



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

BRUNA CRISTINA AMORIM

**ESTUDO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DEPENDENTE DO
TEMPO PARA UM GEOREATOR NATURAL**

BRUNA CRISTINA AMORIM

**ESTUDO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DEPENDENTE DO
TEMPO PARA UM GEOREATOR NATURAL**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Veríssimo Manoel de Aquino

Londrina
2011

BRUNA CRISTINA AMORIM

**ESTUDO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DEPENDENTE DO TEMPO
PARA UM GEOREATOR NATURAL**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Josefa Surek de Souza Oliveira
IFSC – Santa Catarina

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Veríssimo Manoel de Aquino
UEL – Londrina – PR

Londrina, ____ de _____ de 2011.

A Deus e a meus pais que
sempre estiveram presentes.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Veríssimo Manuel de Aquino pelos ensinamentos, apoio e incentivo a mim passados com tanta paciência.

Agradeço à minha mãe pelo carinho nos momentos difíceis, bem como a toda minha família que foi meu alicerce em todos estes anos.

Agradeço a Deus, por ter cuidado de mim e me ajudado a prosseguir em frente.

AMORIM, Bruna C. **Estudo da equação de difusão dependente do tempo para um georeator natural**. 2011. 126 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina

RESUMO

O campo magnético terrestre é uma das evidências da existência de uma fonte de energia no caroço central da Terra. Fontes convencionais de energia tais como transformação da energia potencial em calor, calor latente de cristalização, calor remanescente dos primórdios da formação da Terra, ou baseada em decaimento de núcleos pesados, têm o inconveniente de atuarem por um período de tempo relativamente curto e apresentarem uma variabilidade lenta em uma única direção no tempo. O campo magnético, no entanto, apresenta variabilidade em sua intensidade, revertendo inclusive sua direção, ainda que irregularmente, a determinados intervalos de tempo. Uma proposta mais interessante de fonte para o dínamo terrestre consiste de um geo-reator no centro da Terra. Esta proposta ganhou credibilidade com a descoberta de um reator natural em Oklo, no Gabão em 1972, o qual teve seu funcionamento possibilitado em tempos remotos, quando a porcentagem de U^{235} no urânio natural era mais elevada. Herndon, em 1979, propõe então a existência de um reator no centro da Terra trabalhando em regime regenerador, ou seja, queimando e produzindo U^{235} , como fonte de energia para o dínamo terrestre. Se tal reator apresentando uma potência variável funciona no centro da Terra, um fluxo de anti-neutrinos, também variável, proveniente desta região, pode a princípio ser detectado, corroborando tal hipótese. Neste trabalho, a partir de um modelo simples de difusão de nêutrons, são encontradas soluções da equação de difusão dependente do tempo para a densidade de nêutrons a partir de uma fonte súbita inicial para um sistema unidimensional. As propriedades do sistema para que os regimes subcrítico, crítico e supercrítico se estabeleçam são obtidas. O efeito acumulado de várias fontes súbitas independentes é calculado. Os cálculos em um cenário em que o sistema evolui em regime crítico por certo tempo, havendo então transição para um regime subcrítico são efetuados. A extensão das soluções para um reator esférico é efetuada e, a partir delas, o tempo necessário para que o número de nêutrons se estabilize no reator é obtido. Finalmente, são analisadas as condições de manutenção da criticalidade de um geo-reator tal como proposto por Herndon.

Palavras-Chave: Equação de difusão nêutrons. Geo-reator.

AMORIM, Bruna C. **Study of the diffusion equation time-dependent for a natural geo-reactor**. 2011. 126 f. Dissertation (Master in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina

ABSTRACT

The Earth's magnetic field is one of the evidences of an energy source in the inner core of the Earth. Conventional energy sources such as transformation of potential energy into heat, latent heat of crystallization, remaining heat of the early Earth's formation, or based on the decay of heavy nuclei, have the disadvantage of operating for a relatively short period of time and present a slow variability in only one direction in the time. The magnetic field, however, presents variability in its intensity, reversing its direction irregularly at certain time intervals. Nowadays, the most interesting proposal for explication of the Earth's dynamo is based in a nuclear fission reactor at the inner core. This proposal won credibility when it was found a natural geo-reactor at Oklo, in Gabon Republic, in 1972, which could to operate because the percentage of U^{235} into natural uranium was higher at the remotes times. Herndon, in 1979, then suggests the existence in the Earth's core of a regenerator reactor (i.e. a reactor burning and producing U^{235}) as an energy source for the terrestrial dynamo. If this reactor operates with a variable power, then the flux of antineutrinos it produces is also variable and, in principle, could be measured on Earth's surface, corroborating this hypothesis. In this work, from a simple model of neutron diffusion, we find the neutrons density, which is created through introduction of a sudden source at the system. This density is obtained by solving the diffusion equation time-dependent in one-dimension. Next, we analyzed the criticality conditions in the system. The cumulative effect of several sudden sources independent of each other is calculated. After, the cases in which the system changes of the critical condition for the subcritical are examined. So, we extend the equations for the three-dimensional case and we find the solutions for a spherical reactor and from them we calculate the time required for the neutrons number becomes stable. Lastly, we discuss the conditions for maintaining the criticality of a geo-reactor as proposed by Herndon.

Keywords: Neutrons equation diffusion. Geo-reactor.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Seções de choque para a fissão do U^{235} e do U^{238}	17
Figura 2 –	Ressonância de captura radioativa no U^{238}	19
Figura 3 –	Dinâmica dos nêutrons em um reator nuclear térmico.....	24
Figura 4 –	Subseqüentes colisões de um nêutron em um meio homogêneo e infinito.....	26
Figura 5 –	Espalhamento elástico de um nêutron por um núcleo observado do ponto de vista do referencial de laboratório e do referencial do centro de massa.....	28
Figura 6 –	Adição vetorial das velocidades do nêutron no referencial de laboratório e no referencial do centro de massa.....	29
Figura 7 –	Distribuição da massa do combustível.....	35
Figura 8 –	Distribuição das fontes.....	45
Figura 9 –	Densidade de nêutrons gerados por uma distribuição esférica de fontes em um sistema em que não ocorre absorção	48
Figura 10 –	Densidade de nêutrons gerados por uma distribuição esférica de fontes em um sistema com absorção	52
Figura 11 –	Densidade de nêutrons para a fonte colocada na posição $x_0 = L/3$	68
Figura 12 –	Densidade de nêutrons para a fonte colocada na posição $x_0 = L/2$	68
Figura 13 –	Número de nêutrons no caso crítico em função do tempo.....	69
Figura 14 –	Número máximo de nêutrons em função do tempo no caso crítico	70
Figura 15 –	Número total de nêutrons gerados no sistema no caso subcrítico para as fontes localizadas em $L/2$ com $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0,01$	72
Figura 16 –	Comparação entre o numero de nêutrons gerados com as fontes nas posições $L/2$ e $L/3$	73

Figura 17 – Número de nêutrons devido à introdução de uma segunda fonte súbita	78
Figura 18 – Comportamento da densidade no caso crítico com r_0 na origem.....	87
Figura 19 – Comportamento da densidade para fonte localizada em $r_0 = R/4$	88
Figura 20 – Comportamento da densidade para $t = 1$ e $t = 10$	89
Figura 21 – Número de nêutrons em função do tempo em um reator esférico	90
Figura 22 – Camadas da Terra	91
Figura 23 – Montagem “godiva” para urânio metálico e nêutrons rápidos	93
Figura 24 – Concentração dos principais “venenos” em um reator.....	108

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 ASPECTOS RELACIONADOS À DINÂMICA DE UM REATOR NUCLEAR	15
2.1 FATOR DE REPRODUÇÃO DE UM REATOR NUCLEAR BASEADO NA FISSÃO DO U^{235}	15
2.2 O CICLO DE NÊUTRONS EM UM REATOR	21
2.3 COMPRIMENTOS CARACTERÍSTICOS DO SISTEMA	25
2.4 FATOR DE REPRODUÇÃO CRÍTICO DE UM REATOR NUCLEAR TÉRMICO	33
3 A FUNÇÃO DE GREEN PARA A DIFUSÃO	36
3.1 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO	37
3.2 A FUNÇÃO DE GREEN DEPENDENTE DO TEMPO PARA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO EM UM MEIO HOMOGÊNEO E INFINITO	39
3.3 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UM SISTEMA CONTENDO UMA FONTE PONTUAL LOCALIZADA EM \vec{r}_0	41
3.3.1 A Função de Green Independente do Tempo	41
3.3.2 A Solução Dependente do Tempo	43
3.4 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UMA FONTE EXTENSA COM TAXA DE PRODUÇÃO CONSTANTE. CASO INDEPENDENTE DO TEMPO	44
3.5 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UMA FONTE EXTENSA E CONTÍNUA. SISTEMA DEPENDENTE DO TEMPO	46
3.6 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UMA FONTE EXTENSA EM UM MEIO ONDE HÁ ABSORÇÃO	49
4 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO INDEPENDENTE DO TEMPO PARA UM REATOR NUCLEAR	53
4.1 ASPECTOS DE UM REATOR EM REGIME CRÍTICO	54
4.2 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO INDEPENDENTE DO TEMPO PARA UM REATOR TÉRMICO	55
4.2.1 Solução da Equação para a Região Interna	55

4.2.2 Solução da Equação para a Região Externa.....	56
4.2.3 Condições de Contorno.....	57

5 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO PARA UMA REGIÃO FINITA

5.1 DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO	60
5.2 EVOLUÇÃO DO SISTEMA E CONDIÇÕES DE CRITICALIDADE	64
5.3 O REGIME CRÍTICO.....	65
5.3.1 Número de Nêutrons em Função do Tempo no Regime Crítico.....	66
5.3.2 Comportamento da Densidade e do Número de Nêutrons Dependendo da Posição da Fonte Inicial	67
5.4 O REGIME SUBCRÍTICO	70
5.5 O EFEITO DE UMA SEGUNDA FONTE SÚBITA	73
5.6 MUDANÇA NO REGIME DE DIFUSÃO.....	76
5.6.1 Soluções com Mudança de Regime sem Alterações nas Dimensões.....	76

6 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DEPENDENTE DO TEMPO COM SIMETRIA ESFÉRICA PARA UMA REGIÃO FINITA.....

6.1 ANÁLISE GERAL DA DIFUSÃO EM SISTEMAS ESFÉRICOS.....	79
6.2 EVOLUÇÃO TEMPORAL COM CONDIÇÕES INICIAIS ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS	81
6.3 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DEPENDENTE DO TEMPO	82
6.4 PARTÍCULA “SEMENTE” NA ORIGEM.....	84
6.5 COMPORTAMENTO DA DENSIDADE PARA TEMPOS GRANDES E NÚMERO TOTAL DE NÊUTRONS NO SISTEMA.....	88

7 O GEO-REATOR DO INTERIOR DA TERRA.....

7.1 MANUTENÇÃO DA CRITICALIDADE EM UM REATOR NUCLEAR	96
7.1.1 Reatividade.....	96
7.1.2 O Efeito da Temperatura	97
7.1.3 Queima do Combustível	103
7.2 PRODUÇÃO DE “VENENOS” EM UM REATOR NUCLEAR.....	104
7.2.1 Xenônio	104

7.2.3 Samário	109
7.3 TEMPOS CARACTERÍSTICOS DO GEO-REATOR	109
8 CONCLUSÕES	111
REFERÊNCIAS	114
APÊNDICE	116
APÊNDICE A – Densidade de nêutrons criada a partir de uma fonte extensa no caso dependente do tempo	117

1 INTRODUÇÃO

Existe um pequeno fluxo de calor proveniente do interior da Terra. Este fluxo pode variar dependendo do local onde é medido, mas uma estimativa freqüentemente encontrada para seu valor é da ordem de 60 mW/cm^2 [1]. Quando integrado sobre toda superfície terrestre, este fluxo faz resultar em uma taxa de emissão de calor que varia de 30 a 44 TW [2]. Acredita-se que parte desse calor seja devido ao decaimento radioativo dos elementos instáveis U , Th e K^{40} , contudo a origem deste calor não é totalmente conhecida. As estimativas das quantidades de elementos produtores de calor são feitas a partir de considerações cosmo-químicas e da análise do percentual destes elementos em meteoritos chondritos*. Todavia, estas estimativas levam a uma produção de calor de origem radiogênica que vai de 19 a 31 TW [1][7]. Segundo J. Marvin Herndon, a origem deste calor excedente seria um georeator natural localizado no centro da Terra.

Atualmente a porcentagem de U^{235} no urânio natural não é compatível com a manutenção de uma cadeia de fissão em regime sustentável. No entanto, a meia vida do U^{235} , menor que a do isótopo U^{238} , sugere que em tempos remotos esta porcentagem tenha sido bem maior. Uma reação em cadeia nestas condições envolveria a produção do combustível U^{235} a partir do U^{238} e o reator funcionaria em um regime realimentado [3] [5]. Em um cenário em que a porcentagem de U^{235} no urânio natural fosse de 23% Herndon, D.F. Hollenbach e Dennis A. Edgerley, com a utilização de simulações numéricas, verificaram a plausibilidade de tal hipótese. Em um regime de alta densidade no caroço central da Terra obtiveram que uma bolha com massa da ordem de 100 Kg de urânio seria suficiente para a manutenção de uma reação em cadeia em regime sustentável [4] [6]. Este trabalho dedica-se ao estudo da evolução temporal da difusão de nêutrons no suposto georeator.

A difusão de nêutrons produzidos no processo de fissão dos isótopos naturais de urânio em um determinado meio é um problema um tanto

* Meteoritos chondritos são o tipo mais comum de meteoritos rochosos (cerca de 85,7%). Métodos de datação radiométrica localizou-os com idade de aproximadamente 4,55 bilhões de anos, que é idade do Sistema Solar. Portanto, eles são tomados como exemplos prístinos da matéria que formou o Sistema Solar e, conseqüentemente, a Terra.

complexo. Em primeiro lugar surge a questão de que tais nêutrons são criados com energias, em média, superiores a 1 MeV . Nesta faixa de energias a seção de choque para fissão do U^{235} é muito baixa e predomina a fissão do U^{238} , mas em escala muito pequena. Por choques com o meio combustível ou moderador os nêutrons perdem energia passando por faixas ditas ressonantes onde o U^{238} absorve nêutrons sem ocorrência de fissão. Em todo o processo tanto o U^{235} , o U^{238} como o moderador podem absorver nêutrons nas reações (n, γ) sem provocar fissão. Somente após a termalização é que a fissão dos átomos U^{235} passa a desempenhar papel importante na dinâmica do processo. É importante salientar que as seções de choque para as várias reações possíveis nem sempre apresentam uma dependência com a energia dos nêutrons que possa ser descrita por uma expressão analítica. O próprio processo de termalização por choques com partículas do meio apresenta-se como de difícil descrição. Um segundo agravante é a seguinte questão: durante o processo existem grupos de nêutrons com diferentes energias, cada um difundindo-se segundo equações específicas. Apesar disso, com algumas idealizações, a difusão de nêutrons pode, de forma aproximada, ser descrita pela solução da equação de difusão. Para compreensão da dependência temporal de quantidades como a taxa de produção de elementos leves não fissionáveis, a taxa de emissão de energia e a taxa de emissão de anti-neutrinos produzidos na fissão, assim como para conhecer melhor a dinâmica do processo a partir de determinadas condições iniciais, necessita-se do conhecimento da solução dependente do tempo desta equação.

Esta dissertação, a partir de simplificações introduzidas no problema, tem como alvo compreender, através da solução dependente do tempo da equação de difusão obtida pelo método de Green, como evoluem quantidades importantes em um reator, assim como as próprias condições críticas para o seu funcionamento. Os resultados finais serão aplicados a um reator natural como o proposto por Herndon. Neste sentido, no capítulo 2, apresenta-se um resumo dos vários processos físicos que podem ocorrer com nêutrons em um reator, as definições de várias quantidades típicas de processos de difusão são dadas e as condições para existência de uma reação em regime sustentável, assim como as dimensões críticas de um reator, como encontradas na literatura, são apresentadas.

O capítulo 3 dedica-se ao estudo da equação de difusão. Inicialmente, para apresentação do método de Green, sem introduzir absorção ou criação de nêutrons por fissão, o problema da difusão simples em um meio homogêneo e infinito é tratado. As soluções para uma fonte pontual, súbita e contínua no tempo e para uma fonte esférica, finita e contínua no tempo são obtidas. O caso que envolve a absorção de partículas é então tratado. A coerência entre as soluções estacionárias e o limite das soluções t-dependentes quando o tempo vai ao infinito é verificada. No capítulo 4 deixa-se a dependência temporal de lado para, introduzindo a criação de nêutrons por fissão ao processo, em regime estacionário, estudar-se as maneiras de como chegar às dimensões críticas para o funcionamento de um reator. Nos capítulos 5 e 6 a solução dependente do tempo com criação e absorção de partículas tem sua vez. O capítulo 7 é devotado à aplicação dos resultados obtidos nos capítulos anteriores a um reator natural. Finalmente, no capítulo 8, as conclusões são apresentadas.

2 ASPECTOS RELACIONADOS À DINÂMICA DE UM REATOR NUCLEAR

O comportamento de um reator nuclear basicamente é governado pela dinâmica dos nêutrons no sistema. Portanto, um dos principais objetivos da teoria de reatores é descrever corretamente a distribuição dos nêutrons no espaço, energia e tempo. A densidade de nêutrons em função da posição e do tempo no reator pode ser encontrada, de forma aproximada, a partir da equação de difusão. Este assunto será abordado a partir do capítulo 3. Por hora, este capítulo tem como objetivo introduzir alguns conceitos que serão utilizados no decorrer do restante do trabalho.

2.1 FATOR DE REPRODUÇÃO DE UM REATOR NUCLEAR BASEADO NA FISSÃO DO U^{235}

A fissão nuclear, além de liberar grande quantidade de energia, que pode vir na forma de radiação ou de energia cinética dos fragmentos, também libera quantidade apreciável de nêutrons.

Considere um sistema que contenha uma determinada massa de urânio natural. Algumas fissões espontâneas certamente ocorrerão emitindo nêutrons em uma extensa faixa de energia, que pode chegar até 14 MeV [8] [9]. Estes nêutrons podem induzir novas fissões, sendo o número médio de nêutrons liberados pela fissão de cada núcleo, geralmente denotado pelo símbolo ν , sempre maior que dois, como mostra a tabela 1 [10]. Observe que o valor de ν aumenta com a energia do nêutron que induz a fissão.

Tabela 1 – Número médio de nêutrons de fissão em função da energia dos nêutrons que induzem a fissão.

Energia dos nêutrons (<i>MeV</i>)	$U^{233} + n$	$U^{235} + n$	$U^{238} + n$	$Pu^{239} + n$
Térmicos	2,51±0,02	2,44±0,02	_____	2,89±0,03
0,08	2,58±0,06	2,47±0,03	_____	3,05±0,08
1,3	2,69±0,05	2,61±0,09	_____	3,08±0,05
1,5	_____	2,57±0,12	2,65±0,09	_____
1,8	2,75±0,06	2,72±0,06	_____	3,28±0,06
2,0	_____	2,80±0,15	_____	_____
4,0	3,06±0,12	3,01±0,12	3,11±0,10	3,43±0,11
14,1	3,86±0,28	4,52±0,32	4,13±0,25	4,85±0,50

Fonte: (KAPLAN, 1978).

