explicitação de seu conhecimento foi categorizada no nível E-i.

Para as questões 4 e 5, o estudante E8 mobilizou, como regra-de-ação, a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos. Essa expressão se configurou como registro representacional algébrico parcialmente identificável em ambas as questões, uma vez que seu resultado forneceu apenas o valor numérico da intensidade da força resultante, não informando a orientação dessa força, cuja informação é necessária para sua caracterização. Sobre os registros algébricos apresentados em cada uma dessas duas questões, E8 realizou atividade de tratamento e obteve resultado correto, porém, não mostrou compreender os procedimentos realizados no tratamento dessa expressão, nem tampouco o significado do resultado obtido para o contexto da questão. A aplicabilidade da expressão foi reconhecida a partir da tradução de informações constantes no enunciado da questão. Assim, diante do exposto, a explicitação em cada uma dessas questões foi categorizada no nível I.

Para a questão 7, a explicitação de conhecimentos de E8 foi categorizada no nível E-ii. Além de mobilizar teoremas-em-ação verdadeiros, o estudante traduziu informações das formas representacionais do enunciado e produzidas por ele, bem como tentou integrar seus entendimentos na produção de uma representação verbal oral para explicitar seus entendimentos. Nessa integração, evidenciamos a falta de contemplação de conceitos físicos para sustentar suas respostas, ainda que estas tenham sido coerentes para o contexto de cada uma das questões.

No quadro 27, sintetizamos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E8, a respeito da composição vetorial de forças, nos níveis I, E-i e E-ii:

**Quadro 27** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E8, segundo características evidenciadas em suas produções

<b>Questão</b>	<b>Características</b>	<b>Nível de Explicitação</b>
3	a) Mobilizou teoremas-em-ação falsos, apresentando erros em sua produção; b) Realizou transformações representacionais internas; c) Tentou traduzir e integrar diferentes formas representacionais.	E-i
4 e 5	a) Mobilizou regra-de-ação, sem manifestação de compreensão; b) Realizou tradução representacional, no sentido de identificar elementos do enunciado da questão e associá-los a alguma situação já vivenciada; c) Não apresentou erros em suas produções.	I
7	a) Explicitou suas compreensões por meio de representação verbal oral coerente, porém, não fundamentada em conhecimentos físicos; b) Traduziu e tentou integrar diferentes formas representacionais; c) Apresentou acertos em suas produções.	E-ii

**Fonte:** dos autores (2018)

### 8.9 ANÁLISE DO ESTUDANTE E9

Passamos a apresentar os procedimentos analíticos realizados sobre as produções do estudante E9 em resposta às questões 3, 4, 5 e 7 da prova escrita, começando pela apresentação de sua resolução para a questão 3:

**Figura 49** – Registro escrito de E9 para a questão 3

**Figura 2** – Representação dos três garotos puxando um carrinho de supermercado

Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAq2I8AG/avaliacao-fisica-1-ano-forcas-leis-newton>>. Acesso em: 20 jun 2017.

Qual é o valor (em módulo) e a orientação da força resultante nessa situação?

$$|\vec{F}_R|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 80^2 + 45^2 + 2 \cdot 80 \cdot 45 \cdot \cos 90^\circ$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 6.400 + 2.025 + 0$$

$$|\vec{F}_R|^2 = 8.425$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{8.425}$$

$$|\vec{F}_R| = 2,9$$

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Segundo produção escrita mostrada na figura 49, evidenciamos que E9 tentou aplicar, como regra-de-ação, a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, para determinar o módulo da intensidade da força resultante, obtendo uma representação algébrica não identificável para a situação proposta.

Apesar do registro apresentado, evidenciamos um teorema-em-ação verdadeiro em meio ao procedimento algébrico de E9. As forças aplicadas pelos dois meninos ao puxar o carrinho para o sentido esquerdo foram somadas, constituindo o que denominou por  $|\vec{F}_1|$ . Portanto, identificamos que houve tradução de informações das representações (verbal escrita e figurativa) do enunciado.

A seguir, apresentamos trecho da entrevista realizada com E9:

**E9 (entrevista):** “Eu não sei responder essa. Tipo, eu sabia fazer, mas eu não sabia o ângulo. Eu coloquei o ângulo de 90° porque eu lembro que era o mais fácil.

**Professora:** E se você tivesse só a imagem e não tivesse nada aqui de informação da questão, o que você poderia me dizer a respeito da imagem?

**E9:** *Que o lado esquerdo ganharia.*

**Professora:** *Por que?*

**E9:** *Porque tem mais força. É que as forças que elas estão fazendo aqui (indica os meninos do lado esquerdo do carrinho) é maior do que daquele que está sozinho”.*

Com a entrevista, corroboramos a afirmação de que E9 reconheceu que forças que atuam em mesma direção e sentido serão somadas. Podemos justificar essa afirmação ao considerarmos sua fala “as forças que elas estão fazendo aqui”, referindo-se à ação conjunta das forças aplicadas pelos dois meninos ao puxar o carrinho para a esquerda.

Verifica-se que, ao ser instigado, E9 forneceu resposta coerente para a questão 3. Antes disso, ele afirmou que sabia o que deveria fazer, ou seja, sabia que deveria aplicar a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos, a qual foi disponibilizada no quadro de giz, mesmo não tendo identificado a informação sobre medida angular entre as forças envolvidas no sistema. Considerando apenas sua explicitação inicial, identificamos que seus erros consistiram na consideração de informação equivocada sobre a medida angular entre forças.

Para a questão 4, identificamos a mesma mobilização de regra-de-ação, conforme mostra a figura a seguir:

**Figura 50** – Registro escrito de E9 para a questão 4

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ .

$$|\vec{FR}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{FR}|^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$|\vec{FR}|^2 = 9 + 16 + 12$$

$$|\vec{FR}|^2 = 37$$

$$|\vec{FR}| = \sqrt{37}$$

$$|\vec{FR}| = 6,08,$$

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Apesar do tratamento realizado corretamente sobre o registro algébrico e obtenção de resultado certo, a representação é parcialmente identificável para a

situação, pois não abarca todas as características de um vetor força, apenas o valor numérico de sua intensidade. Além disso, mais uma vez E9 utilizou a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, no sentido de mobilização de uma regra-de-ação, cuja aplicação foi reconhecida segundo tradução das informações constantes na representação verbal escrita, de que consiste o enunciado da questão. Tal afirmação pauta-se, também, no seguinte trecho de entrevista:

**Professora (entrevista):** “E aqui, por que você usou a fórmula?

**E9:** Não sei, achei que estava pedindo. Eu usei só a fórmula mesmo.

**Professora:** Que informações você tinha para usar essa fórmula?

**E9:** Eu tinha duas forças e o ângulo”.

Conforme evidenciamos nesse trecho de entrevista, E9 baseou-se em informações de medida angular e valores numéricos de intensidades de duas forças aplicadas sobre um mesmo corpo de massa para reconhecer a aplicabilidade da expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, para solucionar a questão.