Se cada um desses nêutrons pudesse provocar novas fissões, ou seja, se cada nêutron liberado na fissão inicial fosse recapturado por um átomo de urânio e este átomo se fissionasse, então teríamos um sistema instável de reação em cadeia. Contudo, para que de fato ocorra a fissão em cadeia em um sistema real, contendo nêutrons e urânio, devemos considerar os fatores complicadores:

1. A fissão libera nêutrons com energias maiores que 1 *MeV*. Para nêutrons lentos, a seção de choque de fissão do U^{235} é grande. Porém, ela decai aproximadamente com a lei $1/v$ (exceto, é claro, nas regiões de ressonância), onde v é a velocidade do nêutron. Para nêutrons com energias maiores que 1 *MeV*, como mostra o gráfico da figura 1 [10], a seção de choque do U^{238} se torna maior que a do U^{235} ;

2. Nem todos os nêutrons oriundos da fissão primária irão ser capturados pelos núcleos de U^{238} (a fissão do U^{238} provocada por nêutrons provenientes de outras fissões é chamada de fissão rápida). É preciso ponderar que uma parte destes nêutrons irá escapar do sistema que contém a massa de urânio enquanto que outra parte será perdida através das reações de captura radioativa;

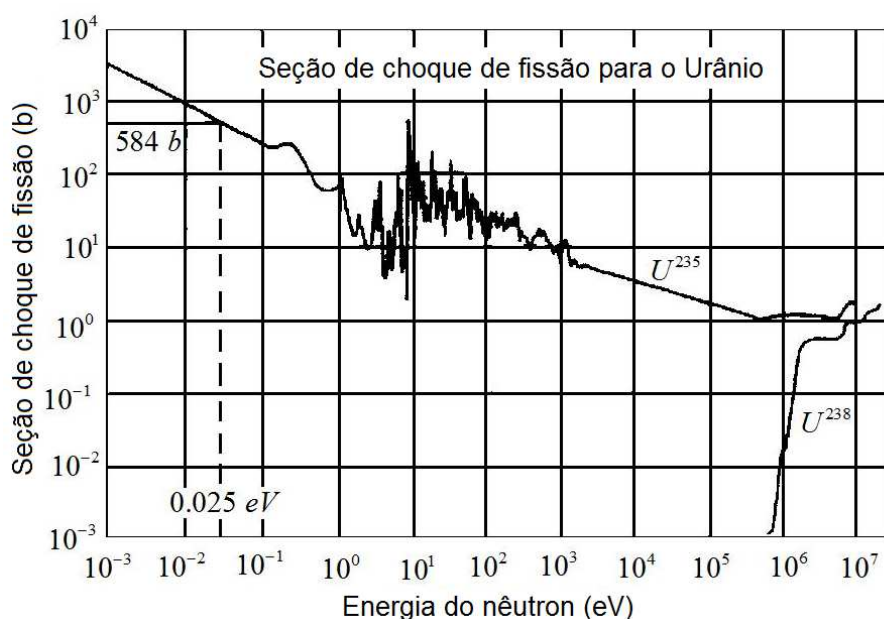
3. Os nêutrons que não sofrem captura radioativa e nem escapam do sistema podem colidir inelasticamente com o urânio, fazendo-os perder energia. Assim, apenas uma pequena parte dos nêutrons primários irá provocar novas fissões no U^{238} e quase todos os outros nêutrons serão deixados com energias abaixo do limiar para fissão rápida do U^{238} .

4. No decorrer do processo pelo qual os nêutrons perdem energia, eles podem sofrer captura radioativa pelos núcleos de U^{238} (o U^{238} possui muitas ressonâncias de captura radioativa para nêutrons com energias entre 10–100 eV, como mostra a figura 2 [10]).

O fator de reprodução k de um reator é definido como o número médio de nêutrons resultantes de um processo fissão que produz novas fissões. A teoria a respeito de reações em cadeia foi inicialmente desenvolvida pelos físicos soviéticos Yakov Zel'dovich e Julii Khariton. Eles mostraram que existem três possibilidades para o valor de k :

- $k < 1$: *Subcrítico* – a reação em cadeia não se sustenta;
- $k = 1$: *Crítico* – a reação em cadeia se torna estável;
- $k > 1$: *Supercrítico* – a reação em cadeia se torna instável.

Figura 1 – Seções de choque para fissão do U^{235} e do U^{238} .



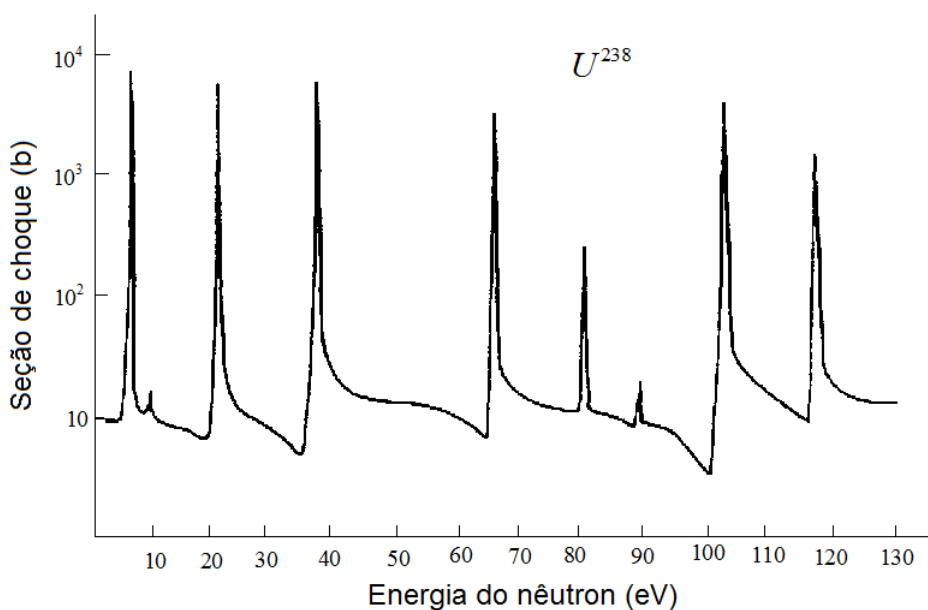
O número de nêutrons que escapam da região de fissão é proporcional a S , a superfície do reator. Por outro lado, o número de nêutrons formados é proporcional ao seu volume V . Sendo assim, a razão S/V fornece a probabilidade de escape dos nêutrons em relação ao tamanho do reator. Logo, se uma região esférica com raio maior que um, V aumenta de forma mais rápida que S . Portanto, de maneira geral, quanto maiores as dimensões do reator (independentemente da sua forma), maior será a probabilidade de que nêutron permaneça dentro dele. O tamanho mínimo de um reator para o qual a reação em cadeia passa a ser favorável é chamado de *tamanho crítico*. Da mesma forma, existe uma massa mínima de combustível que torna possível a reação. Essa massa é denominada *massa crítica*. Vamos considerar o balanço do número de nêutrons em um reator nuclear térmico (reatores térmicos são reatores baseados na fissão do U^{235} por nêutrons térmicos). Sendo σ_f a seção de choque para fissão do urânio no reator, σ_a a sua seção de choque de absorção, desprezando-se perdas para o meio, a probabilidade relativa de um nêutron provocar a fissão é:

$$P = \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_a}. \quad (2.1)$$

Dessa forma, no caso em que apenas o urânio é responsável pela absorção (seja ela seguida de fissão ou não) a relação entre o número de nêutrons de determinada geração no reator nuclear (N) e o número de nêutrons da geração seguinte (N') é:

$$N' = N \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_a} \right) \nu = N\eta. \quad (2.2)$$

Figura 2 – Ressonância de captura radioativa no U^{238} .



Na equação (2.2) η é a probabilidade relativa de um nêutron provocar fissão vezes o número médio de nêutrons liberado na fissão de um único átomo. Esta equação seria válida em um situação idealizada, isto é, para um reator homogêneo e infinito, no qual poderia ser desprezado o escape de nêutrons das regiões do reator e eliminar-se a absorção de nêutrons por quaisquer outros núcleos presentes no sistema que não sejam o urânio, pois da forma como foi proposta, a equação esta levando em conta que apenas o urânio é responsável pela absorção de nêutrons, mas, na prática, a absorção pode ocorrer por outros núcleos, tais como os núcleos dos materiais que formam o próprio reator.

Em reatores baseados na fissão do U^{235} costuma-se empregar um material de pequeno peso atômico na região em que ocorre a difusão dos nêutrons. Este material, chamado de moderador, tem a finalidade de colidir com os nêutrons, fazendo-os perder energia, aumentando assim a probabilidade de fissão. Ainda que bons moderadores tenham uma seção de choque de absorção de nêutrons pequena, em cálculos mais rigorosos ela não pode ser desprezada. Dessa forma, em um sistema real, devemos considerar a absorção de nêutrons tanto pelo material do moderador, quanto pelos núcleos dos materiais que compõem o reator.

O urânio natural corresponde a 0,72% de U^{235} e 99,28% de U^{238} . As seções de choque para a fissão e para absorção do U^{235} e do U^{238} para nêutrons térmicos em barns ($1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$) são dadas na tabela 2. O U^{238} não pode se fissionar com nêutrons térmicos, portanto sua seção de choque de fissão térmica é zero.

Tabela 2 – Seções de choque do urânio para nêutrons térmicos

Núcleo	$\sigma_f(b)$	$\sigma_a(b)$
U^{235}	584	97
U^{238}	0	2,75
Urânio natural	4,20	3,43

Fonte: KRANE (1988 [10]).

As seções de choque de fissão e absorção do urânio natural, necessária para calcular a probabilidade dada por (2.1) são encontradas através das relações (2.3) e (2.4):

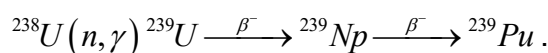
$$\sigma_f = \frac{0,72}{100} \sigma_f^{235} + \frac{99,28}{100} \sigma_f^{238} = 4,20b \quad (2.3)$$

$$\sigma_a = \frac{0,72}{100} \sigma_a^{235} + \frac{99,28}{100} \sigma_a^{238} = 3,43b. \quad (2.4)$$

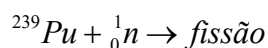
Como veremos posteriormente, um reator nuclear térmico, utilizando urânio natural como combustível, não pode sustentar uma reação em cadeia em regime estacionário.

2.2 O CICLO DE NÊUTRONS EM UM REATOR

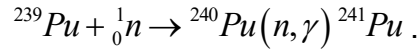
Nesta seção vamos considerar o ciclo de nêutrons em um reator que contenha uma determinada massa de urânio natural, na presença de algum material moderador. Nosso objetivo é, portanto, a partir de uma certa quantidade inicial de nêutrons, encontrar o número final de nêutrons que efetivamente são capazes de dar continuidade ao processo de fissão em cadeia, levando-se em conta todos os eventos que podem ocorrer em um reator. Começaremos chamando de ν a quantidade inicial de nêutrons, os quais podem ser oriundos, por exemplo, de uma fissão espontânea de um átomo de urânio. Conforme já foi discutido anteriormente, a fissão libera nêutrons com um amplo espectro energético e que o U^{238} pode se fissionar com nêutrons de altas energias. Assim, uma fração destes nêutrons pode causar a fissão rápida do U^{238} , liberando mais nêutrons para o reator. Indicaremos por $\nu\varepsilon$ o número de nêutrons resultantes da fissão do U^{235} e da fissão rápida do U^{238} livres para se difundir pelo reator (ε é chamado de fator de fissão rápida, sendo ligeiramente maior que a unidade). Nem todos estes nêutrons alcançarão o moderador. Uma fração l_f escapará antes de atingi-lo. Dos $\nu\varepsilon$ nêutrons presentes, sobrarão uma quantidade $\nu\varepsilon(1-l_f)$ para ser ralentada, enquanto que $\nu\varepsilon l_f$ nêutrons rápidos escaparão da região do reator. Quando um nêutron é absorvido pelo U^{238} , existe tanto a probabilidade do átomo se fissionar, quanto a probabilidade dele se converter em átomo de ^{239}Pu através da reação:



Dessa forma, podemos observar que certa quantidade de plutônio é sempre acumulada em reatores que contenham ^{238}U . O plutônio é um isótopo físsil, que pode sofrer as reações adicionais:



ou



Conseqüentemente, conforme pode ser observado, o ${}^{239}\text{Pu}$ nem sempre contribui com a reação em cadeia. Contudo, como estamos considerando apenas a fissão provocada por átomos de urânio, não levaremos adiante a análise da contribuição do ${}^{239}\text{Pu}$. As reações nas quais o U^{238} captura um nêutron para formar U^{239} e, conseqüentemente, o plutônio, são chamadas de reações de ressonância de captura radioativa e as designaremos por p . Assim, dos nêutrons que atingirem o moderador, uma parcela $\nu\varepsilon(1-l_f)p$ pode ser ralentada e a parcela restante, $\nu\varepsilon(1-l_f)(1-p)$, será capturada pelo U^{238} para formar o U^{239} .

Mesmo depois de moderados, os nêutrons podem ser absorvidos sem causar fissão (absorção pelos materiais que compõem o reator) ou escapar do sistema. Indicando a fração que escapa depois da moderação por l_t , o número de nêutrons lentos que escapa é então $\nu\varepsilon(1-l_f)pl_t$ e restam $\nu\varepsilon(1-l_f)p(1-l_t)$ nêutrons térmicos. Chamando de f a fração de nêutrons térmicos absorvidos pelo urânio, o número de nêutrons que pode causar fissão se reduz a $\nu\varepsilon(1-l_f)p(1-l_t)f$ (f é conhecida como fator de utilização térmica). É importante lembrar que apenas uma parte dos nêutrons térmicos absorvidos pelo urânio irá causar fissão. Assim, considerando a probabilidade dada por (2.1), o número de nêutrons produzidos pela fissão inicial do urânio e que pode causar novas fissões é dado por:

$$k = \nu\varepsilon(1-l_f)p(1-l_t)f \left[\frac{\sigma_f(U)}{\sigma_a(U) + \sigma_f(U)} \right] = \eta\varepsilon(1-l_f)p(1-l_t)f . \quad (2.5)$$

É usual escrever k na forma:

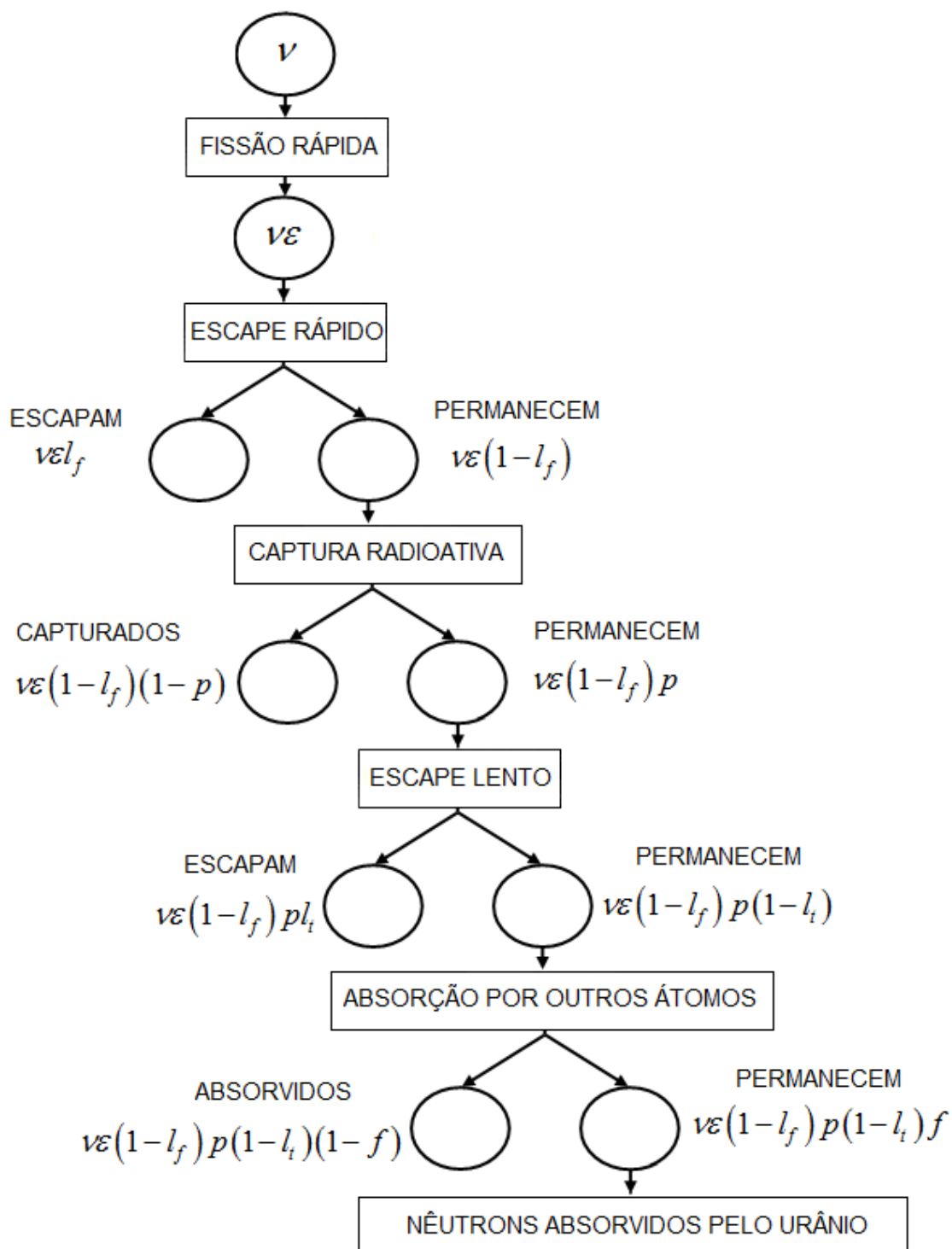
$$k = k_\infty(1-l_f)(1-l_t), \quad (2.6)$$

onde:

$$k_{\infty} = \eta \epsilon p f \quad (2.7)$$

representa o fator de multiplicação de um reator infinito, no qual pode ser desprezado o escape de nêutrons antes e depois da moderação. O diagrama da figura 3 esquematiza os vários processos apresentados.