Para a questão 5, constatamos as mesmas características de atividades cognitivas representacionais e a mesma mobilização de regra-de-ação, conforme indica a produção escrita de E9 apresentada na figura seguinte:

**Figura 51** – Registro escrito de E9 para a questão 5

Resposta:

a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

$$|\vec{FR}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{FR}|^2 = 8^2 + 6^2 + 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 0$$

$$|\vec{FR}|^2 = 64 + 36 + 0$$

$$|\vec{FR}|^2 = 100$$

$$|\vec{FR}| = \sqrt{100}$$

$$|\vec{FR}| = 10$$

b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

*Fiz na fórmula.*

**Fonte:** informações coletadas pelos autores (2017)

Para o segundo item da questão, E9 respondeu:

**E9 (registro escrito):** “Fiz na fórmula”.

A figura 51 mostra a resolução de E9 para a questão 5, na qual o estudante realizou a atividade de tratamento e obteve resultado correto para o item (a) da questão. No item (b), o estudante apenas informou que utilizou a fórmula (expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos).

Em entrevista, E9 apenas reafirmou a aplicação da expressão matemática e o motivo pelo qual considerou sua aplicação:

**E9 (entrevista):** “Eu usei a fórmula porque tinha duas forças e o ângulo também.

**Professora:** *Aí pedia para explicar o significado do resultado obtido. O que significa esse resultado 10 aqui, nessa situação?*

**E9:** *Não sei. Coloquei só o que eu fiz na fórmula.*

**Professora:** *Então, imagina essa situação aqui. Você tem um barco e duas pessoas puxando, uma para um lado e outra para o outro. Esse barco sairá do lugar?*

**E9:** *Vai. Porque tem forças puxando ele, de um lado de 8 N e do outro lado de 6 N.*

**Professora:** *Para onde vai o barco, nesse caso?*

**E9:** *Não sei. Acho que vai para frente”.*

Além disso, E9 afirmou, no decorrer da entrevista, que apenas aplicou a fórmula, a qual foi fornecida no quadro de giz, e não explicou o significado do resultado que obteve para o contexto da questão. Inclusive, em sua produção escrita, conforme mostra a figura 51, a unidade de medida para a grandeza força não é evidenciada para o resultado obtido, o que indica não compreensão de seu significado.

Ao ser instigado a considerar apenas o contexto da representação figurativa do enunciado, E9 reconheceu as duas forças atuantes sobre o barco responsáveis por provocar o seu movimento, o qual ele acredita que será realizado para frente. Todas essas respostas são pautadas apenas na figura e em ideias intuitivas, uma vez que o estudante não se fundamentou em conceitos físicos para fornecer explicações.

Por fim, apresentamos a resposta de E9 para a questão sete da prova escrita:

**Figura 52** – Registro escrito de E9 para a questão 7

(A)

(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente,  $60^\circ$  entre si:

(B)

Resposta:

a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

*Não, porque o ângulo muda tudo.*

Fonte: informações coletadas pelos autores (2017)

Em seu registro escrito, E9 explicou:

**E9 (registro escrito):** “Não, porque o ângulo muda tudo”.

De acordo com a produção escrita apresentada por E9, identificamos que ele reconheceu que há diferenças entre as forças resultantes das situações (A) e (B), e que essa diferença se deve à medida angular entre os pares de força, a qual é distinta em cada uma das situações.

A seguir, apresentamos trecho de entrevista realizada com E9:

**E9 (entrevista):** “Eu coloquei que não é igual porque o ângulo muda.  
**Professora:** E onde você acha que seria mais fácil puxar esse barco?  
**E9:** No A.  
**Professora:** Por que?  
**E9:** Porque duas forças estão puxando no mesmo sentido”.

De acordo com os relatos de E9, fica evidente sua compreensão sobre a implicação do ângulo para a força resultante, de modo que as forças que estão no mesmo sentido (situação (A)) implicam em menor esforço para puxar o barco, do que na situação (B), na qual há formação de ângulo agudo entre o par de forças aplicadas sobre o mesmo barco.

Diante disso, constatamos que E9 manifestou teoremas-em-ação verdadeiros relacionados à força resultante em cada situação, em razão das diferenças de medidas angulares entre elas. Além disso, para fornecer suas respostas, identificamos que foi necessário que E9 realizasse traduções de informações pertinentes em cada uma das representações do enunciado (verbal escrita e figurativa), bem como integrasse essas informações na composição de seu discurso explicativo. Contudo, apesar de coerências nesse discurso, não há menções a conceitos físicos para explicar ou justificar suas respostas, as quais estão mais embasadas em ideias intuitivas do que científicas.

No quadro 28, sintetizamos as regras-em-ação e/ou teoremas-em-ação, assim como as atividades cognitivas representacionais reveladas nas produções de E9:

**Quadro 28** – Síntese de regras-de-ação/teoremas-em-ação e de atividades cognitivas representacionais de E9

PROVA ESCRITA E ENTREVISTA		
	Regras-de-ação / Teoremas-em-ação	Atividades Cognitivas Representacionais
<b>Q. 3</b>	<p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p> <p>2) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma direção e sentido, a força resultante, <math>\vec{F}_R</math>, é determinada pela soma dos valores numéricos de ambas as forças.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.</p> <p>2) Apresenta erros em suas produções.</p>
<b>Q. 4</b>	<p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.</p> <p>2) Não apresenta erros em sua produção.</p>
<b>Q. 5</b>	<p>1) Para duas forças, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, de mesma origem e que determinam entre si um ângulo <math>0 &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math>, a força resultante é determinada por <math> \vec{F}_R ^2 =  \vec{F}_1 ^2 +  \vec{F}_2 ^2 + 2 \cdot  \vec{F}_1  \cdot  \vec{F}_2  \cdot \cos \theta</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução sobre formas representacionais fornecidas no enunciado da questão, reconhecendo aplicabilidade de regras-de-ação memorizadas de situações familiares vivenciadas.</p> <p>2) Não apresenta erros em sua produção.</p>
<b>Q. 7</b>	<p>1) Dadas duas forças de mesma origem, <math>\vec{F}_1</math> e <math>\vec{F}_2</math>, o ângulo formado entre elas implica diretamente na <math>\vec{F}_R</math>.</p>	<p>1) Realiza atividade de tradução entre diferentes formas representacionais.</p> <p>2) Constrói representações identificáveis (registros de representação semiótica).</p> <p>3) Tenta integrar significações inerentes a diferentes formas representacionais.</p> <p>4) Não apresenta erros em suas produções.</p>

Fonte: dos autores (2018)

De acordo com as informações sintetizadas no quadro 28, a respeito de regras-de-ação/teoremas-em-ação, bem como de atividades cognitivas representacionais, verificamos explicitações de conhecimentos de E9 em níveis I e E-ii.

Para as questões 3, 4 e 5, o estudante E9 mobilizou como regra-de-ação a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos. Essa expressão se configurou como registro representacional algébrico parcialmente identificável nas questões 4 e 5, pois seu resultado forneceu apenas o valor numérico da intensidade da força resultante, não contemplando a orientação dessa força, cuja informação é necessária para sua caracterização. Na questão 3, essa mesma expressão se configurou como teorema-em-ação falso, conduzindo o estudante ao erro. Assim justificamos devido à sua fala durante a entrevista, em que forneceu explicação correta para a questão, ainda que não tenha obtido acertadamente o módulo da força resultante.

Sobre os registros algébricos apresentados em cada uma dessas questões, E9 realizou atividade de tratamento e obteve resultado incorreto para a questão 3, devido à medida do ângulo adotada, e correto para questões 4 e 5. Entretanto, para todas essas questões, o estudante não mostrou compreender os procedimentos realizados no tratamento da expressão matemática, bem como o significado do resultado obtido para o contexto de cada questão. A aplicabilidade da expressão foi reconhecida a partir da tradução de informações constantes nas representações constituintes dos enunciados das questões. Considerando os expostos, a explicitação em cada uma dessas questões foi categorizada no nível I.

Para a questão 7, a explicitação de conhecimentos de E9 foi categorizada no nível E-ii, pois, além de mobilizar teoremas-em-ação verdadeiros, o estudante traduziu informações das formas representacionais do enunciado e tentou integrar seus entendimentos na produção de uma representação verbal oral para explicitar suas compreensões. Nessa integração, evidenciamos a falta de abrangência de conceitos físicos para sustentar suas respostas, ainda que elas tenham sido coerentes para o contexto da questão.

No quadro 29, sintetizamos as características que nos conduziram às categorizações das explicitações de conhecimentos de E9, a respeito da composição vetorial de forças, nos níveis I e E-ii:

**Quadro 29** – Níveis de Explicitação dos conhecimentos explicitados por E9, segundo características evidenciadas em suas produções

Questão	Características	Nível de Explicitação
3	a) Mobilizou teorema-em-ação falso, apresentando erro em sua produção; b) Tentou traduzir e integrar diferentes formas representacionais.	E-i
4 e 5	a) Mobilizou regra-de-ação, sem manifestação de compreensão; b) Realizou tradução representacional, no sentido de identificar elementos do enunciado da questão e associá-los a alguma situação já vivenciada; c) Raramente apresentou erros em suas produções.	I
7	a) Explicitou suas compreensões por meio de representação verbal oral coerente, porém, não fundamentada em conhecimentos físicos; b) Traduziu e tentou integrar diferentes formas representacionais; c) Apresentou acertos em suas produções.	E-ii

Fonte: dos autores (2018)

#### 8.10 RESULTADOS DAS ANÁLISES POR QUESTÃO

Com o intuito de fornecer um panorama a respeito dos níveis de explicitação em que foram categorizados os conhecimentos explicitados por cada um dos estudantes, para cada uma das questões submetidas a procedimentos analíticos, organizamos o seguinte quadro:

**Quadro 30** – Apresentação geral dos níveis de explicitação categorizados por estudante e por questão

Estudante →	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Questão ↓									
3	E-iii	E-ii	E-ii	E-ii	N/A	N/A	N/A	E-i	E-i
4	E-iii	I	N/A	E-ii	I	I	I	I	I
5	E-iii	E-ii	E-ii	I	I	E-i	E-ii	I	I
7	E-iii	E-ii	E-ii	E-ii	E-ii	E-i	E-ii	E-ii	E-ii

Fonte: dos autores (2018)

Considerando o quadro 30, observamos que o estudante E1 foi o único a explicitar conhecimentos em nível E-iii, inclusive, para todas as questões. Dentre os demais estudantes, há predominâncias dos demais níveis, I E-i e E-ii, em que este último foi caracterizado, na maioria dos casos, como verbalizações coerentes para responder intuitivamente às situações propostas nas questões, não abrangendo conceitos científicos para justificar e consolidar as explicações.

O nível I foi predominante na questão 4, para a qual os estudantes apenas aplicaram a expressão matemática baseada na Lei dos Cossenos, sem manifestar compreensões relativas aos motivos de sua utilização, seus procedimentos e resultado obtido. Nota-se, nessa questão, um diferencial em relação às demais quanto às representações que contempla em seu enunciado. Essa questão é composta apenas por representação verbal escrita, enquanto que as demais questões que foram analisadas (3, 5 e 7), além dessa forma representacional, contemplam representações figurativas, configurando diagramas de forças, ilustrando vetores com origem em comum.

O nível E-i foi evidenciado em questões que estudantes mobilizaram teoremas-em-ação falsos, conduzindo-o ao erro em suas produções.

Quanto ao nível E-ii, esse esteve presente nas produções corretas, porém em que os estudantes não explicitaram coerentemente, sobretudo, em representação verbal oral ou escrita, as suas compreensões, ou em que essas explicações não foram fundamentadas em conceitos físicos.

Analisando os níveis de explicitação categorizados por aluno em relação a cada questão, observamos que, para a questão 3, temos o maior número de casos de estudantes que não apresentaram resolução por meio de registro escrito e/ou em entrevista, por isso, não se aplicou (N/A) o instrumento analítico para categorização de níveis de explicitação de conhecimentos. Evidenciamos, ainda, que para essa questão boa parte dos estudantes eram capazes de avaliar a representação figurativa fornecida na questão e, a partir disso, responder coerentemente o que aconteceria naquela situação, mesmo que, para isso, não se pautassem em conhecimentos científicos. Notamos, também, preocupação por boa parte dos estudantes em aplicar procedimentos matemáticos adotados em situações semelhantes em sala de aula, nos momentos de intervenção.

Essa mesma preocupação foi mais evidente na resolução da questão 4, o que explica a predominância de nível I. Como essa questão é constituída por enunciado

que abrange, unicamente, informações em representação verbal escrita, os estudantes buscaram traduzir informações numéricas que permitissem a aplicação da expressão matemática disponível no quadro de giz, realizando procedimentos, na maioria das vezes, corretos, porém sem mostrar compreender os procedimentos realizados e os resultados obtidos.

Na questão 5, também há muitos casos de estudantes que mobilizaram a expressão matemática, baseada na Lei dos Cossenos, na forma de regra-de-ação reproduzida sem compreensão. Por outro lado, teve aproximadamente a mesma quantidade de estudantes que explicitaram conhecimentos em nível E-ii, assim caracterizado por apresentarem explicações coerentes, porém, sem fundamentos em conceitos físicos.