Figura 3 – Dinâmica dos nêutrons em um reator nuclear térmico



2.3 COMPRIMENTOS CARACTERÍSTICOS DO SISTEMA

Os nêutrons podem interagir com os núcleos de várias maneiras, por isso é útil descrevermos as diferentes interações em termos das seções de choque:

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_i + \sigma_\gamma + \sigma_f + \dots \quad (2.8)$$

onde σ_t é a seção de choque total, σ_s é a seção de choque para espalhamento elástico, σ_i é a seção de choque para espalhamento inelástico, σ_γ é a seção de choque para captura radioativa e σ_f é a seção de choque de fissão. O livre caminho médio percorrido pelos nêutrons entre uma colisão e outra é inversamente proporcional a seção de choque de interação dos nêutrons com os núcleos:

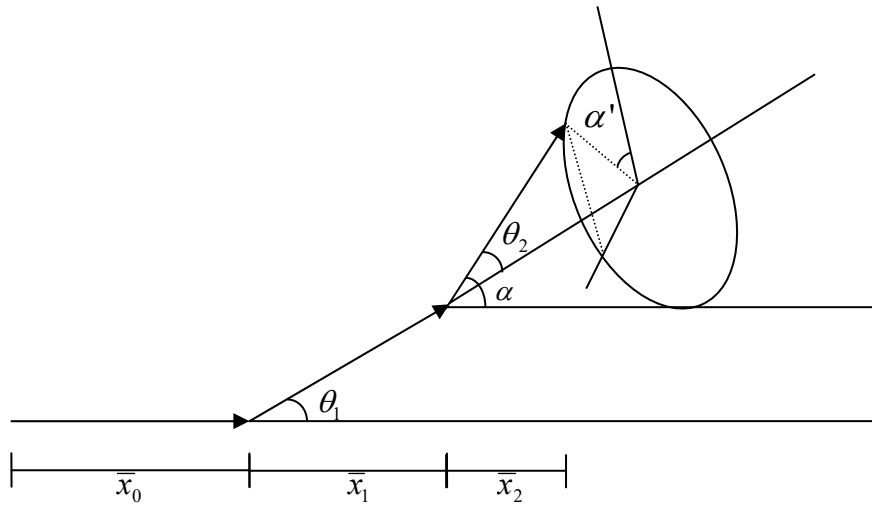
$$\lambda_r = \frac{1}{\sigma_r N} = \frac{1}{\Sigma_r}, \quad (2.9)$$

onde λ_r e Σ_r são o livre caminho médio e a seção macroscópica da reação em questão e N é a concentração dos núcleos. Para uma mistura homogênea dos elementos X e Y, cujas concentrações são N_X e N_Y átomos/cm³, a seção de choque macroscópica é:

$$\Sigma_r^M = \Sigma_r^X + \Sigma_r^Y = N_X \sigma_r^X + N_Y \sigma_r^Y. \quad (2.10)$$

Vamos levar em conta o efeito da distribuição angular do movimento do nêutron para mostrar que o caminho percorrido por ele entre uma colisão e outra pode ser maior ou menor dependendo do tamanho do núcleo espalhador. Para facilitar a análise, suporemos que a energia do nêutron não muda de uma colisão para outra e que o meio é homogêneo, infinito e, a princípio, não absorvedor. Considere, portanto, o desenho da figura 4.

Figura 4 – Subseqüentes colisões de um nêutron em um meio homogêneo e infinito.



O nêutron é injetado no sistema e se move, em média, uma distância $\bar{x}_0 = \lambda_s$, onde λ_s é o livre caminho médio de espalhamento. Após a primeira colisão, o nêutron se desvia de sua direção inicial por um ângulo θ_1 e viaja a distância λ_s antes do segundo espalhamento. A quantidade \bar{x}_1 é o valor médio da projeção do espalhamento na direção inicial:

$$\bar{x}_1 = \overline{\lambda_s \cos \theta_1} = \lambda_s \bar{\mu}, \quad (2.11)$$

onde $\bar{\mu}$ é valor médio do cosseno do ângulo de espalhamento. Após a segunda colisão o nêutron se desvia por um ângulo θ_2 em relação à direção anterior. Na figura chamamos de α' o ângulo de rotação entre a direção do terceiro livre caminho médio e o plano do movimento anterior e de α o ângulo entre a direção do nêutron após a segunda colisão e a direção inicial do movimento. A projeção do terceiro livre caminho médio de espalhamento na direção original é então dada por:

$$x_2 = \lambda_s \cos \alpha. \quad (2.12)$$

Usando conceitos de trigonometria pode-se demonstrar que:

$$\cos \alpha = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \cos \alpha' . \quad (2.13)$$

Sendo todos valores de α' igualmente prováveis, o valor médio do segundo termo da expressão (2.13) é nulo, de forma que:

$$\bar{x}_2 = \overline{\lambda_s \cos \alpha} = \overline{\lambda_s \cos \theta_1 \cos \theta_2} = \lambda_s \bar{\mu}^2 . \quad (2.14)$$

Assim, para a n-ésima colisão obtemos:

$$\bar{x}_n = \lambda_s \bar{\mu}^n \quad (2.15)$$

e o nêutron terá viajado uma distância dada aproximadamente por:

$$\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots = \lambda_s + \lambda_s \bar{\mu} + \lambda_s \bar{\mu}^2 + \dots = \frac{\lambda_s}{1 - \bar{\mu}} . \quad (2.16)$$

A quantidade acima é conhecida como livre caminho médio de transporte e denotada por λ_{tr} :

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{(1 - \overline{\cos \theta})} = \frac{1}{N \sigma_s (1 - \overline{\cos \theta})} = \frac{1}{N \sigma_{tr}} , \quad (2.17)$$

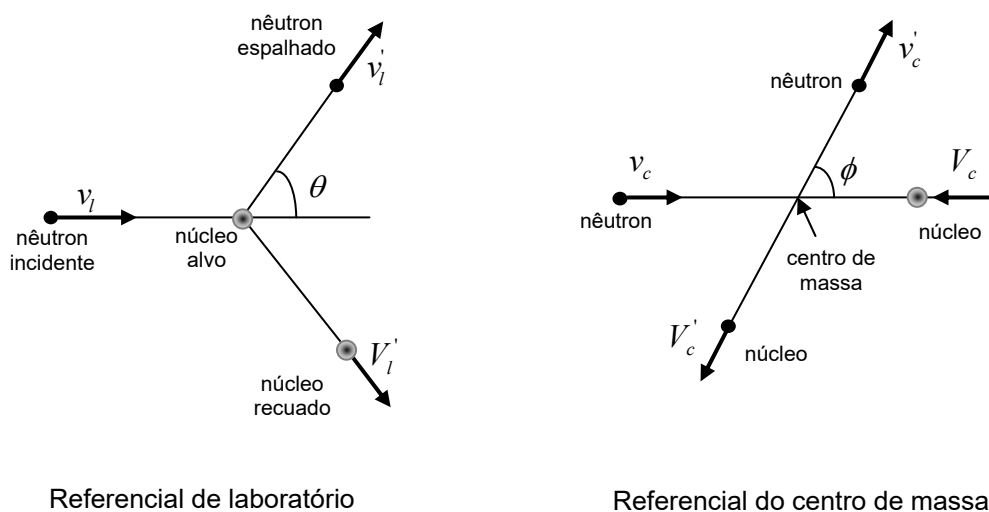
onde $\sigma_{tr} = \sigma_s (1 - \overline{\cos \theta})$ é a seção de choque de transporte.

Os nêutrons no reator perdem energias de duas formas principais: colisões elásticas e colisões inelásticas. As colisões inelásticas são responsáveis pela maior parcela da perda de energia. Contudo, este tipo de espalhamento ocorre apenas quando a energia dos nêutrons é maior que 1 MeV e se torna praticamente desprezível para nêutrons de baixa energia. Os nêutrons podem perder muita energia em apenas uma única colisão inelástica, de maneira que o intervalo de tempo no qual eles permanecem com energias acima do limiar para a colisão inelástica se torna muito pequeno quando comparado com o intervalo de tempo no

qual a principal forma de perda de energia se dá através de colisões elásticas, as quais são mais eficientes quando a energia dos nêutrons é menor que 1 MeV . Por outro lado, devemos observar que, embora a colisão elástica seja muito pouco eficiente para nêutrons enérgicos, ela ocorre em todas as faixas de energia.

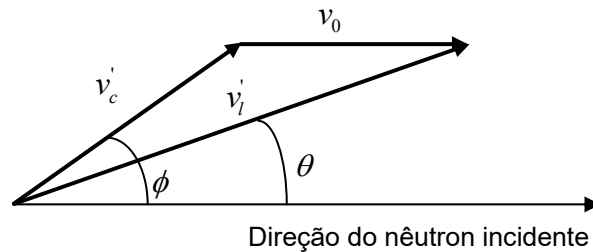
O diagrama da figura 5 esquematiza a colisão elástica do nêutron com um núcleo. Do ponto de vista de um observador no referencial de laboratório, temos o nêutron se movendo em direção ao núcleo com uma velocidade inicial v_i . Após a colisão, o nêutron se desvia por um ângulo θ em relação à direção inicial e sua velocidade passa a ser v_i' . O núcleo, que inicialmente se encontrava em repouso, adquire uma velocidade que chamaremos de V_i' . Por outro lado, do ponto de vista de um observador localizado no referencial do centro de massa do sistema, o nêutron se move em direção ao núcleo com velocidade v_c e o núcleo se move em direção ao nêutron com velocidade V_c . Após a colisão, a direção do nêutron faz um ângulo ϕ com sua direção inicial e a velocidade do nêutron e do núcleo passam a ser respectivamente v_c' e V_c' .

Figura 5 – Espalhamento elástico de um nêutron por um núcleo observado do ponto de vista do referencial de laboratório e do referencial do centro de massa.



No referencial do centro de massa o momento deve ser zero antes e depois da colisão, o que torna as coisas consideravelmente mais simples, visto que estamos tratando de colisões elásticas, as quais têm como característica conservar a energia cinética total do sistema. Como resultado disso, para um observador localizado neste referencial, o efeito da colisão elástica é apenas uma mudança nas direções das velocidades das partículas, mas não nas suas magnitudes. A figura 5 mostra um diagrama vetorial relacionando a velocidade do nêutron no referencial de laboratório e no referencial do centro de massa.

Figura 6 – Adição vetorial das velocidades do nêutron no referencial de laboratório e no referencial do centro de massa.



As velocidades do nêutron nos dois referencias estão relacionadas através da equação:

$$\vec{v}'_c = \vec{v}'_l - \vec{v}_0. \quad (2.18)$$

Da figura podemos observar que:

$$v'_l \sin \theta = v'_c \sin \phi \quad (2.19)$$

e

$$v'_l \cos \theta = v_0 + v'_c \cos \phi. \quad (2.20)$$

A velocidade do centro de massa é dada por:

$$v_0 = \frac{m}{m+M} v_l \quad (2.21)$$

e a velocidade do nêutron no centro de massa do sistema pode ser escrita em termos da sua velocidade no sistema de laboratório com auxílio da equação (2.18):

$$v_c = v_l - \frac{m}{m+M} v_l = \frac{M}{m+M} v_l. \quad (2.22)$$

Da equação (2.20) temos que:

$$\cos \theta = \frac{v_0 + v'_c \cos \phi}{v'_l}. \quad (2.23)$$

Utilizando a lei dos cossenos:

$$v'_l = \sqrt{(v'_c)^2 + v_0^2 + 2v'_c v_0 \cos \phi}. \quad (2.24)$$

Como já mencionado, no espalhamento elástico no centro de massa o módulo das velocidades do nêutron e do núcleo não mudam, assim, fazendo $v'_c = v_c$ na equação acima, chamando $A = M/m$ e juntando as equações (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24) obtemos:

$$\cos \theta = \frac{1 + A \cos \phi}{\sqrt{A^2 + 1 + 2A \cos \phi}}. \quad (2.25)$$

Na realidade, a quantidade que devemos encontrar é o valor médio do cosseno do ângulo de espalhamento no referencial de laboratório. Este valor é dado pela integral:

$$\overline{\cos \theta} = \frac{1}{\sigma_s} \int_{4\pi} \sigma_s(\theta) \cos \theta d\Omega. \quad (2.26)$$

Usando $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ na equação acima:

$$\overline{\cos \theta} = \frac{2\pi}{\sigma_s} \int_0^\pi \sigma_s(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (2.27)$$

Podemos relacionar as distribuições angulares dos nêutrons espalhados nos dois referenciais observando que o número de nêutrons que emergem num determinado ângulo sólido deve ser igual em ambos. Assim:

$$\sigma_s(\theta) d\Omega(\theta) = \sigma_s(\phi) d\Omega(\phi) \quad (2.28)$$

ou

$$\sigma_s(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \sigma_s(\phi) 2\pi \sin \phi d\phi \quad (2.29)$$

Portanto:

$$\overline{\cos \theta} = \frac{2\pi}{\sigma_s} \int_0^\pi \cos \theta \sigma_s(\phi) \sin \phi d\phi. \quad (2.30)$$

Se o espalhamento é isotrópico no referencial do centro de massa (tanto um tratamento teórico detalhado quanto os resultados experimentais mostram que o espalhamento é isotrópico no referencial do centro de massa se a energia do nêutron é menor que 10 MeV [8][11]), então $\sigma_s(\phi) = \sigma_s/4\pi$ e a equação fica:

$$\overline{\cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \theta \sin \phi d\phi. \quad (2.31)$$

Substituindo (2.25) em (2.31):

$$\overline{\cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1 + A \cos \phi}{\sqrt{A^2 + 1 + 2A \cos \phi}} \sin \phi d\phi. \quad (2.32)$$

A integral acima fornece:

$$\overline{\cos \theta} = \frac{2}{3A}. \quad (2.33)$$

Substituindo este resultado em (2.17):

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{(1 - \overline{\cos \theta})} = \frac{\lambda_s}{\left(1 - \frac{2}{3A}\right)}.$$

Quando M é grande, $\overline{\cos \theta}$ é pequeno, significando que nêutrons são espalhados para frente tão freqüentemente quanto são espalhados para trás. O livre caminho médio de transporte neste caso é próximo ao livre caminho médio de espalhamento, isto é, $\lambda_{tr} \sim \lambda_s$. Quando M é pequeno, $\overline{\cos \theta}$ é grande. Assim, mais nêutrons são espalhados para frente do que para trás. O livre caminho médio de transporte neste caso é maior que o livre caminho médio de espalhamento.

No início desta seção foi suposto um meio não absorvedor. Contudo, se houver absorção presente, a equação para σ_{tr} deve ser ajustada, de maneira a levar em consideração a absorção, isto é, devemos fazer:

$$\sigma_{tr} = \sigma_a + \sigma_s (1 - \overline{\cos \theta}) = \sigma_a + \sigma_s \left(1 - \frac{2}{3A}\right) \quad (2.34)$$

ou

$$\sigma_{tr} = \sigma_T + \sigma_s \bar{\mu}, \quad (2.35)$$

onde $\sigma_T = \sigma_a + \sigma_s$. O livre caminho médio de transporte então fica:

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{N\sigma_{tr}} = \frac{1}{N(\sigma_T + \sigma_s \bar{\mu})}. \quad (2.36)$$

Portanto:

$$\frac{1}{\lambda_{tr}} = \frac{1}{\lambda_T} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda_s}. \quad (2.37)$$

2.4 FATOR DE REPRODUÇÃO CRÍTICO DE UM REATOR NUCLEAR TÉRMICO

Como já mencionado, o tamanho crítico de um reator nuclear é aquele no qual a reação em cadeia se torna sustentável. A condição para o equilíbrio pode ser alcançada através da equação de balanço dos nêutrons, isto é, fazendo a taxa de produção de nêutrons igual a taxa de fuga mais a taxa de absorção.

Iremos calcular o tamanho crítico para uma reação em cadeia em um sistema onde o combustível, composto por U^{235} e U^{238} , esteja distribuído isotropicamente em uma esfera de raio R_c , conforme mostra a figura 7. Neste sistema os nêutrons podem ser absorvidos pelos núcleos do combustível provocando fissão; podem também ser absorvidos pelos núcleos do combustível ou do moderador sem posterior fissão; ou, finalmente, podem escapar para a região circunvizinha, onde só ocorre a absorção. Para facilitar os cálculos que se seguem, iremos supor os fatores simplificadores seguintes:

- O combustível é composto por uma mistura homogênea de U^{235} e U^{238} ;
- O moderador é “idealizado”, isto é, consideramos que ele não absorve nêutrons e que sua eficácia é máxima. Dessa forma, faremos os cálculos supondo que todos os nêutrons presentes no sistema são nêutrons térmicos e, portanto não são capazes de fissionar o U^{238} . As fissões ocorrem, exclusivamente, com os átomos de U^{235} ;
- O meio circunvizinho é homogêneo e infinito;

Vamos ainda supor que o tamanho da esfera de raio R_c é suficientemente grande, de forma que o escape de nêutrons da região que contém o combustível antes que eles provoquem a fissão seja desprezível. Com estes pressupostos o fim de um nêutron deve ser, necessariamente, a absorção pelos átomos de U^{235} causando fissão e produzindo, em média, ν novos nêutrons ou a

absorção pelos átomos de U^{235} e U^{238} sem causar fissão. Utilizando estes pressupostos temos $\varepsilon = p = f = 1$ e $l_i = l_f = 0$, assim:

$$\frac{N'}{N} = k_{\infty}. \quad (2.38)$$

Quando um átomo de U^{235} absorve um nêutron térmico, o número médio de nêutrons emitidos por ele é $\nu = 2,4$. Utilizando as seções de choque para a fissão e absorção do urânio natural para nêutrons térmicos, obtemos:

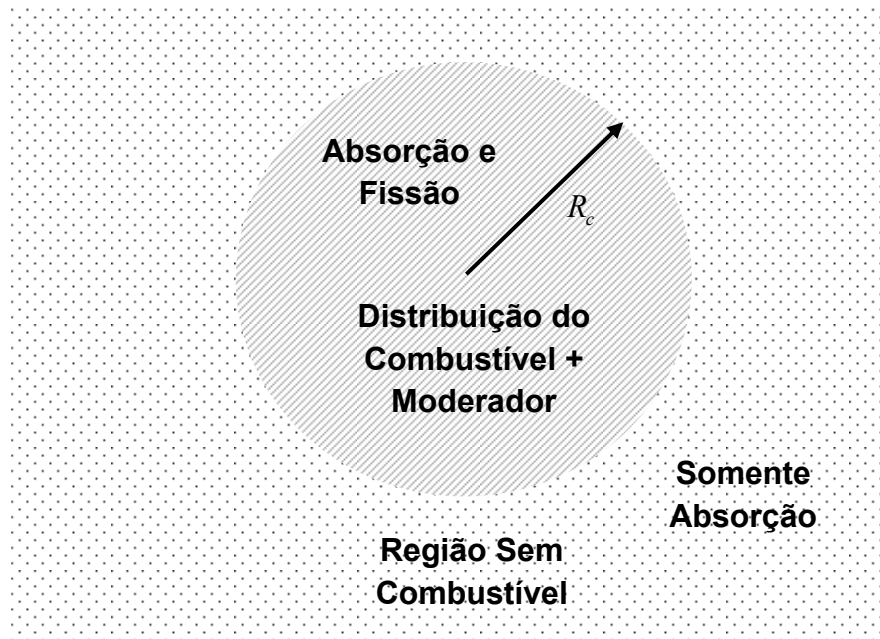
$$\frac{N'}{N} = \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_a} \right) \nu = 1,32. \quad (2.39)$$

Dessa maneira obtemos:

$$k_{\infty} = 1,32. \quad (2.40)$$

Devemos lembrar que esta é uma situação idealizada e por isso obtemos um fator de criticalidade maior que um. Contudo, no caso do reator natural, mesmo que possamos desconsiderar o escape de nêutrons devido às dimensões do sistema, não podemos esquecer que não existe a presença de material moderador. As seções de choque para fissão do U^{235} são grandes apenas para nêutrons de baixas energias, assim, podemos reduzir expressivamente o número de fissões do U^{235} . Além disso, o espalhamento inelástico dos nêutrons pelos átomos de U^{238} pode reduzir significativamente suas energias, tornando-os propensos a sofrer captura radioativa antes de provocarem fissões. Como resultado disso, em um sistema que contenha apenas urânio natural (nas porcentagens atuais) não é capaz de manter uma reação em cadeia.

Figura 7 – Distribuição da massa do combustível.



Na situação real, o fator de criticalidade é dado pela equação (2.6). Mas, supondo que o reator tenha sido construído de forma a minimizar o escape de nêutrons (isto pode ser feito, por exemplo, revestindo o reator com um material conhecido como refletor, cuja finalidade é devolver nêutrons para o sistema através de choques com os núcleos do material) de maneira em que podemos fazer $(l_t l_f) \sim 0$, a condição de criticalidade fornece:

$$k_{\infty} - 1 = k_{\infty} (l_t + l_f). \quad (2.41)$$

3 A FUNÇÃO DE GREEN PARA A DIFUSÃO

Os nêutrons se movem no interior do reator em complicados caminhos em zig-zag devido aos constantes choques com os átomos presentes no interior do reator. Como resultado disso, os nêutrons que em um determinado instante e posição possuem uma energia e direção específica, no instante seguinte surgem em outra posição, energia e direção de movimento. Podemos, contudo, tentar compreender o funcionamento do reator encontrando a dependência da densidade dos nêutrons em relação à posição e ao tempo. Isto é feito resolvendo-se a equação de difusão que, como veremos na seção seguinte, é obtida através da Lei de Fick, a qual impõe uma direção preferencial para o movimento dos nêutrons. A rigor, a densidade de nêutrons não é simples de ser encontrada, pois além de possuir dependência com a posição e tempo, ela possui também dependência com a energia dos nêutrons. Contudo, nesse trabalho, a análise da difusão dos nêutrons será feita considerando-os como sendo monoenergéticos, de forma a simplificar o problema.

Um das principais desvantagens encontradas na teoria de difusão está relacionado com o fato dela ser inválida nas regiões bem próximas a contornos físicos e fontes. Isto acontece por que a lei de Fick, a qual é utilizada na dedução da equação de difusão, falha nestas regiões e, conseqüentemente, a equação de difusão também falhará [11] [12]. Dessa forma, ela não pode ser aplicada a sistemas pequenos. Contudo, devido às dimensões de um reator, quando calculamos a densidade ρ dos nêutrons através da equação de difusão, assumindo que ρ cai a zero a uma pequena distância d além da fronteira, podemos esperar que o valor da densidade nos pontos internos sejam bem próximo dos valores reais. Esta distância d é conhecida como distância extrapolada e, sendo seu valor muito pequeno quando comparado com as dimensões do reator, pode-se fazer, sem muito prejuízo, a densidade igual a zero nas fronteiras reais do reator.

3.1 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Quando pingamos algumas gotas de tinta vermelha em um copo com água, a tinta se difunde gradativamente. Inicialmente somente a região próxima de onde pingamos fica vermelha, mas com o passar do tempo a tinta se espalha cada vez mais, até que no final do processo todo o líquido adquire uma cor rosada. Este é um exemplo típico de difusão de soluto no solvente. Outros exemplos são: difusão de fumaça no ar, de elétrons num condutor e de nêutrons num reator nuclear. A difusão é um fenômeno físico que ocorre quando no meio não há equilíbrio. No caso do copo com tinta, quando o estado final é alcançado, o sistema não muda mais, pois quando o equilíbrio é atingido a difusão cessa. A difusão, portanto, está relacionada com a diferença de concentração da substância (que se difunde) nos pontos do meio. Esta concentração pode variar no tempo e no espaço e normalmente é designada por $\rho(\vec{r}, t)$.

A Lei de Fick descreve diversos casos de difusão de matéria ou energia em um meio onde não há equilíbrio na concentração ou densidade da substância difusiva, pois para que ocorra a difusão deve-se, necessariamente, existir um gradiente de concentração entre dois pontos. No caso de difusão de partículas, a Lei de Fick afirma que \vec{J} , a densidade de corrente de partículas, é proporcional ao gradiente de concentração:

$$\vec{J} = -D\nabla\rho, \quad (3.1)$$

onde ρ é a densidade de partículas e D é o coeficiente de difusão das partículas no meio. A lei de Fick dada pela equação (3.1) é uma equação fenomenológica válida para muitos casos de difusão. O sinal negativo na equação significa que a difusão ocorre no sentido das regiões de maior concentração para as regiões de menor concentração. Utilizando conceitos da teoria cinética, podemos mostrar que o coeficiente de difusão de nêutrons em equilíbrio térmico em um reator nuclear é dado por:

$$D = \frac{1}{3} \lambda_{tr} v_n, \quad (3.2)$$

sendo v_n a velocidade média dos nêutrons entre uma colisão e outra e λ_{tr} o livre caminho médio de transporte. A equação da continuidade é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (3.3)$$

Combinando (3.3) com e a lei de Fick para meios homogêneos, obtemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D \nabla^2 \rho = 0 \quad (3.4)$$

que é a *equação de difusão* para um sistema sem fontes, sem absorção ou criação de partículas. Contudo, na situação real de nêutrons em um reator, a equação (3.4) não seria válida, afinal, na prática, temos sempre que levar em consideração a produção e a perda de nêutrons. A produção de nêutrons é devida à absorção dos nêutrons já existentes no sistema pelos átomos do combustível, com posterior fissão. A fissão pode liberar nêutrons diretamente ou através do decaimento dos núcleos filhos. Por outro lado, a perda de nêutrons pode ser devida a absorção por parte do combustível sem subsequente fissão ou absorção pelos núcleos de outros átomos presentes no meio. Assim, a equação de difusão deve ter a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D \nabla^2 \rho = \chi_p \rho - \chi_a \rho + q_0, \quad (3.5)$$

onde χ_a é a taxa de absorção de nêutrons, χ_p é a taxa de produção q_0 é um termo que se refere à existência de fontes, típico de cada sistema. No caso de um reator nuclear, o termo de fontes pode ser, por exemplo, uma fonte externa de nêutrons ou uma fissão espontânea de um átomo do combustível. Observe que a fonte, ainda que emita apenas um nêutron num dado instante inicial, é necessária para dar início ao processo da reação de fissão em cadeia.

Como estamos interessados em estudar o georeator proposto por Herndon, o qual possivelmente tem uma forma esférica, localizado no núcleo interno

da Terra, neste capítulo iremos buscar soluções da equação de difusão para sistemas esféricos através do método de Green.

3.2A FUNÇÃO DE GREEN DEPENDENTE DO TEMPO PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO EM UM MEIO HOMOGÊNIO E INFINITO

O método da função de Green fornece uma estratégia para resolução de equações diferenciais não homogêneas do tipo:

$$Lu(r) = \phi(r), \quad (3.6)$$

onde L é um operador diferencial auto-adjunto. A equação (3.6) é definida no intervalo $[a, b]$ e $\phi(r)$, geralmente chamada de função fonte, é sujeita às condições de contorno específicas em a e b [13]. O método consiste em introduzir $G(r, r_0)$, a função de Green do problema, a qual é a solução de um ponto-fonte:

$$LG(r, r_0) = \delta(r - r_0). \quad (3.7)$$

O fato do operador L ser auto-adjunto não faz perder a generalidade do problema, pois qualquer operador diferencial linear de segunda ordem pode ser colocado nesta forma através de um fator de multiplicação adequado. Devido à linearidade de (3.6), nós podemos encontrar a solução para a equação com a função fonte $\phi(r)$ utilizando superposições. Assim, sendo $\phi(r)$ expressa por:

$$\phi(r) = \int \phi(r_0) \delta(r - r_0) dr_0 \quad (3.8)$$

então $u(r)$ será:

$$u(r) = \int \phi(r_0) G(r, r_0) dr_0. \quad (3.9)$$

Estamos interessados em encontrar a função de Green para um meio homogêneo e infinito, sem taxa de absorção ou taxa de produção presentes. Supondo que em (\vec{r}_0, t_0) uma única partícula seja emitida neste meio. A equação que devemos resolver é:

$$\frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = 1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0), \quad (3.10)$$

onde $a^2 = D$, o coeficiente de difusão do meio. O fato do meio ser homogêneo e infinito implica que a função de Green pode ser considerada em função unicamente das diferenças $\vec{r} - \vec{r}_0$ e $t - t_0$, isto é:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0). \quad (3.11)$$

Sem nenhuma perda da generalidade do problema, podemos fazer $\vec{r}_0 = 0$ e $t_0 = 0$, de forma que (3.10) fica:

$$\frac{\partial G(\vec{r}, t)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 G(\vec{r}, t) = 1 \delta(\vec{r}) \delta(t). \quad (3.12)$$

Observe que a função de Green no caso descrito é a própria densidade, sujeita a condição inicial $G(\vec{r}, t) = 0$ para $t < 0$. A solução da equação acima para um meio isotrópico, homogêneo e infinito pode ser encontrada via transformada de Fourier [12][13][14] e para $t > 0$ resulta em:

$$G(\vec{r}, t) = \frac{A}{t^{3/2} \sqrt{\pi}} e^{\frac{-r^2}{4a^2 t}}, \quad (3.13)$$

onde A é determinada pela condição de contorno sobre G , isto é, fazendo que a integral sobre o volume seja igual a quantidade de partículas emitidas pela fonte (que no caso é um). Como não há absorção ou produção presente, a quantidade de partículas que a fonte emite deve ser conservada:

$$\int_{\text{todo espaço}} G(\vec{r}, t) dV = 1. \quad (3.14)$$

Esta integral fornece $A = 1/8\pi a^3$. Portanto, para o caso geral, com \vec{r}_0 e t_0 arbitrários, a função de Green fornece:

$$G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = \frac{1}{[4\pi a^2 (t - t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}{4a^2(t-t_0)}} \quad (3.15)$$

válida para $t > t_0$ e nula quando $t < t_0$. A função de Green é uma distribuição que possui um máximo em $r = 0$ e tem uma forma do tipo delta centrada neste máximo quando $t \rightarrow t_0$. O termo $4\pi a^2 (t - t_0)$ fornece a largura da distribuição. Devido à isotropia do problema o comportamento de $G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$ será o mesmo em qualquer direção.

3.3 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UM SISTEMA CONTENDO UMA FONTE PONTUAL LOCALIZADA EM \vec{r}_0 .

3.3.1 A Função de Green Independente do Tempo

Considere um sistema esférico com uma fonte-ponto localizada em \vec{r}_0 emitindo partículas a uma taxa constante q_0 . A equação de difusão para este sistema é:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 \rho(\vec{r}, t) = q_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (3.16)$$

No caso em que ρ é independente do tempo:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho(r)}{dr} \right) = -\frac{1}{a^2} q_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.17)$$

cuja solução é do tipo:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (3.18)$$

A constante α é obtida impondo-se a condição de que o fluxo sobre a superfície fechada S de raio $|\vec{r} - \vec{r}_0|$, centrada em r_0 , deve ser constante e igual a taxa de emissão de partículas pela fonte:

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = q_0. \quad (3.19)$$

Esta condição fornece α igual a:

$$\alpha = \frac{q_0}{4\pi a^2}, \quad (3.20)$$

portanto:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = q_0 G^0(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (3.21)$$

onde

$$G^0(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi a^2 |\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (3.22)$$

A equação (3.22) é a função de Green do sistema *independente do tempo e sem absorção*. Dessa forma, a densidade devida a uma superposição de fontes pode ser obtida a partir da taxa de produção (pelas fontes) e da integração de $G^0(\vec{r}, \vec{r}_0)$ sobre o volume que as contém (veja seção 3.4).

3.3.2 A Solução Dependente do Tempo

Analisaremos em seguida o caso em que a densidade possui dependência temporal. Chamando novamente de q_0 a taxa de emissão de partículas pela fonte - ($q_0 = \text{nêutrons} / \text{tempo}$) - e estando a fonte localizada em \vec{r}_0 , a densidade de partículas, quando a fonte passa a atuar de forma constante a partir de t_0 , pode ser obtida superpondo-se as contribuições devidas a cada intervalo de tempo dt_0 :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_0^t q_0 G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) dt_0. \quad (3.23)$$

A função de Green para o sistema é fornecida pela equação (3.15).

Portanto:

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_0^t q_0 \frac{1}{(4\pi a^2 (t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t_0)}} dt_0, \quad (3.24)$$

onde fizemos $\vec{r}_0 = 0$. Resolvendo a integral acima:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{2a^2 (\pi)^{3/2}} \frac{1}{r} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\infty) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \quad (3.25)$$

ou

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{1}{r} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \quad (3.26)$$

Quando fazemos o tempo tender ao infinito, a expressão acima fornece:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{1}{r}, \quad (3.27)$$

ou seja, a solução estacionária é igual a solução dependente do tempo quando $t \rightarrow \infty$.

3.4 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UMA FONTE EXTENSA COM TAXA DE PRODUÇÃO CONSTANTE. CASO INDEPENDENTE DO TEMPO

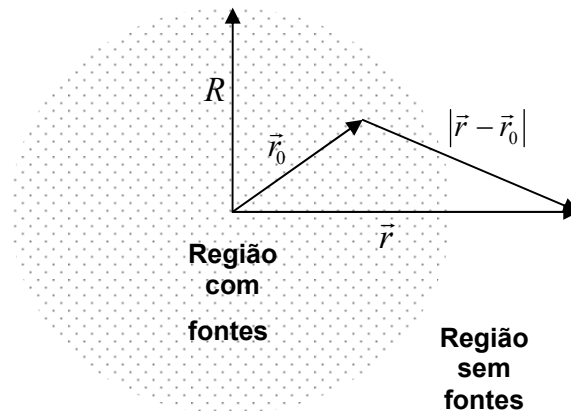
Vamos agora analisar a situação na qual as fontes estão distribuídas uniformemente em uma determinada região esférica de raio R , emitindo nêutrons a uma taxa q_0 (observe que agora q_0 tem a dimensão de nêutrons por volume). A densidade é então devida à superposição destas fontes pontuais e, como já foi mencionado, ela pode ser calculada a partir da taxa de emissão q_0 vezes integração da função de Green dada pela equação (3.22) sobre o volume em questão (volume que contém as fontes), conforme mostra a figura 8.

$$\rho(\vec{r}) = \int_V q_0 G^0(\vec{r}, \vec{r}_0) dV_0, \quad (3.28)$$

portanto:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{V_0} q_0 \frac{1}{4\pi a^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0. \quad (3.29)$$

Figura 8 – Distribuição das fontes.



Há duas regiões diferentes a serem consideradas. A primeira é a região que contém as fontes distribuídas uniformemente, ou seja, a região com r menor que R , para qual denominaremos a densidade por ρ_d , e a segunda é a região sem fontes, com r maior que R , na qual chamaremos a densidade de ρ_f . Para a região sem fontes, a densidade é calculada por:

$$\rho_f(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left(\frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) (r_0^2 dr_0) (\sin\theta d\theta) (d\phi) \quad (3.30)$$

Esta integral fornece:

$$\rho_f(r) = \frac{q_0 R^3}{3a^2} \frac{1}{r}. \quad (3.31)$$

Na região com fontes, a densidade é calculada a partir de:

$$\begin{aligned} \rho_d(r) = & \frac{2\pi q_0}{4\pi a^2} \int_0^r (r_0^2 dr_0) \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(\vec{r}^2 - \vec{r}_0^2 - 2r r_0 \cos\theta)^{1/2}} \\ & + \frac{2\pi q_0}{4\pi a^2} \int_r^R (r_0^2 dr_0) \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(\vec{r}^2 - \vec{r}_0^2 - 2r r_0 \cos\theta)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Resolvendo a integral obtemos:

$$\rho_d(r) = \frac{q_0}{2a^2} R^2 - \frac{q_0}{6a^2} r^2. \quad (3.33)$$

Observe que as duas soluções obtidas – equações (3.31) e (3.33) – poderiam também ser encontradas pelo método tradicional de resolução das equações diferenciais abaixo, válidas, respectivamente, para $r > R$ e $r < R$:

$$a^2 \nabla^2 \rho(\vec{r}) = 0 \quad r > R$$

$$a^2 \nabla^2 \rho(\vec{r}) + q_0 = 0 \quad r < R$$

Contudo, elas foram resolvidas pelo método de Green a fim de se criar uma base para os cálculos posteriores.

3.5 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UMA FONTE EXTENSA E CONTÍNUA. SISTEMA DEPENDENTE DO TEMPO.

Iremos agora considerar o caso em que a equação de difusão possui dependência temporal. A função de Green deste caso é a equação (3.15) e a densidade é dada por:

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_0^t \left(\int_{V_0} \frac{q_0}{[4\pi a^2 (t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}{4a^2(t-t_0)}} dV_0 \right) dt_0. \quad (3.34)$$

Novamente temos duas regiões distintas para a integração. A região que contém fontes, com $r < R$ e a região sem fontes, com $r > R$. Como na seção anterior, chamaremos ρ_d a densidade na região com fontes e ρ_f a densidade na região sem fontes. Os detalhes da integração encontram-se no APÊNDICE A. Para a região sem fontes encontramos que a densidade é dada pela equação (A.19). Para tempos muito grandes ($t \rightarrow \infty$) foi demonstrado que:

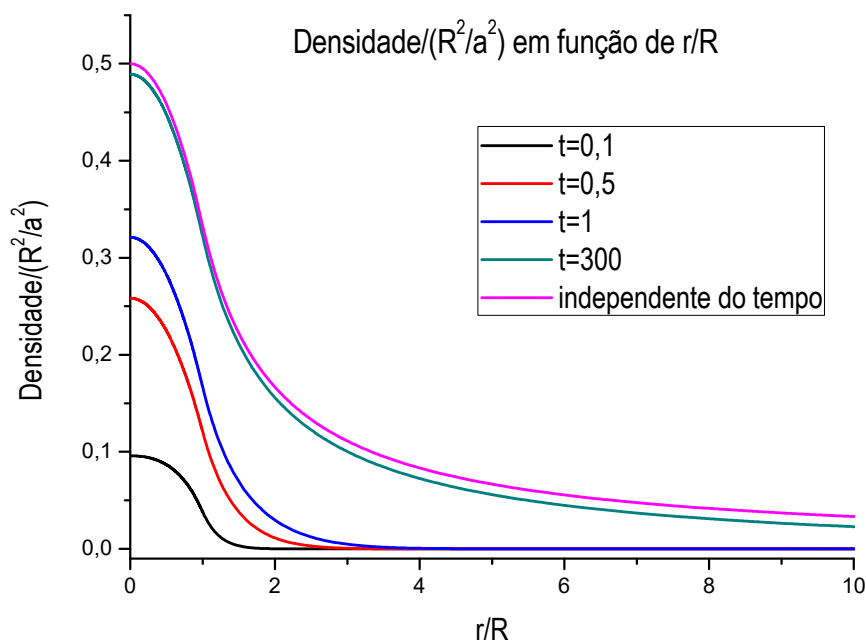
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\vec{r}, t) = \frac{q_0 R^3}{3a^2} \frac{1}{r},$$

que é a equação (A.29). O cálculo para a densidade na região $r < R$ também encontra-se o APÊNDICE A e é bastante semelhante ao cálculo da densidade na região sem fontes. Novamente foi demonstrado que a densidade dentro de região que contém as fontes, quando o tempo tende ao infinito, fornece o mesmo resultado da densidade encontrada resolvendo-se a equação independente do tempo – equação (A.39):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_d(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{2a^2} R^2 - \frac{q_0}{6a^2} r^2.$$

O gráfico da figura 6 mostra a comparação das densidades em um meio sem absorção para o sistema independente do tempo e para o sistema dependente em diferentes instantes. O gráfico foi gerado com auxílio de um código em FORTRAN.