Comparando as questões 4 e 5, evidenciamos que ambas solicitavam as características da força resultante em um determinado sistema, a partir de informações sobre módulo de duas forças aplicadas sobre um mesmo corpo de massa, possuindo mesma origem, de modo a determinar uma medida angular específica entre elas. Contudo, enquanto que o enunciado da questão 4 é constituído apenas por representação verbal escrita, o da questão 5 é composto por representação verbal escrita e representação figurativa, o que pode estar associado ao fato de boa parte dos estudantes terem conseguido formular explicações para o contexto da situação.

A questão 7, assim como a 5, também contempla representação verbal escrita e figurativa em seu enunciado, porém, solicitava do estudante apenas a interpretação de duas situações distintas de aplicação de forças sobre um mesmo corpo de massa, não sendo necessário realizar nenhum procedimento matemático para sua resolução. Para essa questão, prevaleceram as categorizações de explicitação de conhecimentos de nível E-ii, uma vez que muitas das respostas foram fornecidas de maneira correta e coerente para responder à questão, entretanto, sem abranger conceitos físicos para sustentar e justificar as explicações fornecidas.

De maneira geral, evidenciamos que as questões que contemplam mais de uma forma representacional contribuíram para que os estudantes fornecessem uma explicação mais próxima daquela almejada pelo professor, ou seja, mais coerente cientificamente. Além disso, questões que exigiram a realização de procedimentos matemáticos, muitas vezes, implicaram em reprodução mecânica. Para esses tipos

de questões, constatamos diversos casos de estudantes que desconsideraram o contexto da questão e se preocuparam apenas em aplicar corretamente a expressão matemática disponibilizada pela professora no quadro de giz. Tal situação foi comum, sobretudo, na resolução da questão 4, para a qual evidenciamos grande número de explicitações de conhecimentos em nível I.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do contexto de pesquisa em Ensino de Ciências e Educação Matemática, que vem concentrando esforços para compreender a constituição de significados e apropriação de conceitos pelos estudantes, e tendo como foco os aspectos cognitivos associados às representações de conceitos científicos e matemáticos, nosso trabalho contribui como pesquisa que busca apresentar alternativa para o cumprimento desses objetivos, investigando a apropriação conceitual atingida e relacionada ao nível de explicitação de conhecimentos de estudantes, a qual ocorre por meio de distintos registros, formas e modos representacionais, em momentos e domínios conceituais específicos da aprendizagem em Física.

Considerando o domínio conceitual de composição vetorial de forças e o momento final de aprendizagem em Física de estudantes do Ensino Médio de uma escola pública, objetivamos estruturar uma taxonomia que permitisse categorizar níveis de explicitação de conhecimentos construídos por esses estudantes. Nesse contexto, partimos do pressuposto de que existem níveis graduais de compreensão de um conceito, cujos mais altos níveis podem ser inferidos a partir da capacidade do estudante expressar suas compreensões de modo cada vez mais genuíno e coerente aos conhecimentos científicos. Considerando o contexto educacional científico e matemático, cogitamos que os conhecimentos podem permanecer implícitos nas atividades que o estudante realiza ou podem ser explicitados a partir de uma diversidade representacional, em níveis graduais de abstração.

Diante desse cenário, nos pautamos na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 1998; 2008; 2009a; 2009b; 2009c; 2017) para investigar invariantes operatórios, do tipo teoremas-em-ação, mobilizados por estudantes ao lidar com determinadas situações (no sentido de tarefas) em momentos específicos de aprendizagem em Física. Reconhecendo que a manifestação mais clara e precisa de invariantes operatórios ocorre de forma predicativa, mas que para chegar a esse nível o estudante depende de diversificados sistemas semióticos e de tomada de consciência a respeito de sua própria aprendizagem, buscamos em outros referenciais ideias convergentes aos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, de modo que aspectos teóricos oriundos de diferentes teorias

pudessem ser integrados, com o intuito de enriquecer e tornar mais claro um quadro teórico que nos permitisse cumprir com o objetivo almejado para esta tese.

Nesse direcionamento, buscamos em referenciais da Diversidade Representacional (LABURÚ; SILVA, 2011a; 2011b; PRAIN; WALDRIP, 2006; DUVAL, 2003; 2009a; 2009b; 2012, entre outros) subsídios teóricos para compreendermos as atividades cognitivas e de explicitação relacionadas às representações. Contudo, foi no modelo de Redescrição Representacional (KARMILOFF-SMITH, 1994; 2010) que encontramos o alicerce para estruturarmos um instrumento analítico capaz de abranger as teorias citadas, visando atender aos desafios representacionais característicos da aprendizagem em Física.

Após promover aulas de Física a uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, segundo a perspectiva da Diversidade Representacional, ou seja, abrangendo uma multiplicidade de formas, modos e registros de representação, aplicamos uma prova escrita contendo questões que abordaram a composição vetorial de forças, conteúdo explanado nas aulas propostas pela pesquisadora. Tendo delimitado os estudantes participantes de pesquisa e as questões submetidas à análise, seguindo procedimentos à luz da Análise Textual Discursiva (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2011), constituímos e aplicamos o instrumento analítico, caracterizado como uma reestruturação do modelo de Redescrição Representacional, objetivando contemplar as especificidades representacionais das aprendizagens em Física.

A partir das produções escritas e transcrições de entrevistas realizadas com os estudantes participantes da pesquisa, identificamos diferentes níveis de explicitação atingidos por eles para as diferentes questões analisadas.

Dentre os resultados obtidos, evidenciamos um único estudante que atingiu, para todas as questões, o mais alto nível de explicitação de conhecimentos (E-iii) e, portanto, de apropriação conceitual. Verificamos que ele realizou transformações internas e externas sobre diferentes representações produzidas por ele ou fornecidas pela própria questão, mobilizou teoremas-em-ação verdadeiros, coordenou representações de dentro e fora de uma mesma questão e, principalmente, integrou compreensões de maneira coerente e genuína para explicitar verbalmente, de forma oral e escrita, os seus conhecimentos.

Para as questões que exigiram apresentação de procedimentos de cálculo, evidenciamos a predominância de níveis de explicitação inferiores, I e E-i. O primeiro, associado à reprodução mecânica de procedimentos matemáticos, sem

manifestação de compreensão a respeito da aplicação da expressão matemática, dos procedimentos realizados e dos resultados obtidos. O segundo, atrelado à mobilização de teoremas-em-ação falsos, os quais conduziram os estudantes ao erro em suas produções.

Em questões que exigiram a interpretação, a explicação ou a justificativa de respostas, identificamos explicitações de conhecimentos de nível E-ii, caracterizados por mobilização de teoremas-em-ação verdadeiros, integrados às compreensões oriundas de tradução e transformações representacionais, constituindo discursos coerentes. Porém, os discursos desse nível se pautaram, sobretudo, em conhecimentos intuitivos, ao invés de serem fundamentados em conceitos físicos.