Figura 9 – Densidade de nêutrons gerados por uma distribuição esférica de fontes em um sistema em que não ocorre absorção.



Na linha rosa tem-se a densidade em função da posição na situação em que o sistema é independente do tempo – equações (3.31) e (3.33). As outras linhas foram feitas utilizando as equações (A.19) e (A.36), as quais são as soluções dependentes do tempo para as regiões sem fontes e com fontes. Os tempos empregados foram: $t=0,1$ (linha preta); $t=0,5$ (linha vermelha); $t=1$ segundo (linha azul); $t=300$ segundos (linha verde). O código foi criado com a finalidade de se verificar apenas o comportamento da densidade para as diferentes posições. Dessa forma as constantes foram igualadas à unidade ($a=1$, $R=1$, $q_0=1$). Observamos claramente o pico da densidade quando $r \rightarrow 0$, ou seja, a densidade em cada instante distinto é sempre maior nas regiões próximas a fonte. Podemos notar também através do gráfico que, para tempos cada vez maiores, ela tende ao estado estacionário.

3.6 CÁLCULO DA DENSIDADE PARA UMA FONTE EXTENSA EM UM MEIO ONDE HÁ ABSORÇÃO.

Já vimos que para uma fonte puntiforme localizada em $\vec{r}_0 = 0$, a densidade é dada por:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

Para a fonte extensa nós simplesmente fizemos

$$\rho(\vec{r}) = \int_V q_0 \rho_{\text{puntual}} dV.$$

Nosso objetivo agora é calcular a densidade de nêutrons em um meio absorvedor. Portanto, devemos inicialmente analisar o caso de uma fonte puntiforme que emite partículas a uma taxa q_0 . Assim, considere a equação de difusão independente do tempo com um termo de fonte pontual e taxa de absorção diferente de zero:

$$-D\nabla^2 \rho = -\chi_a \rho + q_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (3.35)$$

Chamando $D = a^2$:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho(r)}{dr} \right) = -\frac{\chi_a}{a^2} \rho(r) + \frac{q_0}{a^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (3.36)$$

Para qualquer ponto $\vec{r} \neq \vec{r}_0$, temos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho(r)}{dr} \right) = \frac{\chi_a}{a^2} \rho(r). \quad (3.37)$$

Definindo $\phi = \rho r$, obtemos:

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) = \frac{\chi_a}{a^2} \phi(r). \quad (3.38)$$

A solução da equação acima é:

$$\phi(r) = Ae^{-\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}} + Be^{\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}} \rightarrow \rho(r) = \frac{Ae^{-\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}}}{r} + \frac{Be^{\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}}}{r}. \quad (3.39)$$

Observando que $\rho(r)$ tem que ser finita quando $r \rightarrow \infty$, a constante B deve ser nula. Portanto:

$$\rho(r) = \frac{Ae^{-\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}}}{r}. \quad (3.40)$$

A constante A pode ser obtida imaginando-se uma pequena esfera de raio r centrada na fonte. Quando $r \rightarrow 0$, o fluxo que passa através da superfície dessa esfera deve ser igual a quantidade de partículas emitidas pela fonte, isto é, $\lim_{\vec{r} \rightarrow 0} (4\pi r^2 \vec{J}(\vec{r})) = q_0$. Lembrando que a corrente é dada por $\vec{J} = -a^2 \nabla \rho$:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow 0} (4\pi r^2 \vec{J}) = \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} (4\pi r^2) \left[-a^2 \left(-\frac{A}{r^2} e^{-\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}} - \frac{A}{r} \frac{\sqrt{\chi_a}}{a} e^{-\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}} \right) \right] = q_0. \quad (3.41)$$

Portanto $A = \frac{q_0}{4\pi a^2}$. Assim obtém-se:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{e^{-\frac{\sqrt{\chi_a} r}{a}}}{r}. \quad (3.42)$$

Se as fontes estiverem distribuídas em um volume esférico de raio R , conforme mostra a figura 8, com absorção presente, a densidade de partículas é obtida por:

$$\rho(\vec{r}) = \int_V \frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{e^{-\frac{\sqrt{\chi_a}}{a}|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dV$$

Quando integrada adequadamente sobre as duas regiões ($R > r$ e $r < R$) a densidade encontrada é, respectivamente:

$$\rho_f(\vec{r}) = \frac{q_0}{2\chi_a} \frac{e^{-r\frac{\sqrt{\chi_a}}{a}}}{r} \left(Re^{\frac{R\sqrt{\chi_a}}{a}} - \frac{a}{\sqrt{\chi_a}} e^{\frac{R\sqrt{\chi_a}}{a}} + Re^{-\frac{R\sqrt{\chi_a}}{a}} - \frac{a}{\chi_a} e^{-\frac{R\sqrt{\chi_a}}{a}} \right) \quad (3.43)$$

e

$$\rho_d(\vec{r}) = \frac{q_0}{2\chi_a} \frac{e^{-R\frac{\sqrt{\chi_a}}{a}}}{r} \left(-Re^{\frac{r\sqrt{\chi_a}}{a}} + Re^{-\frac{r\sqrt{\chi_a}}{a}} - \frac{a}{\sqrt{\chi_a}} e^{\frac{r\sqrt{\chi_a}}{a}} + \frac{a}{\sqrt{\chi_a}} e^{-\frac{r\sqrt{\chi_a}}{a}} \right) + \frac{q_0}{a} \quad (3.44)$$

A função de Green para o caso em que existe absorção e dependência temporal é:

$$\mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, t, t_0) = \frac{1}{[4\pi a^2 (t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}{4a^2(t-t_0)} - \chi_a(t-t_0)} \quad (3.45)$$

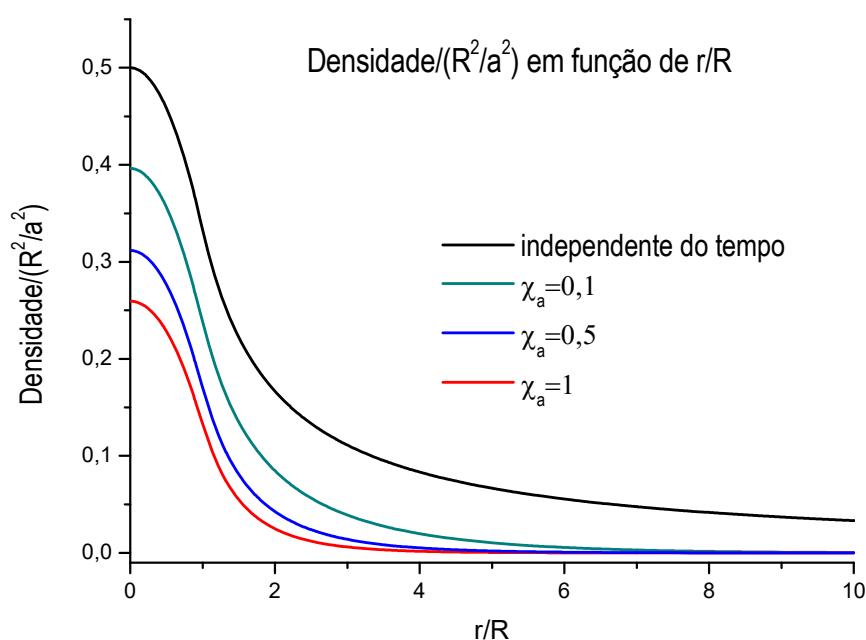
A densidade então é calcula a partir de:

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_0^t \left(\int_{V_0} q_0 \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, t, t_0) dV_0 \right) dt_0 = \int_0^t \left(\int_{V_0} \frac{q_0}{[4\pi a^2 (t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}{4a^2(t-t_0)} - \chi_a(t-t_0)} dV_0 \right) dt_0 \quad (3.46)$$

A integral acima foi resolvida numericamente. Também foram encontradas soluções numéricas para o caso da fonte extensa sem absorção. Estes resultados encontram-se no gráfico da figura 10. A linha preta representa comportamento do sistema em que não há absorção e as linhas coloridas o

comportamento da densidade quando a absorção está presente. O tempo usado em todos os casos foi $t = 10$ segundos. Os coeficientes de absorção empregados foram: $\chi_a = 0,1$ (linha verde); $\chi_a = 0,5$ (linha azul); $\chi_a = 1$ (linha vermelha). Observamos que o comportamento do sistema com absorção e sem absorção é o mesmo, mudando apenas o valor máximo da densidade devido ao fator adicional do expoente.

Figura 10 - Densidade de nêutrons gerados por uma distribuição esférica de fontes em um sistema com absorção.



4 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO INDEPENDENTE DO TEMPO PARA UM REATOR NUCLEAR

Nos capítulos anteriores efetuamos uma análise geral dos processos de difusão em meios homogêneos e distintos, contendo uma interface de separação, sistemas contendo fontes pontuais e extensas e fixamos nossa análise nos sistemas estacionários e dependentes do tempo. Neste capítulo e nos próximos vamos procurar aplicar os conceitos anteriormente abordados a situações mais próximas dos sistemas reais, reatores homogêneos de dimensão finita. Antes de trabalharmos com a equação de difusão dependente do tempo, iremos partir do caso mais simples, ou seja, o caso em que a difusão é função apenas da posição. Assim, no transcorrer deste capítulo, enquanto procuramos soluções para a equação estacionária, algumas quantidades importantes que propositalmente não foram mencionadas no capítulo anterior, tais como comprimento de difusão e o raio crítico de um reator nuclear térmico como encontrados na literatura, aparecerão naturalmente.

4.1 ASPECTOS DE UM REATOR EM REGIME CRÍTICO

Considere inicialmente um reator nuclear térmico cujo combustível esteja distribuído de maneira uniforme em uma esfera de raio R , circundado por um material também homogêneo, mas que somente absorve nêutrons, sem fissionar. Na ausência de fontes (tanto as fontes externas que emitem nêutrons na taxa q_0 , quanto qualquer fissão espontânea), a densidade certamente permanecerá nula. Por outro lado, suponha que em t_0 seja colocada uma fonte puntiforme em $x_0 = 0$, de maneira que $q_0 = 1\delta(0)\delta(t-t_0)$. No estado estacionário a equação de difusão do sistema para a região $r < R$ tem a forma:

$$D\nabla^2\rho = \chi_a\rho - \chi_p\rho. \quad (4.1)$$

A taxa de produção de nêutrons, tendo como base a fissão do ^{235}U provocada por nêutrons térmicos, é dada por:

$$\chi_p = (\sum_a v_n) \eta \epsilon p f = (\sum_a v_n) k_\infty. \quad (4.2)$$

A equação de difusão estacionária fica:

$$\nabla^2 \rho - \frac{\sum_a v_n}{D} \rho + \frac{\sum_a v_n}{D} k_\infty \rho = 0. \quad (4.3)$$

Sendo o coeficiente de difusão dado por $D = \frac{1}{3} \lambda_{tr} v_n$, temos:

$$\nabla^2 \rho - \left(\frac{1 - k_\infty}{\frac{\lambda_{tr}}{3 \sum_a}} \right) \rho = 0. \quad (4.4)$$

Definindo a quantidade:

$$L^2 = \frac{\lambda_{tr}}{3 \sum_a}, \quad (4.5)$$

então a equação de difusão pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \rho - \left(\frac{1 - k_\infty}{L^2} \right) \rho = 0. \quad (4.6)$$

Observe que L tem dimensão de comprimento. Esta quantidade é conhecida como coeficiente de difusão e fornece a distância total, em linha reta, que um nêutron percorre antes de ser absorvido. O coeficiente de difusão térmica é freqüentemente encontrado em cálculos de reatores [11]. Comparando as equações (4.1) e (4.6):

$$\frac{\chi_a - \chi_p}{D} = \frac{(k_\infty - 1)}{L^2}. \quad (4.7)$$

Na região $r > R$ não há combustível, logo não faz sentido falar em taxa de produção. Portanto, a equação para esta região é:

$$-\nabla^2 \rho + \left(\frac{\chi_a}{D} \right) \rho = 0. \quad (4.8)$$

Soluções estacionárias com $\rho \neq 0$ são possíveis somente se $\chi_p - \chi_a > 0$, ou seja, taxa de produção local maior que a taxa de absorção. Uma análise da situação em que $\chi_p - \chi_a \leq 0$ leva a soluções fisicamente inaceitáveis.

4.2 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO INDEPENDENTE DO TEMPO PARA UM REATOR TÉRMICO

Vamos agora encontrar soluções para a equação de difusão para o sistema estacionário descrito na seção anterior. Os índices 1 e 2 servem para denotar, respectivamente, as duas regiões distintas do problema, isto é, a região que contém combustível e, portanto, ocorre tanto a absorção quanto a produção e a região que não contém combustível, onde só ocorre a absorção.

$$-D_1 \nabla^2 \rho = \chi_p^1 \rho - \chi_a^1 \rho \quad (r < R)$$

$$-D_2 \nabla^2 \rho = -\chi_a^2 \rho \quad (r > R)$$

4.2.1 Solução da Equação para a Região Interna

Chamando $\frac{k_1}{D_1} = \frac{\chi_p - \chi_a}{(a_1)^2}$ e fazendo $\rho(r) = \frac{\phi(r)}{r}$, a equação de difusão

independente do tempo pode ser colocada convenientemente na forma:

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{k_1}{(a_1)^2} \phi = 0, \quad (4.9)$$

cuja solução é:

$$\phi(r) = A \cos\left(\frac{r}{L_1}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{r}{L_1}\right), \quad (4.10)$$

onde definimos a constante $L_1 = a_1/\sqrt{k_1}$. Assim, a densidade fica:

$$\rho(r) = \frac{A}{r} \cos\left(\frac{r}{L_1}\right) + \frac{B}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{r}{L_1}\right) . \quad (4.11)$$

4.2.2 Solução da Equação para a Região Externa.

Semelhantemente ao que foi feito anteriormente, definimos a quantidade $\frac{k_2}{D_2} = \frac{\chi_a^2}{(a_2)^2}$, de forma que a equação para ϕ fica:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{\chi_a^2}{(a_2)^2}\phi = 0. \quad (4.12)$$

Portanto:

$$\phi(r) = A_1 e^{-r/L_2} + B_1 e^{r/L_2}, \quad (4.13)$$

com $L_2 = a_2/\sqrt{K_2}$. A densidade então fica:

$$\rho(r) = \frac{A_1 e^{-r/L_2}}{r} + \frac{B_1 e^{r/L_2}}{r}. \quad (4.14)$$

4.2.3 Condições de Contorno

A constante B_1 tem que ser nula para que a densidade não divirja quando $r \rightarrow \infty$. As outras constantes também devem ser deduzidas por meio da imposição de condições de contorno adequadas. Começaremos então, pela condição do fluxo, a qual pode ser entendida imaginando uma pequena esfera de raio r na região $r < R$. No estado estacionário, o fluxo líquido que passa através dessa esfera quando r tende a zero deve ser nulo:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (4\pi r^2) \vec{j}(r) = 0. \quad (4.15)$$

Podemos demonstrar que esta condição fornece $A = 0$. A segunda condição diz respeito a continuidade da densidade em $r = R$:

$$\frac{B}{R} \operatorname{sen} \left(\frac{R}{L_1} \right) = \frac{A_1 e^{-R/L_2}}{R} \quad (4.16)$$

e, portanto:

$$A_1 = B \operatorname{sen} \left(\frac{R}{L_1} \right) e^{R/L_2}. \quad (4.17)$$

Por fim, a última condição está relacionada com a continuidade do fluxo em $r = R$:

$$\vec{j}^-(R) = \vec{j}^+(R),$$

forneendo:

$$\frac{D_1}{R} \left[\frac{B \operatorname{sen} \left(\frac{R}{L_1} \right)}{R} - \frac{B \operatorname{cos} \left(\frac{R}{L_1} \right)}{L_1} \right] = \frac{A_1 D_2}{R} e^{-R/L_2} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{L_2} \right]. \quad (4.18)$$

Manipulando a equação acima podemos escrevê-la como:

$$\tan \left(\frac{R}{L_1} \right) = \frac{D_1 L_2 R}{L_1 (L_2 D_1 - L_2 D_2 - R D_2)}. \quad (4.19)$$

A equação (4.19) determina o raio crítico do reator. Para um meio externo altamente absorvedor, de forma que a densidade caia rapidamente a zero nas regiões fora do reator, temos que $L_2 \rightarrow 0$, conseqüentemente:

$$\tan \left(\frac{R}{L_1} \right) \rightarrow -0 \quad (4.20)$$

ou seja:

$$R_c = L_1 \pi \quad (4.21)$$

ou, de forma mais explicita, mostramos que o raio crítico de um reator operando em regime estacionário está relacionado com coeficiente de difusão da região com combustível, à taxa de produção e à taxa de absorção da forma:

$$R_c = \pi \sqrt{\frac{D_1}{(\chi_p - \chi_a)}} = \pi \frac{L}{\sqrt{k_\infty - 1}}. \quad (4.22)$$

Normalmente o raio crítico de um reator é encontrado na literatura [8] tomando-se a densidade igual a zero quando $r = R$, já que os reatores são construídos de forma a minimizar o escape de nêutrons. Foi mencionado anteriormente que reatores térmicos são aqueles em que a fissão é provocada por nêutrons térmicos. Considerando-se que os nêutrons da fissão são emitidos com energias altas, a quantidade L que aparece na equação (4.22) deve ser substituída

por pelo coeficiente de migração M , que leva em contas dois fatores: a distância percorrida pelos nêutrons antes da termalização (L_s) e a distância que ele percorre até ser absorvido.

$$M^2 = L^2 + L_s^2. \quad (4.23)$$

Na equação (4.22) se $k_\infty < 1$, então a expressão não tem sentido físico. Se $k_\infty = 1$ o raio crítico do reator deve ser infinito. Somente com $k_\infty > 1$ podemos chegar a um valor finito para o tamanho do reator. O volume crítico do reator esférico segundo (4.22) é então dado por:

$$V_c \sim 130 \left(\frac{M^2}{k_\infty - 1} \right)^{3/2}. \quad (4.24)$$

5 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO PARA UMA REGIÃO FINITA

5.1 DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO

Antes de começarmos com o caso de interesse, isto é, o estudo da difusão tridimensional dependente do tempo, iremos introduzir o problema de maneira mais simples, supondo que os nêutrons se difundem apenas em uma direção. Assim, considere que os nêutrons estão restritos à região compreendida entre $x=0$ e $x=L$, sendo que fora destes limites a densidade se anula. A equação de difusão dependente do tempo em uma dimensão é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(x,t)] = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\rho(x,t)] + (\chi_p - \chi_a)\rho + q_0, \quad (5.1)$$

onde o termo q_0 determina uma fonte instantânea na posição $x=x_0$:

$$q_0 = \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) \quad (5.2)$$

e sendo $\rho(x,t)$ sujeita à condição:

$$\rho(0,t) = \rho(L,t) = 0. \quad (5.3)$$

Se não houvesse dependência temporal, a equação (5.1) ficaria:

$$\frac{d^2}{dx^2}[\rho(x)] = -\frac{k}{a^2}\rho(x) + q_0(x-x_0)\delta(t-t_0), \quad (5.4)$$

onde $k = \chi_p - \chi_a$. A solução geral desta equação é:

$$\rho(x) = A \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{a^2}} x \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{k}{a^2}} x \right). \quad (5.5)$$

Mas impondo a condição $\rho(0) = \rho(L) = 0$ obtemos:

$$\rho(x) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right). \quad (5.6)$$

A estratégia para resolver o caso dependente do tempo consiste em resolver a equação para a função $\phi(x, x_0, \omega, t)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (\chi_p - \chi_a) \phi + \delta(x - x_0) e^{-i\omega t}. \quad (5.7)$$

Em seguida, $\rho(x, x_0, t)$ para o caso da fonte súbita é obtida somando-se todas as soluções possíveis entre $\pm\infty$, isto é:

$$\rho(x, x_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi d\omega. \quad (5.8)$$

Observe que o termo de fonte em (5.7), $q = \delta(x - x_0) e^{-i\omega t}$, é tal que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \delta(t) \quad (5.9)$$

e assim com a soma em ω recuperamos a forma de uma fonte súbita. Por observar que a solução da equação estacionária é do tipo $A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$, iremos supor soluções para ϕ na forma:

$$\phi(x, x_0, \omega, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) e^{-i\omega t}. \quad (5.10)$$

Substituindo (5.10) em (5.7):

$$\begin{aligned}
 -i\omega \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-i\omega t} &= -\sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{m\pi a}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-i\omega t} \\
 &+ (\chi_p - \chi_a) \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-i\omega t} + \delta(x - x_0) e^{-i\omega t},
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

multiplicando esta equação por $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e integrando de 0 a L :

$$\begin{aligned}
 -i\omega \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-i\omega t} dx &= \\
 -\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{m\pi a}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-i\omega t} dx & \\
 + (\chi_p - \chi_a) \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-i\omega t} dx & \\
 + \int_0^L \delta(x - x_0) e^{-i\omega t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

Utilizando:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(my) \operatorname{sen}(ny) dy = \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} \delta_{nm}
 \tag{5.13}$$

e substituindo em (5.12) obtemos os coeficientes A_n :

$$A_n = \frac{\frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)}{-i\omega + \beta n^2 + (\chi_a - \chi_p)},
 \tag{5.14}$$

onde $\beta = \left(\frac{\pi}{aL}\right)^2$. Assim, a solução (5.10) fica:

$$\phi(x, x_0, \omega, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{-i\omega + \beta n^2 + (\chi_a - \chi_p)} e^{-i\omega t}. \quad (5.15)$$

Substituindo este resultado em (5.8):

$$\rho(x, x_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{-i\omega + \beta n^2 + (\chi_a - \chi_p)} e^{-i\omega t} \right) d\omega. \quad (5.16)$$

Para encontrar $\rho(x, x_0, t)$ dada por (5.16) devemos resolver a integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + \beta n^2 + (\chi_a - \chi_p)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} [i\omega + \beta n^2 + (\chi_a - \chi_p)]}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega, \quad (5.17)$$

onde $\alpha = \beta n^2 + (\chi_a - \chi_p)$. A integral acima pode ser reescrita na forma:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega = 2\pi e^{-\alpha t} \quad (5.18)$$

Assim, a densidade resulta em:

$$\rho(x, x_0, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 + \chi_a - \chi_p\right] t}. \quad (5.19)$$

Observe que a expressão (5.19) está de acordo com a situação de uma fonte súbita emitindo uma partícula em x_0 , isto é, em $t = 0$:

$$\rho(x, x_0, 0) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta(x - x_0) \quad (5.20)$$

é uma possível representação para a função $\delta(x - x_0)$ [15]. A expressão para $\rho(x, x_0, t)$ da forma com que foi definida em (5.19) nada mais é que a expressão que fornece a função de Green do problema quando expandida em termos das auto-funções do sistema [12][13][15].

5.2 EVOLUÇÃO DO SISTEMA E CONDIÇÕES DE CRITICALIDADE

Considerando o primeiro termo da expressão dada por (5.19), observamos que o regime da evolução do sistema é determinado por:

$$\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + \chi_a - \chi_p \quad (5.21)$$

Assim, as condições de criticalidade podem ser definidas através destas quantidades da forma:

1. *Supercrítico*: a população de nêutrons aumentará exponencialmente com o tempo se:

$$\chi_p > \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + \chi_a \quad (5.22)$$

2. *Crítico*: o regime é alcançado impondo (5.23). Neste caso, o primeiro termo da expansão é t-independente e define a solução estacionária e os outros termos decrescem exponencialmente com o tempo.

$$\chi_p = \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + \chi_a \quad (5.23)$$

3. *Subcrítico*: Todos os termos decrescem exponencialmente com o tempo e a cadeia não se sustenta se:

$$\chi_p < \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + \chi_a \quad (5.24)$$

5.3 O REGIME CRÍTICO

No caso da evolução em regime crítico temos:

$$\chi_p - \chi_a = \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2. \quad (5.25)$$

Escrevendo $\rho(x, x_0, t)$ na forma:

$$\begin{aligned} \rho(x, x_0, t) = & \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ & + \frac{2}{L} \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} \end{aligned} \quad (5.26)$$

observe que no limite em que $t \rightarrow \infty$ a expressão para a densidade deve ser a mesma que para o caso estacionário:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \rho_{est}(x) \quad (5.27)$$

e podemos observar a dependência da densidade de nêutrons com a posição onde o primeiro nêutron foi criado. A população de nêutrons será máxima quando $x_0 = L/2$, e a máxima densidade para tempos grandes será dada por:

$$\rho^{máx}(x) = \frac{2}{L} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (5.28)$$

5.3.1 Número de Nêutrons em Função do Tempo no Regime Crítico

A condição de criticalidade do reator fica mais clara quando calculamos a população de nêutrons no sistema, isto é:

$$N(t) = \int_0^L \rho(x,t) dx. \quad (5.29)$$

Em regime crítico, a densidade é escrita por:

$$\rho(x, x_0, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t}, \quad (5.30)$$

assim

$$N(t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} dx. \quad (5.31)$$

A integral acima fornece:

$$N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{impar}} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)}{n} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t}, \quad (5.32)$$

observe que para $t = 0$, utilizando a expressão:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \quad 0 < x < \pi \quad (5.33)$$

obtemos $N(0) = 1$, como deveria ser para o caso de uma fonte pontual emitindo uma partícula em $t_0 = 0$. Observamos também que para $t \rightarrow \infty$ a população de nêutrons só depende da posição onde o primeiro nêutron foi criado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_0}{L}\right). \quad (5.34)$$

Pela equação acima, nota-se que a população é máxima quando a fonte é colocada no centro do reator. No nosso caso unidimensional, esta posição é $x_0 = L/2$ e número de nêutrons é igual a $4/\pi$.

5.3.2 Comportamento da Densidade e do Número de Nêutrons Dependendo da Posição da Fonte Inicial

Com a densidade de nêutrons em regime crítico - equação (5.30) - foram gerados os gráficos dados pelas figuras 11 e 12 com as fontes colocadas nas posições $x_0 = L/2$ e $x_0 = L/3$. No programa, a quantidade $(\pi a/L)^2$ foi tomada igual à unidade, o comprimento considerado foi $L = 2$ e os tempos foram variados entre 5×10^{-3} e 10. É importante observar que todos os gráficos foram construídos em função das variáveis multiplicadas por $(\pi a/L)^2$.

Figura 11 – Densidade de nêutrons para a fonte colocada na posição $x_0 = L/3$.

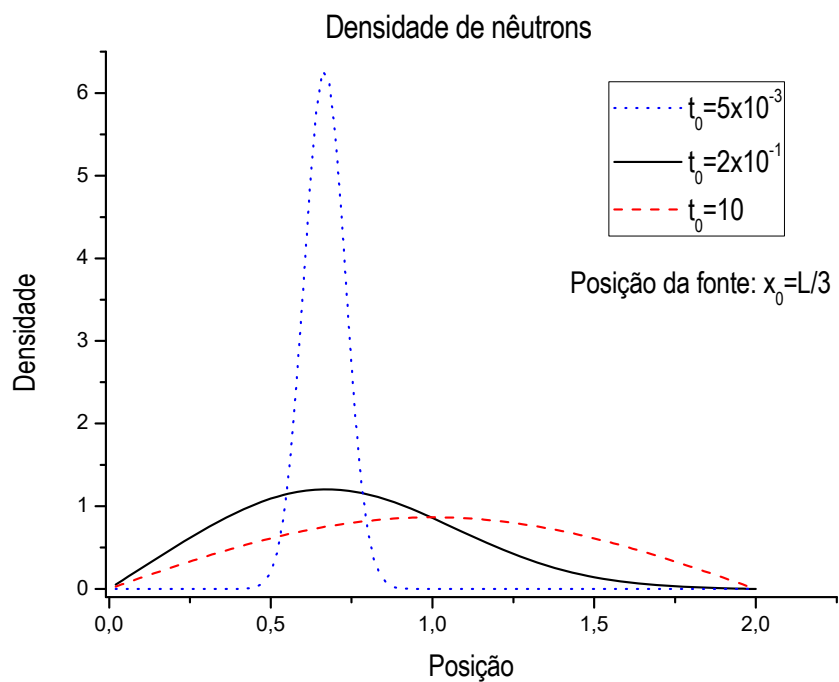
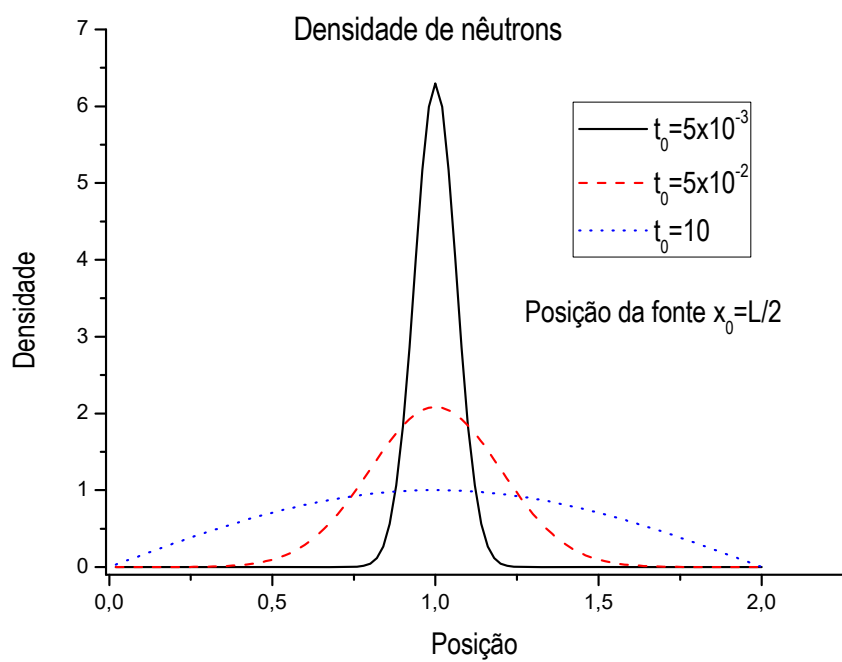


Figura 12 – Densidade de nêutrons para a fonte colocada na posição $x_0 = L/2$.



Tanto para a fonte em $L/2$, quanto em $L/3$, observamos que na medida em que $t \rightarrow 0$ a função se comporta cada vez mais como $\delta(x-x_0)$, conforme mostra a equação (5.20). Podemos notar também que nos dois casos o valor máximo da densidade estacionária acontece na posição central.

Os gráficos das figuras 13 e 14 fornecem $N(t)$ calculados através de (5.32). O primeiro gráfico foi criado de forma que o número de nêutrons se estabilizasse em um. Assim, da equação (5.34) temos a quantidade $\pi x_0/L = 0,90333$. Observe que o número de nêutrons cresce inicialmente e depois cai, se estabilizando em seguida na quantidade desejada.

Figura 13 – Número de nêutrons no caso crítico em função do tempo.

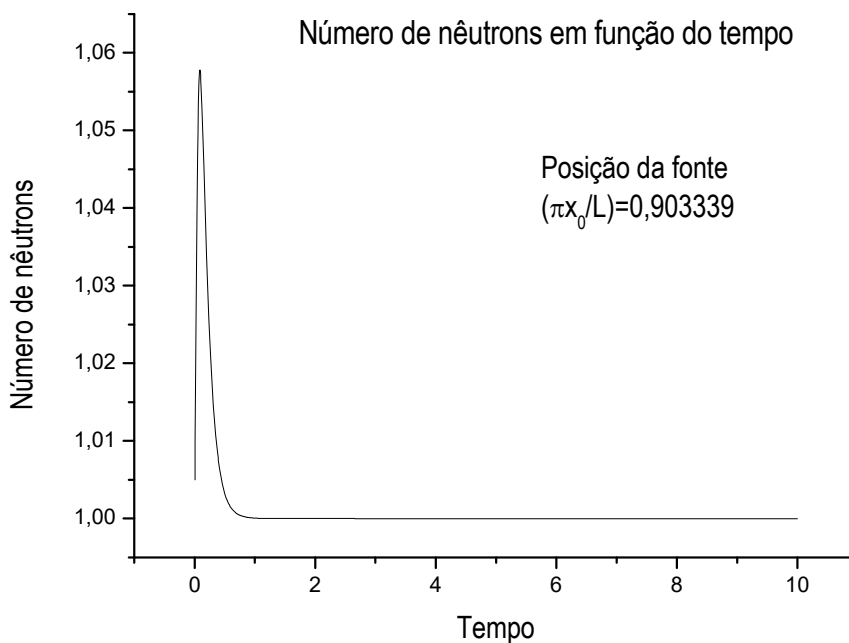
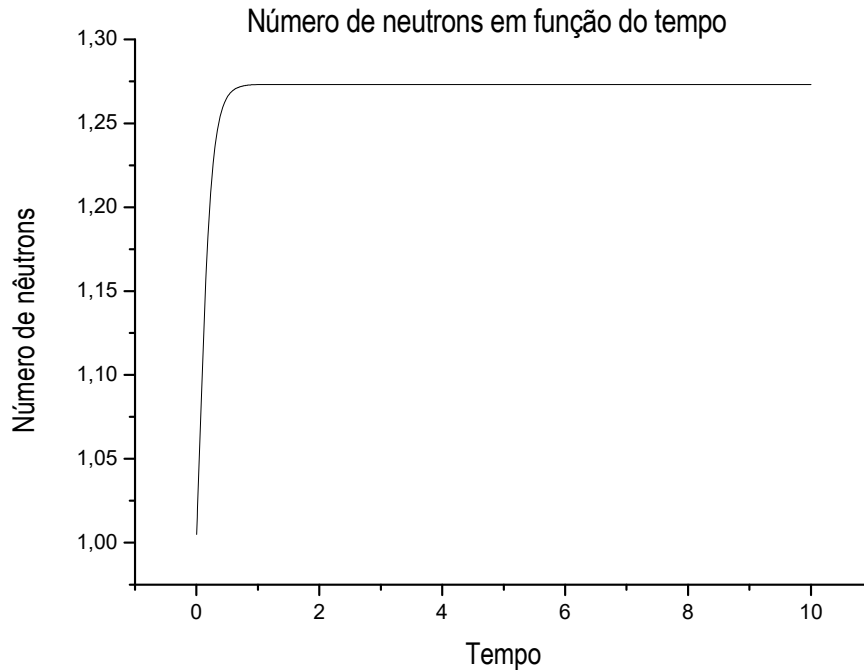


Figura 14 – Número máximo de nêutrons em função do tempo no caso crítico.



O gráfico da figura 14 foi gerado de forma a se obter a máxima densidade, a qual é alcançada fazendo-se a posição da fonte igual a $x_0 = L/2$. O número de nêutrons nesta situação cresce rapidamente e, como já foi mencionado, ele se estabiliza em $4/\pi \sim 1,273$.

5.4 O REGIME SUBCRÍTICO

Iremos trabalhar com a densidade dada por (5.19). Devemos observar que na situação subcrítica a taxa de produção deve obedecer (5.24), ou seja, ela deve ser menor que taxa de produção crítica dada por (5.23). Se conservarmos constantes as quantidades $\pi a/L$ e χ_a , e escrevermos a taxa de produção subcrítica como:

$$\chi_{sub} = \chi_c + \varepsilon. \quad (5.35)$$

O expoente de (5.19) pode ser escrito da forma:

$$\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 + \chi_a - \chi_c + \varepsilon = \left[(n^2 - 1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right] + \varepsilon, \quad (5.36)$$

e a densidade então fica:

$$\rho(x, x_0, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} e^{-\varepsilon t}. \quad (5.37)$$

Observe que agora, mesmo se tomarmos $n=1$, devido a segunda exponencial, a densidade decrescerá exponencialmente com o tempo e a reação em cadeia não se sustenta. Em termos da quantidade ε , o número de nêutrons no sistema é:

$$N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{ímpar}} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)}{n} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} e^{-\varepsilon t}. \quad (5.38)$$

Outro fator importante envolvido no processo é o número total de nêutrons produzidos durante todo o tempo de operação do reator. Ele está relacionado com a taxa de fissão através da equação:

$$N_{\text{total}}^{\text{fissão}} = \int_0^{\infty} \chi_p N(t) dt \quad (5.39)$$

Substituindo (5.32) em (5.39) e integrando:

$$N_{\text{total}}^{\text{fissão}} = (\chi_p) \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{ímpar}} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)}{n \left[(n^2 - 1) \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + \varepsilon \right]}. \quad (5.40)$$

O gráfico da figura 15 fornece o número de nêutrons em função do tempo no caso subcrítico para dois valores distintos de ε : na linha vermelha temos $\varepsilon = 0,1$ e na linha preta temos $\varepsilon = 0,01$. O número total de nêutrons gerados no processo para os dois casos está indicado no gráfico.

A figura 16 fornece uma comparação entre as expressões para $N(t)/\chi_p$ com as fontes localizadas nas posições $L/2$ e $L/3$ considerando $\varepsilon = 0,1$. O valor do número total de nêutrons é maior inicialmente para a fonte em $L/2$. A partir de $t \sim 30$ o número de nêutrons em ambas situações passa a ser basicamente o mesmo.

Figura 15 – Número total de nêutrons gerados no sistema no caso subcrítico para as fontes localizadas em $L/2$ com $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0,01$.