De maneira geral, a partir dos procedimentos analíticos que realizamos sobre registros escritos e entrevistas realizadas com os estudantes, consideramos que os resultados indicaram o potencial do instrumento analítico proposto para atingir ao objetivo para o qual ele foi projetado, ou seja, o de classificar, em níveis de explicitação, conhecimentos acerca de composição vetorial de forças que estudantes do Ensino Médio apresentam por meio de produção, de tratamento e de transformações de diversificadas representações relativas a esse conceito. Além disso, os procedimentos analíticos realizados foram fundamentais para delinear e revisarmos alguns critérios de sua constituição, o que nos permitiu fornecer maiores esclarecimentos às descrições de cada um dos níveis e fornecer, nesta tese, um diagrama geral de maneira mais clara se comparada à apresentada em Boni e Laburú (2018, p. 187).

Dentre os problemas encontrados no decorrer da pesquisa realizada podemos mencionar o fato de existirem poucas pesquisas na área de aprendizagem científica e matemática considerando a perspectiva teórica de Redescrição Representacional. Por outro lado, esse foi um dos fatos principais que nos permitiu constituir esta tese. Em relação aos procedimentos analíticos relacionados à aplicação do instrumento, uma das dificuldades que encontramos foi em relação ao número de aulas disponíveis para realizar a coleta das informações, sendo necessário solicitar, algumas vezes, tempo de aulas de outra disciplina. Também, encontramos resistência de alguns estudantes em participar das entrevistas e de alguns responsáveis em autorizar a utilização de produções de estudantes para a pesquisa, o que impactou na redução dos vinte e sete para nove estudantes considerados nos procedimentos analíticos desta pesquisa.

Destacamos que, com o estudo que promovemos, não estivemos, no momento, interessados em analisar o desenvolvimento ou evoluções conceituais, pois entendemos o processo de aprendizagem como longo, complexo e constituído por diversos fatores. Desse modo, para de fato compreender esse processo, seria necessária uma pesquisa longitudinal. Ainda, de forma alguma, buscamos fornecer uma visão simplista do processo de aprendizagem, cuja complexidade é ainda maior se considerarmos os desafios enfrentados no ambiente escolar, tais como o número excessivo de estudantes em uma turma, o programa curricular a ser cumprido e o tempo escasso para concluí-lo. Assim, o que buscamos foi fornecer um instrumento que auxilie na realização de pesquisas educacionais interessadas em investigar aprendizagens de estudantes em determinados conteúdos físicos e em momentos específicos.

Contudo, avistamos diversas possibilidades de estudos futuros, dentre os quais destacamos: i) o instrumento analítico proposto pode servir como alicerce para adaptação de instrumentos para atender a estudos interessados em investigar o desenvolvimento ou evoluções conceituais, a partir de pesquisas longitudinais; ii) o instrumento analítico foi desenvolvido no intuito de contribuir com pesquisas da área do Ensino de Física, mas pode ser reestruturado para avaliar aprendizagens em sala de aula, servindo ao professor como meio de identificação, descrição e análise da apropriação conceitual de estudantes, em momentos e domínios conceituais oportunos ao trabalho instrucional, auxiliando-o a identificar, de antemão, problemas relativos à apropriação do conhecimento, para que possa prever, elaborar e propor, em tempo hábil, alternativas educacionais para superar esses problemas; iii) o instrumento analítico pode ser utilizado para atender a pesquisas de cunho quantitativo; e, iv) considerando as proximidades entre aprendizagens em Física com as demais disciplinas científicas e a Matemática, o instrumento pode ser aplicado a domínios conceituais específicos dessas áreas do conhecimento, testando seus limites e potencialidades para atender às especificidades de cada área.

De maneira geral, ponderamos que o conhecimento a respeito do instrumento analítico proposto, inclusive, das convergências teóricas que o constitui, proporciona a professores e a pesquisadores da área de educação científica e matemática maiores informações a respeito do trabalho instrucional e, sobretudo, avaliativo. Tais abordagens teóricas sugerem que a análise de aprendizagens construídas por

estudantes incide, principalmente, sobre os conceitos subjacentes às suas produções e sobre os códigos que significam as diferentes representações e suas inter-relações. Tudo isso, dificilmente é explicitado de forma clara pelos estudantes e, por isso, o profissional da educação ou pesquisador precisa estar atento às “pistas” que são manifestadas por eles, a partir de seus procedimentos e discursos.

## REFERÊNCIAS

- AINSWORTH, S. The functions of multiple representations. **Computers & Education**, n. 33, p. 131-152, 1999.
- AUGÉ, P. S. **Restrições cognitivas e o desenvolvimento na história da ciência e no indivíduo das concepções sobre queda dos corpos e ação física**. 2014. Tese (Doutorado em Ciências, Sociedade e Educação) – Universidade Federal Fluminense, Faculdade de Educação, Niterói. 2014.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004.
- BITTAR, M. Contribuições da teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, p. 53-76, 2009.
- BLOWN, E.; BRYCE, T. G. K. Conceptual coherence revealed in multi-modal representations of astronomy knowledge. **International Journal of Science Education**, Abingdon, v. 32, n. 1, p. 31-67, 2010.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Trad.: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994.
- BONI, K. T.; LABURÚ, C. E. Conceitualização e metacognição em Ciências e Matemática: pressupostos teóricos de um instrumento analítico. **Amazônia**, Belém, v. 14, n. 29, p. 177-192, 2018.
- BONI, K. T.; LABURÚ, C. E.; CAMARGO FILHO, P. S. A Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional: Leituras Convergentes para a Educação Matemática e Científica. **Vidya**, Santa Maria, v. 38, n. 1, p. 75-90, 2018.
- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.
- BROUSSEAU, G. Introdução a um estudo das situações e dos campos conceituais. In: BROUSSEAU, G.; BRUN, J.; SCHUBAUER-LEONI, M. L. **Atividade humana e conceitualização**. Porto Alegre: UFRGS, 2008.
- BZUNECK, J. A. Conceito e funções dos esquemas cognitivos para a aprendizagem: implicações para o ensino. **Semina**, v. 12, n. 3, p. 142-145, 1991.
- CHANDLER, D. **Semiotics for beginners**. Oxford: Routledge, 2004.
- CULIOLI, A. La Linguistique: de l'empirisme au formel. In : **Pour une linguistique de l'énonciation. Opérations et représentations**. Paris: Ophrys, p. 9-46, 1990.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática**. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DEKENS, O. **Compreender Kant**. São Paulo: Edições Loyola, 2008.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Editora Papyrus, p.11-34, 2003.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. 6 ed. Campinas: Papyrus, 2009a.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009b.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad.: Moretti, M. T. **Revemat**, v.7, n.2, p. 266-297, 2012.