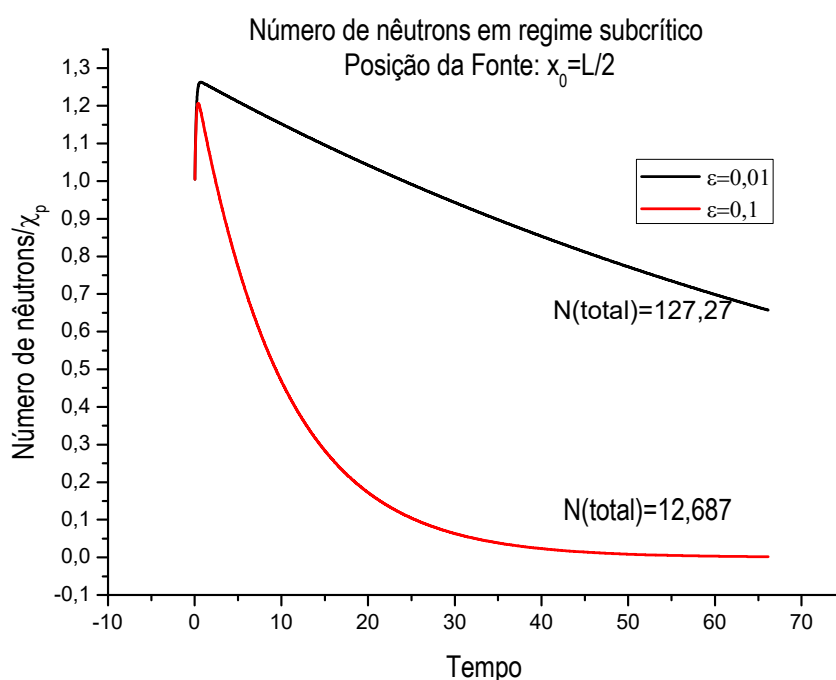
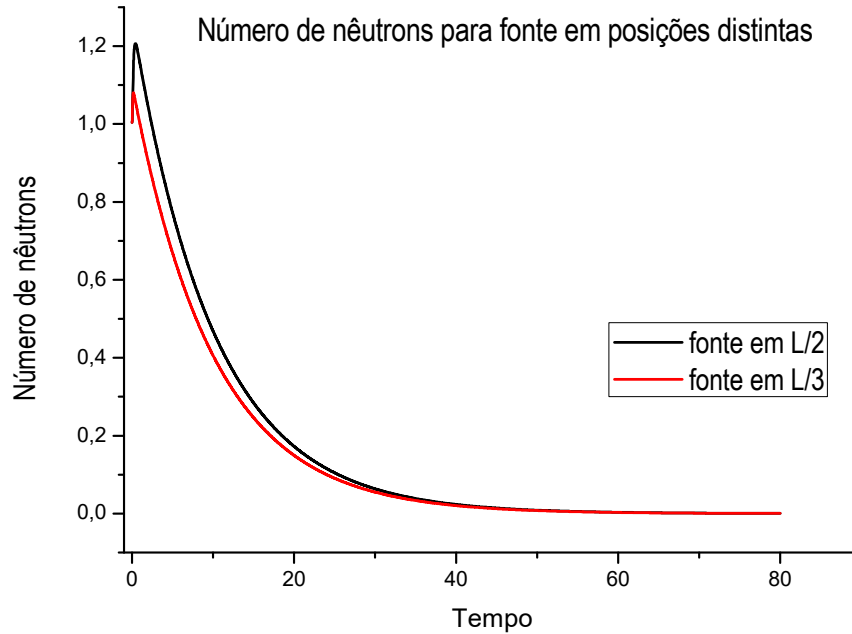


Figura 16 – Comparação entre o número de nêutrons gerados com as fontes nas posições $L/2$ e $L/3$.



5.5 O EFEITO DE UMA SEGUNDA FONTE SÚBITA

Supondo agora o caso em que duas fontes súbitas e pontuais são introduzidas no sistema: a primeira em (x_0, t_0) e a segunda em (x_1, t_1) , com $t_1 > t_0$. O termo de fonte q_0 pode então ser escrito da forma:

$$q_0 = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) + \delta(x - x_1)\delta(t - t_1). \quad (5.41)$$

Para qualquer tempo $t_0 < t < t_1$, a densidade é calculada a partir de (5.19). Todavia, o que agora nos interessa saber é a maneira pela qual se dará a evolução a partir da inserção da segunda fonte.

A equação para $\rho(x, t)$ pode ser encontrada efetuando-se uma translação temporal no sistema, isto é, devemos considerar a equação de difusão (5.1) para $t > t_1$, mas com $t_1 = 0$, de forma que o termo de fonte fica:

$$q_0 = \delta(x - x_1)\delta(t - t_1) \rightarrow \delta(x - x_1)\delta(t - 0) \quad (5.42)$$

A expansão $\rho(x, t)$ em termos de autofunções do sistema, como vimos, fornece:

$$\rho(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t}, \quad (5.43)$$

mas agora a condição inicial deve ser:

$$\rho(x, t = 0) = \rho_0(x, 0) + \delta(x - x_1)\delta(0) \quad (5.44)$$

onde

$$\delta(x - x_1) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.45)$$

e

$$\rho_0(x, 0) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]\tau} \quad (5.46)$$

sendo $\tau = t_1 - t_0$, isto é, a densidade que evolui no tempo entre t_0 e t_1 é tomada como condição inicial para o próximo regime.

Enxergando através de outro ponto de vista, podemos compreender a população de nêutrons como sendo criada em $t = 0$ em todo o reator no momento em que a segunda fonte súbita é introduzida. Neste caso, o termo de fonte de (5.1) é:

$$q = \delta(x)\delta(t) = [\rho_0 + \delta(x - x_1)]\delta(t). \quad (5.47)$$

A solução para uma fonte pontual e genérica, função de Green do problema, é:

$$G(x, x_0', t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x_0'}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} \quad (5.48)$$

e a densidade $\rho(x, t)$ é obtida a partir de :

$$\rho(x, t) = \int_0^L G(x, x_0', t) q(x_0') dx_0'$$

ou

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = \int_0^L \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x_0'}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} \\ \times \left[\frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{m\pi x_0}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x_0'}{L} \right) e^{-\left[(m^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]\tau} + \delta(x_0' - x_1) \right] dx_0'. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} \\ + \left\{ \left(\frac{2}{L} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{n\pi x_0}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right. \\ \times \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{n\pi x_0'}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x_0'}{L} \right) \right] dx_0' \\ \left. \times \left[e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} e^{-\left[(m^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]\tau} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Utilizando (5.13) em (5.50):

$$\rho(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]t} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi x_0}{L} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right](t+\tau)} \quad (5.51)$$

A equação acima tem exatamente o significado que queríamos demonstrar: o primeiro termo corresponde a uma fonte súbita introduzida em $t=0$ na posição x_1 , e o segundo termo se refere à introdução da fonte em $t=-\tau$ na posição x_0 .

5.6 MUDANÇA NO REGIME DE DIFUSÃO

Vamos analisar um sistema que está atuando em regime crítico e por alguma razão passa a atuar em regime subcrítico. A mudança no regime pode ser devida a mais de um motivo:

1. Variação na taxa de produção, que ocorre por conta do consumo de combustível no decorrer do processo;

2. Variação na taxa de absorção, que pode ocorrer em consequência da criação de partículas absorvedoras e não físseis (subprodutos do processo de fissão);

3. Variação nas dimensões do sistema, a qual pode ocorrer, por exemplo, por conta de uma expansão em consequência do aumento da temperatura.

5.6.1 Soluções com Mudança de Regime sem Alterações nas Dimensões

Considere a densidade em regime crítico criado pela introdução das duas fontes súbitas - equação (5.51). Queremos encontrar a variação de seu

comportamento quando mudamos as taxas de produção e absorção. Para isso, reescreveremos o expoente de (5.51) utilizando (5.35), ou seja, considerando novamente a taxa de produção subcrítica como a taxa de produção crítica menos um fator ε , isto é, $\chi_{sub} = \chi_c + \varepsilon$. O expoente ficará, assim como antes, dado por:

$$(n^2 - 1) \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 + \varepsilon \quad (5.52)$$

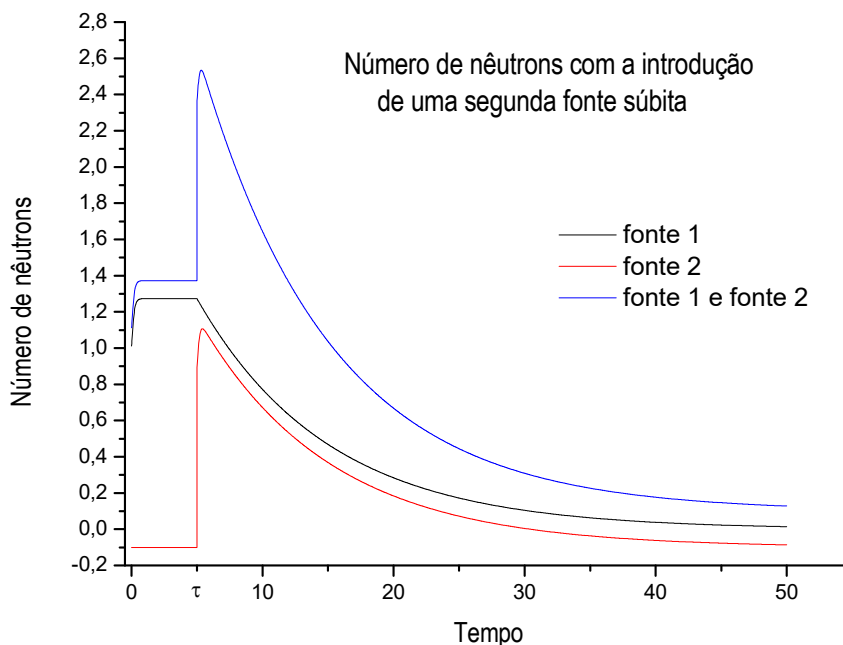
e a densidade pode ser escrita como:

$$\rho(x, t) = \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x_1}{L} + \text{sen} \frac{n\pi x_0}{L} e^{-\left[(n^2 - 1) \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 \right] \tau} \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left[(n^2 - 1) \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 \right] t - \varepsilon t}. \quad (5.53)$$

O número de nêutrons calculado a partir de (5.29) é:

$$N(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sum_{\substack{n \\ \text{impar}}} \text{sen} \frac{n\pi x_1}{L} + \text{sen} \frac{n\pi x_0}{L} e^{-\left[(n^2 - 1) \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 \right] \tau} \right) e^{-\left[(n^2 - 1) \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 \right] t - \varepsilon t}. \quad (5.54)$$

Figura 17 – Número de nêutrons devido à introdução de uma segunda fonte súbita.



A figura 17 representa o gráfico do caso em que é adicionada uma fonte em x_0 no sistema e ele evolui em regime crítico até $t = \tau$ (linha preta). A partir daí é então introduzida uma segunda fonte súbita em x_1 (na realidade as posições das fontes são as mesmas no gráfico, isto é, $x_1 = x_2 = L/2$), e o sistema passa a evoluir em condições subcríticas, com $\varepsilon = 0,1$ (linha vermelha). A linha azul representa a soma das duas situações, contudo, observe que ela foi deslocada verticalmente para que os gráficos não se superponham, de forma a dificultar sua visualização.

6 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DEPENDENTE DO TEMPO COM SIMETRIA ESFÉRICA PARA UMA REGIÃO FINITA

6.1 ANÁLISE GERAL DA DIFUSÃO EM SISTEMAS ESFÉRICOS

Neste capítulo vamos procurar soluções para equação de difusão dependente do tempo com simetria esférica:

$$\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 \rho(r,t) = (\chi_p - \chi_a) \rho(r,t) + q_0 \quad (6.1)$$

sujeita à condição $\rho(R,t) = 0$, com $q_0 = \delta(r - r_0) \delta(t - t_0)$. A estratégia para resolver o problema consiste em supor que a densidade pode ser escrita em termos de funções de variáveis independentes. Assim, para encontrarmos a solução em termos das variáveis espaciais, começaremos com a equação independente do tempo:

$$\nabla^2 \rho = -k \rho \quad (6.2)$$

onde:

$$k = \frac{\chi_p - \chi_a}{a^2} \quad (6.3)$$

Supondo a solução para a densidade do tipo $\rho = R(r)G(\theta)e^{im\varphi}$, com $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, a equação (6.2) fica:

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + k^2 r^2 = -\frac{1}{G \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dG}{d\theta} \right] + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}. \quad (6.4)$$

Igualando a equação acima a $l(l+1)$, podemos reescrevê-la como:

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + k^2 r^2 = -\frac{1}{G \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dG}{d\theta} \right] + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = l(l+1), \quad (6.5)$$

observe que:

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left[\operatorname{sen}\theta \frac{dG}{d\theta} \right] = \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \right] G \quad (6.6)$$

é a equação associada de Legendre, cujas soluções são os polinômios associados de Legendre

$P_l^m(\cos\theta)$, com $(l = |m|, |m|+1, |m|+2, \dots)$. Já a equação para $R(r)$ tem a forma:

$$r^2 \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] = [l(l+1) - k^2 r^2] R, \quad (6.7)$$

cujas soluções são as funções esféricas de Bessel $J_l(kr)$. Nós podemos introduzir o índice n para considerar o fato de as funções $J_l(k_n r)$ devem ser nulas em $r = R$. Dessa forma, a solução mais geral para a equação sem fontes e independente do tempo pode ser escrita como:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n,l,m} A_{nlm} R_l^n(r) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (6.8)$$

A solução para a equação de difusão dependente do tempo pode ser escrita em termos de uma combinação das soluções com dependência espacial e da solução temporal:

$$\rho(r, t) = \sum_{n,l,m} A_{nlm} R_l^n(r) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} T_{nlm}(t) = \sum_{n,l,m} \phi(r, \theta, \varphi) T_{nlm}(t). \quad (6.9)$$

Estudando o caso de difusão unidimensional, foi possível observar que a localização da fonte súbita não muda qualitativamente o comportamento da evolução temporal. No caso tridimensional, a escolha de condições iniciais com simetria esférica serve para facilitar os cálculos e a posterior análise da solução $\rho(r, t)$, visto que a densidade em nenhum momento apresenta dependência com as

varáveis θ e φ . As soluções da equação espacial, portanto, são aquelas em que $l = m = 0$:

$$\phi = R(r) = \sum_n A_n J_0(k_n r). \quad (6.10)$$

6.2 EVOLUÇÃO TEMPORAL COM CONDIÇÕES INICIAIS ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS

A solução de (6.7) quando $l = 0$ fornece:

$$\phi(r) = \frac{A \operatorname{sen}(kr)}{kr}. \quad (6.11)$$

A densidade está sujeita à condição de se anular fora das regiões do reator, portanto devemos ter $\phi(r = R) = 0$, o que fornece:

$$k_n R = n\pi, \quad (6.12)$$

onde k é definido por (6.3). Substituindo na equação, obtemos a condição de criticalidade dada por (4.22), isto é:

$$\frac{\chi_p - \chi_a}{a^2} = \frac{\pi}{R}.$$

Portanto, as soluções para $\rho(r, t)$ são, na sua forma mais geral, dadas por:

$$\rho(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right)}{\frac{n\pi r}{R}} T_n(t). \quad (6.13)$$

6.3 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DEPENDENTE DO TEMPO

Assim como no caso unidimensional, estamos primeiro interessados em procurar soluções para a equação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - (\chi_a - \chi_p) \phi = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - r_0) e^{-i\omega t}, \quad (6.14)$$

onde, de maneira semelhante ao capítulo anterior – tendo em vista a equação (5.9) – o termo de fonte está sendo escrito na forma $q_0 = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - r_0) e^{-i\omega t}$. Contudo, observe a introdução do fator adicional $1/4\pi r^2$ devido ao fato de integral da função delta ser normalizada a unidade. As soluções de (6.14) são do tipo:

$$\phi(\omega, r, r_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \text{sen}(k_n r)}{k_n r} e^{-i\omega_n t}. \quad (6.15)$$

Substituindo (6.15) em (6.14):

$$\begin{aligned} -i\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \text{sen}(k_n r)}{k_n r} e^{-i\omega_n t} + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 \frac{A_n \text{sen}(k_n r)}{k_n r} e^{-i\omega_n t} \\ + (\chi_a - \chi_p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \text{sen}(k_n r)}{k_n r} e^{-i\omega_n t} = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - r_0) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{\text{sen}(k_n r)}{k_n r} (r^2 dr)$ e integrando de 0 a

R encontramos os coeficientes A_n :

$$A_n = \frac{n^2 \pi}{2R^3} \frac{\text{sen}(k_n r_0)}{k_n r_0} \frac{1}{-i\omega + a^2 k_n^2 + (\chi_a - \chi_p)}. \quad (6.17)$$

Conforme o procedimento unidimensional visto anteriormente, a densidade é dada por:

$$\rho(r, r_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega, r, r_0, t) d\omega$$

$$\rho(r, r_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 \pi \operatorname{sen}(k_n r_0)}{2R^3} \frac{1}{k_n r_0} \frac{1}{-i\omega + a^2 k_n^2 + (\chi_a - \chi_p)} \right) \frac{\operatorname{sen}(k_n r)}{k_n r} e^{-i\omega t} d\omega \quad (6.18)$$

ou

$$\rho(r, r_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi}{2R^3} \frac{\operatorname{sen}(k_n r_0)}{k_n r_0} \frac{\operatorname{sen}(k_n r)}{k_n r} e^{-(a^2 k_n^2 + \chi_a - \chi_p)t} \quad (6.19)$$

Substituindo o valor de k_n :

$$\rho(r, r_0, t) = \frac{1}{2\pi R r r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r_0}{R}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right) e^{-\left(\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 + \chi_a - \chi_p\right)t} \quad (6.20)$$

Utilizando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r_0}{R}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right) = \frac{R}{2} \delta(r - r_0) \quad (6.21)$$

No instante inicial, ou seja, $t = 0$:

$$\rho(r, r_0, t = 0) = \frac{1}{4\pi r r_0} \delta(r - r_0), \quad (6.22)$$

que está de acordo com a situação de uma partícula distribuída em uma esfera de raio r_0 no instante inicial. Observe:

$$\rho(r, 0) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r_0^2} & r = r_0 \\ 0 & r \neq r_0 \end{cases} \quad (6.23)$$

6.4 PARTÍCULA “SEMENTE” NA ORIGEM

Vamos analisar o comportamento da densidade quando fazemos $r_0 = 0$, isto é, a partícula que inicia o processo está na origem no nosso sistema de coordenadas. O último termo da equação (6.16) quando multiplicado por $\frac{\text{sen}(k_n r)}{k_n r}(r^2 dr)$ e integrado de 0 a R fornece:

$$\int_0^R \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - r_0) e^{-i\omega t} \frac{\text{sen}(k_n r)}{k_n r} (r^2 dr) = \frac{1}{4\pi} e^{-i\omega t} \frac{\text{sen}(k_n r_0)}{k_n r_0}. \quad (6.24)$$

Como estamos interessados situação em que $r_0 = 0$ devemos observar que:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(k_n r_0)}{k_n r_0} = 1.$$

Substituindo este valor em (6.24) encontramos os novos coeficientes A_n , os quais quando inseridos em (6.18) fornecem:

$$\rho(r, t, r_0 = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi}{2R^3} \frac{\text{sen}(k_n r)}{k_n r} e^{-(a^2 k_n^2 + \chi_a - \chi_p)t} \quad (6.25)$$