ECO, H. **Tratado geral de semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2003.

ERTMER, P.; NEWBY, T. The expert learning: strategies, self-regulated and reflective. **Instructional Sciencem**, v. 24, p. 01-24, 1996.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. In: PARKE, H. (Org.). **Contemporary readings in child psychology**. New York: McGraw Hill, p. 165-169, 1981.

FLAVELL, J. H.; WELLMAN, H. M. Metamemory. In: KAIL, R. V.; HAGEN, J. W. (Orgs.). **Perspectives on the development of memory and cognition**. Hillsdale: Erlbaum, p. 3-33, 1977.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A.. Do saber fazer ao saber dizer: uma análise do papel da resolução de problema na aprendizagem conceitual de Física. **Rev. Ensaio**, Belo Horizonte, v.5, n.1, p. 52-67, 2003.

JAKOBSON, R. **Essais de linguistique générale: Les fondations du langage**. Paris : Éditions de Minuit, 1978.

KARMILOFF-SMITH, A. **Más allá de la modularidad: la ciencia cognitiva desde la**

perspectiva del desarrollo. Versión española de: Juan Carlos Gómez Crespo e María Núñez Bernardos. Madrid: Alianza Editorial, 1994.

KARMILOFF-SMITH, A. Dos meta-processos ao acesso consciente: evidência a partir de dados metalinguísticos e de reparo produzidos por crianças. **Cadernos de Educação**, Pelotas, v. 35, p. 407-483, 2010.

KIM, J-O. **Étude des verbalisations metalinguistiques d'apprenants coréens sur l'imparfait et le passé composé em français**. 2003. Thèse (Doctorad en Language et Langues) – Université Paris III, École Doctorale 268 Language & Langues, Sorbonne. 2003.

LABURÚ, C. E.; BARROS, M. A.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações, aprendizagem significativa e subjetividade: três referenciais conciliáveis da educação científica. **Ciência & Educação**, v. 17, n. 2, p. 469-487, 2011.

LABURÚ, C. E.; SILVA, O. H. M. O laboratório didático a partir da perspectiva da multimodalidade representacional. **Ciência & Educação**, v. 17, n. 3, p. 721-734, 2011a.

LABURÚ, C. E.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16(1), p. 7-33, 2011b.

LEMKE, J. **Teaching all the languages of science**: words, symbols, images, and actions. [S. l.]: [s. n.], 2003. Disponível em: <http://www-personal.umich.edu/~jaylemlke/papers/barcelon.htm>. Acesso em: 18 nov. 2016.

LEMKE, J. The literacies of science. In: SAUL, W. (Org.). **Crossing borders in literacy and science instruction**: perspectives on theory and practice. Arlington: International Reading Association/National Science Teachers Association, p.33–47, 2004.

LOPES, J. B. **Aprender e ensinar física**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbekian; Fundação para a Ciência e a Tecnologia, 2004.

LORANDI, A; KARMILOFF-SMITH, A. Linguagem e cognição: Interfaces entre Linguística, Psicologia e Neurociências. **Letras de Hoje**, v. 47, n. 1, p. 6-16, 2012.

MANZINI, E. J. A entrevista na pesquisa social. **Didática**, São Paulo, v. 26/27, p. 149-158, 1991.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v.9, n.2, p. 191-211, 2003.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v.7, n.1, p. 7-29, 2002.

MORTIMER, E. F.; et al. Interações entre modos semióticos e a construção de significados em aulas de ensino superior. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte, v.16, n.3, p. 121-145, 2014.

MUNIZ, C. A. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, p. 37-52, 2009.

NICHOLSON, W. K. **Álgebra Linear**. 2. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

OLIVEIRA, R. M. L. **O que revelam os textos das crianças**: atividades metalinguísticas na escrita infantil. 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Linguística) – Universidade Federal do Ceará, Ceará. 2009.

PANNUTI, D. V. A redescrição representacional revisitada: o biológico e o cultural na aquisição do conhecimento humano. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE LETRAS E LINGUISTICA, 11., 2006, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: EDUFU, p. 854-862, 2006.

PIAGET, J. **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos: Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

PINHEIRO, T. F; PINHO-ALVES, J; PIETROCOLA, M. Modelização de variáveis: uma maneira de caracterizar o papel estruturador da Matemática no conhecimento científico. In: PIETROCOLA, M. (Org.). **Ensino de Física**: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora. Florianópolis: Editora da UFSC, p. 33-150, 2001.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2000.

PLAISANGE, E.; VERGNAUD, G. **As ciências da educação**. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

POINCARÉ, H. **O Valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres**: a nova cultura da aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POZO, J. I. **Aquisição de conhecimento**: quando a carne se faz verbo. Porto Alegre: Artmed Editora, 2005.

PRAIN, V.; WALDRIP, B. An exploratory study of teacher’s and students’ use of multi-modal representations of concepts in primary Science. **International Journal of Science Education**, Abingdon, v.28, n.15, p. 1843-1866, 2006.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: ALATORRE, S.; CORTINA, J.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (Eds.). **Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, México, v. 1, p. 2-21, 2006.

RADFORD, L. Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 1, p. 83-96, 2008.

RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Perceiving the general: the multisemiotic dimension of student's algebraic activity. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 38, n. 5, p. 507-530, 2007.

RADFORD, L.; EDWARDS, L.; ARZARELLO, F. Introduction: beyond words. **Educational Studies in Mathematics**, v. 70, n. 2, p. 91-95, 2009.

RUSSEL, T.; McGUIGAN, L. Promoting understanding through Representational Redescription: an exploration referring to young pupils' ideas about gravity. In: D. Psillos et al. (Eds.), **Science Education Research in the knowledge-based society**. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 277-284, 2003.

SEUFERT, T. Supporting coherence formation in learning from multiple representations. **Learning and Instruction**, n. 13, p. 227-237, 2003.

SUHOR, C. Towards a semiotics-based curriculum. **Journal of Curriculum Studies**, v.16, n.3, p. 247-257, 1984.

TESSEROLI, R. C. **Arcabouço para mapeamento do conhecimento do aluno baseado no modelo de redescrição representacional**. 2015. Dissertação (Mestrado em Informática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2015.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

TYTLER, R.; PRAIN, V.; PETERSON, S. Representational issues in students learning about evaporation. **Research in Science Education**, v.37, n.3, p. 313-331, 2007.

VALENTE, M. O.; et al. A metacognição. **Revista de Educação**, v.1, n.3, p. 47-51, 1989.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais. **Revista do Geempa**, Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, v.17, n.2, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, G. **Atividade humana e conceitualização**. Porto Alegre: Comunicação Impressa, 2008.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, p. 13-35, 2009b.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. **Human Development**, Basel, v.52, p. 83-94, 2009c.

VERGNAUD, G. **Piaget e Vygotsky em Gérard Vergnaud**: teoria dos campos conceituais TCC. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, G.; MOREIRA, M. A. **O que é aprender? O iceberg da conceitualização**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Paraná. 2007.

VOLÓSHINOV, V. **Marxismo e filosofia da linguagem**. São Paulo: Hucitec, 1992.

VUYK, R. **Overview and critique of Piaget's genetic epistemology 1965-1980**. London: Academic Press, 1981.

WARTHA, E. J.; REZENDE, D. D. B. Os níveis de representação no ensino de Química e as categorias da semiótica de Peirce. **Investigções em Ensino de Ciências**, v.16, n.2, p. 275-290, 2011.

WARTOFSKY, M. W. **Models**: Representation and the scientific understanding. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel, 1979.

WON, M.; YOON, H.; TREAGUST, D. F. Students' learning strategies with multiple representations: explanations of the human breathing mechanism. **Science Education**, v. 98, n. 5, p. 840-866, 2014.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. Trad.: Daniel Grassi. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – TERMO DE ANUÊNCIA



CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
*Programa de Pós-Graduação em Ensino de  
 Ciências e Educação Matemática*

### TERMO DE ANUÊNCIA

Declaramos para os devidos fins que estamos de acordo com a execução do projeto de pesquisa cujo tema é "***A Diversidade Representacional como estratégia de ensino para o desenvolvimento de invariantes operatórios no campo conceitual vetorial***", desenvolvido pela professora Keila Tatiana Boni, sob a orientação do professor Dr. Carlos Eduardo Laburú do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio dessa instituição.

Londrina, 19 de junho de 2017

  
 Fabiane Luzia Menezes  
 Diretora Auxiliar  
 RG.: 8.522.296-1

Diretor(a) do Colégio Estadual Professora Olymphia Morais de Tormenta  
 Londrina, PR

C. E. PROFª. OLYMPIA MORAIS TORMENTA <i>Ensino Fundamental, Médio e Profissional</i> Governo do Estado do Paraná Rua Rudolf keilhold, Nº173 Fone/Fax: (43) 3334-1901 Fone: (43) 3329-2744 CEP: 86.088-090 / Londrina -PR w.ldaolympiامتورmenta@seed.pr.gov.br
--

## APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO



CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
*Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e  
Educação Matemática*

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) senhor(a):

Gostaríamos de solicitar sua autorização para a participação de seu filho(a) na pesquisa cujo tema é: “***A Diversidade Representacional como estratégia de ensino para o desenvolvimento de invariantes operatórios no campo conceitual vetorial***”, que faz parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática e é orientada pelo prof. Dr. Carlos Eduardo Laburú da Universidade Estadual de Londrina. O objetivo da pesquisa é investigar o papel da Diversidade Representacional como estratégia de ensino para o desenvolvimento e para a manifestação de invariantes operatórios no ensino e na aprendizagem de conteúdos que envolvem o conceito de vetor. Para isso a participação de seu filho(a) é muito importante, e ela se daria da seguinte forma: ele(a), juntamente com os demais estudantes de sua sala de aula, participará de aulas ministradas pela pesquisadora (que serão gravadas), responderá questionários e será entrevistado.

Gostaríamos de esclarecer que a participação de seu filho(a) é totalmente voluntária, podendo o(a) senhor(a): recusar-se a autorizar tal participação, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa ou à de seu filho(a). **Esclarecemos, também, que as informações serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade sua e a de seu(sua) filho(a), não sendo identificados em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo. Todas as informações serão descartadas (incineradas) pela pesquisadora após o período de 5 (cinco) anos.**

Esclarecemos, ainda, que o(a) senhor(a) não pagará e nem será remunerado(a) por autorizar essa participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua autorização de participação.

Os benefícios esperados são difundir e promover as atribuições da Diversidade Representacional como estratégia para o ensino e a aprendizagem matemática e científica. Para este tipo de pesquisa, não há nenhum risco pré-estabelecido, portanto considera-se o risco mínimo para quem se submete à coleta de dados para esta investigação.

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos, poderá nos contatar: Keila Tatiana Boni, Rua Aparecida Turini Mendonça, 29, Jardim Quebec, Ibiporã - PR. Telefone/e-mail: (43) 99929-4486 – keilaboni@hotmail.com.

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue ao(à) senhor(a).

Londrina, \_\_\_\_\_ de junho de 2017.

Eu,..... (NOME POR EXTENSO DO RESPONSÁVEL PELO MENOR) declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa coordenada pela Professora Keila Tatiana Boni.

\_\_\_\_\_ Data:.....

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu,.....(NOME POR EXTENSO DO SUJEITO DE PESQUISA) declaro que recebi todas as explicações sobre esta pesquisa e concordo em participar da mesma, desde que meu pai/mãe (responsável) concorde com esta participação.

\_\_\_\_\_ Data:.....

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, KEILA TATIANA BONI, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

\_\_\_\_\_ Data:.....

Assinatura do pesquisador

**APÊNDICE C – PROVA ESCRITA****UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA**

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Aluno(a): \_\_\_\_\_

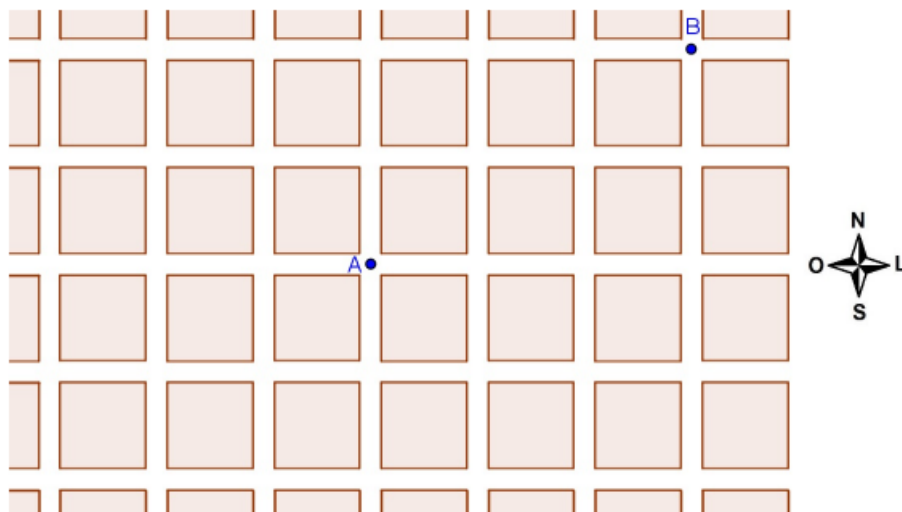
**PROVA****INSTRUÇÕES:**

- Resolva todas as questões da forma **mais completa possível**, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras o que fez para resolver cada questão.
- Não apague cálculos, esquemas, desenhos que utilizar na resolução da questão.
- Você pode utilizar o verso da folha se necessário ou solicitar mais folhas de papel.

**QUESTÃO 1**

Para facilitar a orientação em cidades é muito comum contar com equipamentos eletrônicos que recebem sinal de GPS (*Global Positioning System*), que é um sistema de radionavegação por satélite que fornece coordenadas precisas de posicionamento tridimensional e informações a respeito da navegação e do tempo. Com esse sinal é possível localizar endereços e traçar as melhores rotas para chegar a um local a partir de coordenadas geográficas.

Imagine-se na seguinte situação: você está em uma região desconhecida e encontra-se em um ponto A dessa região. Nesse local seu celular não pode receber sinal de GPS e você precisa chegar a um endereço (ponto B) dessa região desconhecida. Você pede informações a um desconhecido que te diz “*ande três quadras, vire na esquina e ande mais duas quadras*”.



**Figura 1** – Mapa da região em que estão localizados os pontos A e B

Fonte: Oliveira (2014, p. 08).

Analise e responda:

- a) Se você não tiver acesso ao mapa da figura 1, essas informações são suficientes para você chegar ao ponto B? Justifique a sua resposta.

---

---

---

---

---

- b) Na situação descrita, você pretende se deslocar de um ponto A até um ponto B. Na Física, *deslocamento* é uma grandeza. Essa grandeza é escalar ou vetorial? Explique.

---

---

---

---

---

- c) Deslocamento e trajetória não tem o mesmo significado na Física. Explique essa afirmação.

---

---

---

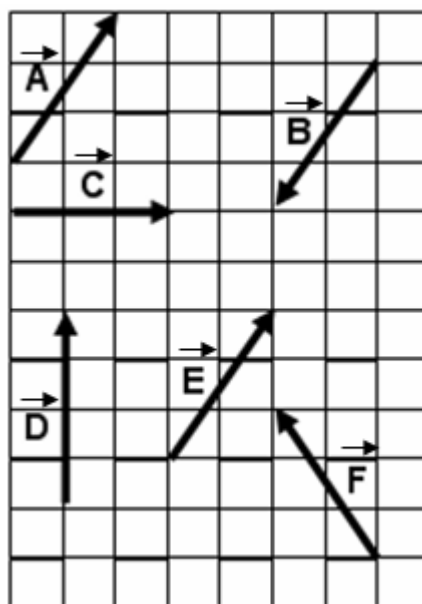
---

---

---

**QUESTÃO 2**

Dados os vetores:



Analise cada afirmativa a seguir, classificando-a como V (verdadeira) ou F (falsa) e justificando sua resposta:

(    )  $\vec{A} = \vec{E}$

Justificativa: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(    )  $\vec{A} = \vec{B}$

Justificativa: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(    )  $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

Justificativa: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(    )  $|\vec{C}| = |\vec{F}|$

Justificativa: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**QUESTÃO 3**

Dois garotos estão puxando um carrinho de supermercado para um lado enquanto um outro garoto puxa para o outro lado. Cada garoto aplica uma força específica, como mostra a figura 2:



**Figura 2** – Representação dos três garotos puxando um carrinho de supermercado

Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAg2I8AG/avaliacao-fisica-1-ano-forcas-leis-newton>>.

Acesso em: 20 jun 2017.

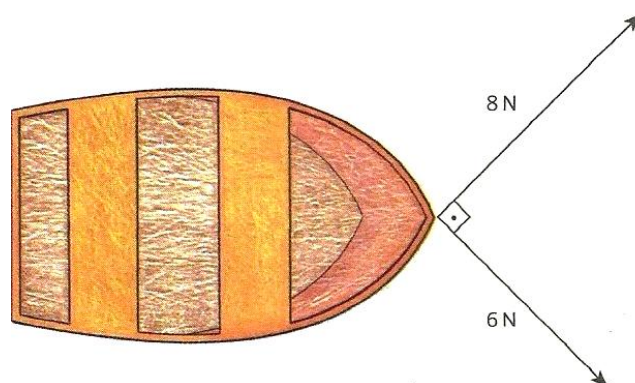
Qual é o valor (em módulo) e a orientação da força resultante nessa situação?

**QUESTÃO 4**

Sabendo que duas forças, uma de 3 N e uma de 4 N, tem a mesma origem, determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante quando as duas forças formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ .

**QUESTÃO 5**

A figura 3 representa dois pescadores puxando um barco, em que um dos pescadores puxa com uma força de 6 N e, o outro pescador, puxa com uma força de 8 N:



**Figura 3** – Ação de duas forças ao puxar um barco

Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAg2l8AG/avaliacao-fisica-1-ano-forcas-leis-newton>.

Acesso em: 20 jun. 2017.

Responda:

- a) Qual é o valor da força resultante exercida pelos dois pescadores para puxar o barco?

- b) Explique o significado do resultado obtido para a situação apresentada.

---

---

---

---

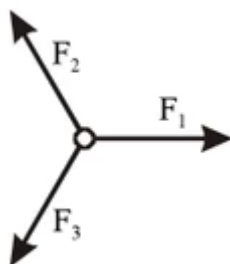
---

---

---

**QUESTÃO 6**

Uma partícula está submetida à ação de três forças coplanares:



Sabe-se que o corpo sobre o qual agem essas três forças está em equilíbrio.

- a) O que significa dizer que um corpo está em equilíbrio?

---

---

---

---

---

---

---

- b) Para que o corpo esteja em equilíbrio, qual relação deve existir entre as forças que agem sobre esse corpo?

---

---

---

---

---

---

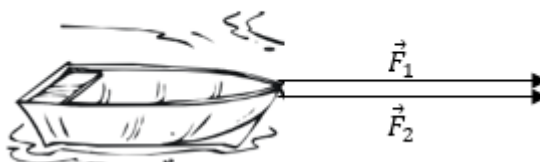
---

**QUESTÃO 7**

As figuras abaixo mostram um barco retirado de um rio por dois homens, em duas situações:

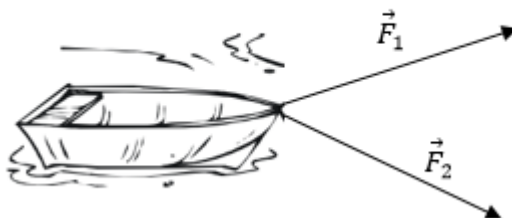
(A) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, paralelas entre si:

(A)



(B) são usadas duas cordas que transmitem ao barco forças de mesmo módulo, formando um ângulo de, aproximadamente,  $60^\circ$  entre si:

(B)



Responda:

- a) A força resultante da situação A será igual, em módulo, à força resultante da situação B? Justifique a sua resposta.

---

---

---

---

---

---

---