Substituindo o valor de k_n :

$$\rho(r, t, r_0 = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2R^2} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right)}{r} e^{-\left(\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 + \chi_a - \chi_p\right)t}. \quad (6.26)$$

A expressão acima poderia também ser obtida do caso geral dada pela equação (6.20) tomando-se o limite em que $r_0 \rightarrow 0$:

$$\rho(r, t, r_0 = 0) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi R r r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{n\pi r_0}{R} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\left(\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 + \chi_a - \chi_p \right) t} \right). \quad (6.27)$$

Já demonstramos que esta expressão possui a forma de uma função delta de Dirac quando $t = 0$. Adicionalmente, também podemos demonstrar que

$$\int \rho(r, r_0, 0) dV = 1$$

como se espera de uma representação para a função delta. Veja:

$$\rho(r, r_0, t = 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \frac{1}{2\pi R r r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{n\pi r_0}{R} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) r^2 dr \text{sen} \theta d\theta d\phi$$

Integrando em $d\theta$ e $d\phi$:

$$\int \rho(r, r_0, 0) dV = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi r_0}{R} \right)}{r_0} \int_0^R \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) (r dr) \quad (6.28)$$

que fornece:

$$\int \rho(r, r_0, 0) dV = \frac{2R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi r_0}{R} \right)}{n r_0} (-1)^{n-1}. \quad (6.29)$$

Sendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi r_0}{R}\right)}{n} (-1)^{n-1} = \frac{\pi r_0}{2R}, \quad (6.30)$$

portanto:

$$\int \rho(r, r_0, 0) dV = \frac{2R}{\pi r_0} \frac{\pi r_0}{2R} = 1. \quad (6.31)$$

Assim, observamos que a expressão para $\rho(r, r_0, 0)$ escrita em termos de $\text{sen}(n\pi r_0/R)$ conforme (6.28) obedece aos critérios necessários para a representação de uma função delta de Dirac. Além disso, também podemos encontrar em algumas referências [11] que a representação para a função $\delta(0)$ pode ser escrita como:

$$\rho(r, r_0, 0) = \frac{1}{2R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \text{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right)}{r} \quad (6.32)$$

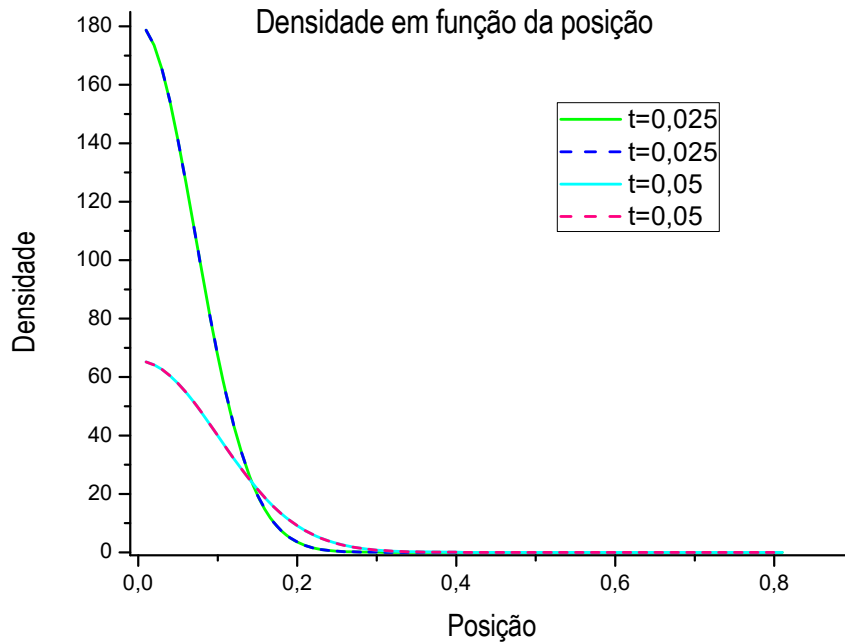
que é (6.26) com $t = 0$. A integral desta distribuição fornece:

$$\int_0^R \frac{4\pi}{2R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \text{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right)}{r} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 2(1-1+1-1+\dots). \quad (6.33)$$

A integral acima não é bem definida. Contudo, se fizermos um gráfico das somas parciais das duas expressões alternativas para $\rho(r, t)$ – equações (6.26) e (6.27) – para tempos próximos de zero, estas expressões concordam entre si da forma esperada. À medida que o tempo aumenta ou diminui no regime crítico, qualquer uma das expressões pode ser utilizada, sem que o máximo da densidade seja muito elevado. A exponencial sempre faz com que a série convirja rapidamente em ambas as situações. Porém, para tempos distantes

de zero, quando $r \rightarrow 0$, devemos utilizar a expressão (6.27). Nos diagramas seguintes apresentamos o comportamento de $\rho(r,t)$ pelas duas expressões.

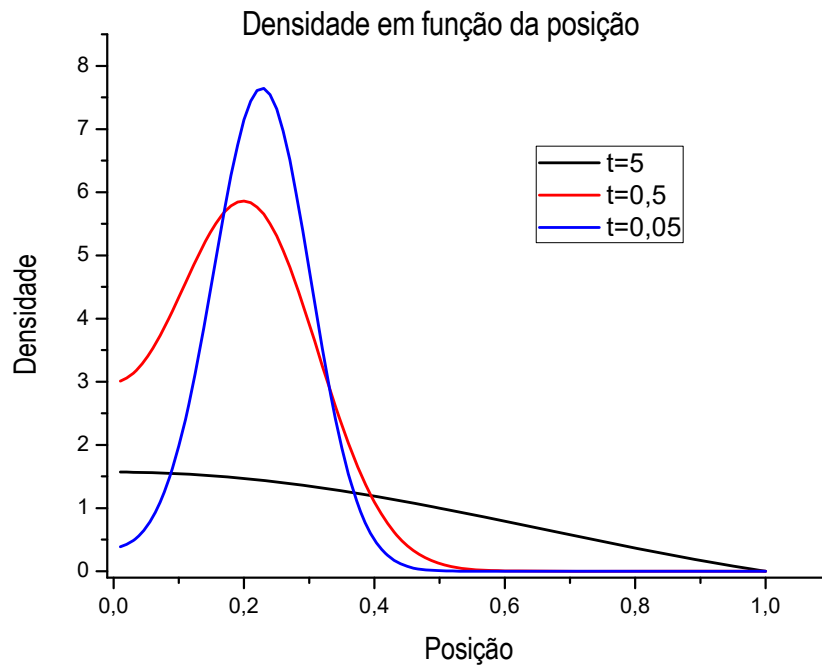
Figura 18 – Comportamento da densidade no caso crítico com r_0 na origem.



Na figura 18, a linha verde e a linha rosa foram geradas utilizando (6.27). Os tempos empregados foram, respectivamente, $t=0,025$ e $0,05$. Já na densidade fornecida pelas linhas azul escuro e azul claro foi utilizada a equação (6.26), calculada para os mesmo tempos referidos. Nas duas situações foram utilizados $r_0 = 10^{-5}$ e, como anteriormente, $\pi a/R$ foi igualada à unidade. Observe que os diagramas se sobrepõem. Para tempos pequenos, o máximo da densidade fica cada vez maior nas regiões próximas à r_0 e tende a zero para r muito grande.

O gráfico seguinte foi calculado com a fonte na posição $r_0 = R/4$ para os mesmo tempos utilizados anteriormente

Figura 19 – Comportamento da densidade para fonte localizada em $r_0 = R/4$.



Observe que semelhantemente ao que demonstrado no caso unidimensional, quanto menor o tempo, mais a densidade se comporta como uma função delta de Dirac e quanto maior tempo, mais acentuado se torna seu comportamento estacionário.

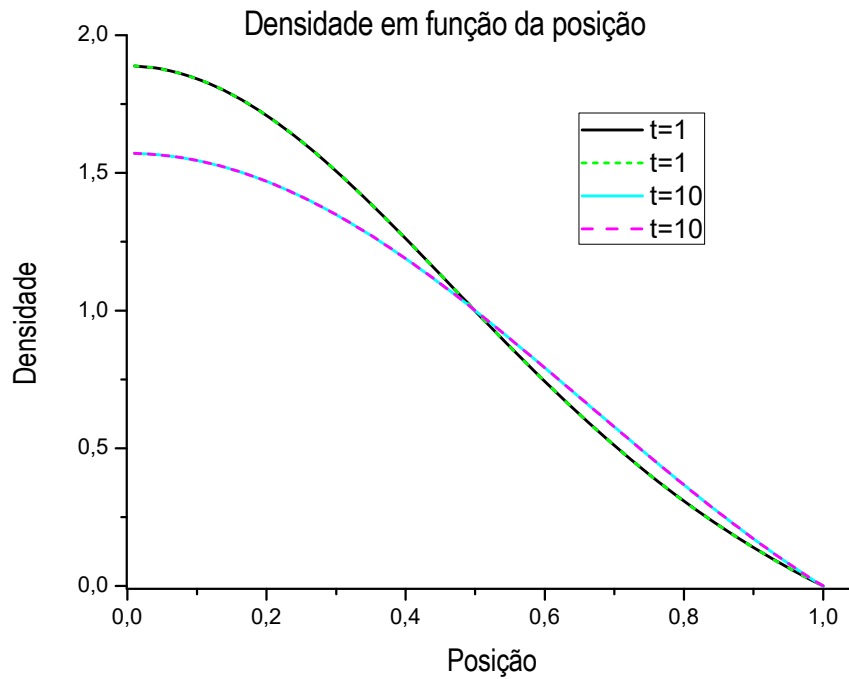
6.5 COMPORTAMENTO DA DENSIDADE PARA TEMPOS GRANDES E NÚMERO TOTAL DE NÊUTRONS NO SISTEMA

Para $t \rightarrow \infty$ no caso crítico, a expressão (6.20) fornece:

$$\rho(r, r_0, t) = \frac{1}{2\pi R r r_0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi r_0}{R}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi r}{R}\right). \quad (6.34)$$

A figura 20 mostra o mesmo gráfico analisado anteriormente, mas para tempos maiores. Observe que a partir de $t=1$ em diante o valor máximo da densidade já não muda muito.

Figura 20 – Comportamento da densidade para $t = 1$ e $t = 10$.



O número total de nêutrons no sistema é dado por:

$$N(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{2\pi R r r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi r_0}{R}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right) e^{-\left[\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 + \chi_a - \chi_p\right]t} (r^2 dr) (\text{sen}\theta d\theta) (d\phi)$$

que fornece:

$$N(t) = \frac{2R}{\pi r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi r_0}{R}\right) \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\left[(n^2-1)\left(\frac{\pi a}{R}\right)^2\right]t}. \quad (6.35)$$

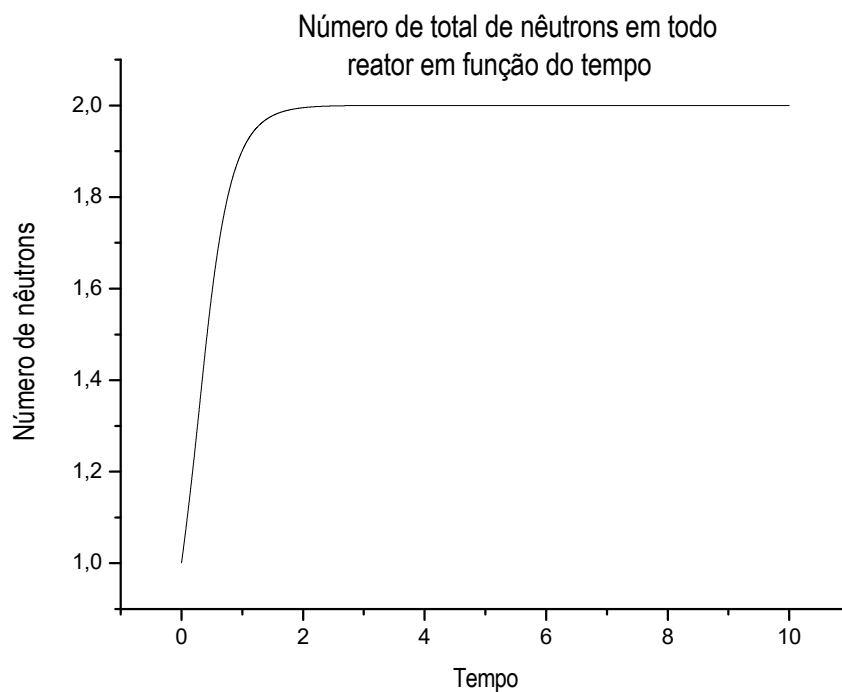
No caso em que $t \rightarrow \infty$ a equação acima fornece:

$$N(t \rightarrow \infty) = \frac{2R}{\pi r_0} \text{sen}\left(\frac{\pi r_0}{R}\right). \quad (6.36)$$

Se $r_0 \rightarrow 0$, então $N(t) = 2$.

o gráfico abaixo fornece o número total de nêutrons em todo o reator em função do tempo:

Figura 21 – Número de nêutrons em função do tempo em um reator esférico.

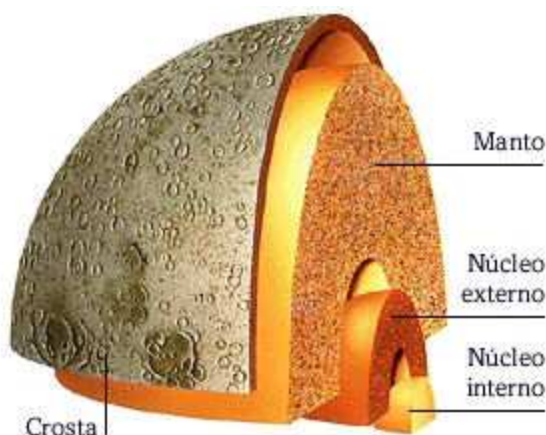


Semelhante ao gráfico da figura 14, o número de nêutrons cresce rapidamente, e conforme a equação (6.36) se estabiliza em 2. Observe que o gráfico se estabiliza em $t \sim 2,18$.

7 O GEO-REATOR DO INTERIOR DA TERRA

As informações físicas a respeito da estrutura do nosso planeta são inferidas, principalmente, através do estudo de ondas sísmicas que passam através de seu interior, sejam elas naturais como as ondas de terremotos, sejam artificiais, produzidas, por exemplo, pelas explosões nucleares. A análise da propagação destas ondas levou ao entendimento de que a Terra é dividida em subcamadas concêntricas. Este método permite ainda determinar as características relativas às subcamadas, tais como estado, densidade e superfície de descontinuidade, isto é, profundidade na qual ocorre a transição entre duas camadas subseqüentes [17], [18], [19]. De maneira geral a Terra é então dividida em crosta, manto superior, manto inferior, núcleo externo e núcleo interno. A figura 22 mostra um desenho esquemático das diferentes subcamadas internas.

Figura 22 – Camadas da Terra.



Quanto ao estudo das propriedades químicas da Terra, informações diretas a respeito de sua composição se restringem à uma pequena parte da superfície sujeita à colheita de amostras (o buraco mais profundo já feito até hoje tem cerca de 12 km de profundidade [2]). Contudo, uma análise mais geral também pode ser feita de forma indireta, a partir de considerações cosmo-químicas e da análise sistemática da composição de meteoritos chondritos, os quais são tidos como amostra do material que formou o sistema solar. Se Terra e os meteoritos chondritos têm a mesma origem, pode-se fazer suposições em relação a

porcentagem de elementos químicos nas estruturas internas através da análise destes meteoritos [16].

Por muitos anos prevaleceu a idéia de que a composição da Terra fosse semelhante a composição de um meteorito chondrito ordinário. Uma das principais implicações desta suposição reside no fato de que os elementos radioativos no interior do planeta seriam encontrados apenas na crosta e no manto [6]. Contudo, nos trabalhos apresentados por Herndon, ele tem demonstrado que se a estrutura de Terra for semelhante a de um meteorito chondrito enstatito[†], haverá a ocorrência de elementos radioativos no núcleo e isso possibilitaria a existência de um reator de fissão nuclear natural localizado no centro da Terra, o qual poderia explicar não só a origem de parte do calor terrestre, mas também poderia dar conta da dinâmica do campo magnético terrestre [3].

Se o suposto georeator existe, então ele deve trabalhar em regime regenerador, queimando e produzindo combustível. Seu funcionamento teve início a cerca de 4,5 bilhões de anos, quando a concentração do U^{235} no urânio natural era maior (cerca de 23%). Em um reator, como já discutido no capítulo 2, o ^{239}Pu é formado através da reação $^{238}\text{U}(n, \gamma) ^{239}\text{U} \xrightarrow{\beta^-} ^{239}\text{Np} \xrightarrow{\beta^-} ^{239}\text{Pu}$. Embora o plutônio possa sofrer fissão, seu uso em reatores é eficiente quando existe um fluxo de nêutrons alto [11]. Contudo, no georeator natural, espera-se que o fluxo de nêutrons seja insuficiente para que se possa considerar a fissão do plutônio. Assim, a principal forma de contribuição do plutônio seria a através da reação $^{238}\text{U}(n, \gamma) ^{239}\text{U}(\beta^-) ^{239}\text{Np}(\beta^-) ^{239}\text{Pu}(\alpha) ^{235}\text{U}$. Encontramos em algumas referências que a presença de bolhas de material radioativo contendo uma massa de urânio maior que 100 Kg (cada bolha) poderiam, com a porcentagem de 23% de U^{235} no urânio natural, ter mantido o funcionando o reator a um nível de potência que varia entre 3-6 TW [22].

Como não existe a hipótese de nenhum elemento moderador no geo-reator central, as fissões devem ser promovidas através de absorção de nêutrons rápidos. Foi discutido no capítulo 2 que os nêutrons com energias maiores que 1 MeV podem sofrer colisões inelásticas com os núcleos, e em cada colisão muita energia pode ser perdida. Dessa forma, o tempo no qual o nêutron tem

[†] Chondritos enstatitos são um dos tipos de meteoritos rochosos. Eles contêm os elementos mais refratários e acredita-se que foram formados no interior do sistema solar.

energias maiores que o limiar para o espalhamento inelástico é muito pequeno. Assim, podemos, como uma simplificação, considerar que devido a estas colisões, todos os nêutrons se encontram com energias da ordem de 1 MeV e, a partir dos dados de seção de choque para nêutrons com essa energia, calcular o tamanho crítico do reator. Esta análise é semelhante à análise encontrada na literatura de reatores que possuem uma montagem do tipo “godiva”, conforme mostra a figura 23 [20]. Em um reator deste tipo, o urânio altamente enriquecido é fissionado principalmente por nêutrons rápidos. Se calcularmos a massa crítica necessária para manter a reação em cadeia utilizando as seções de choque do urânio para nêutrons de 1 MeV encontramos uma massa igual a 42 Kg , que é bastante próxima a massa real, que é de 50 Kg .

A tabela 3 contém os dados das seções de choque total, de absorção e de fissão para nêutrons de 1 MeV [20] [21].

Figura 23 - Montagem “godiva” para urânio metálico e nêutrons rápidos [20].

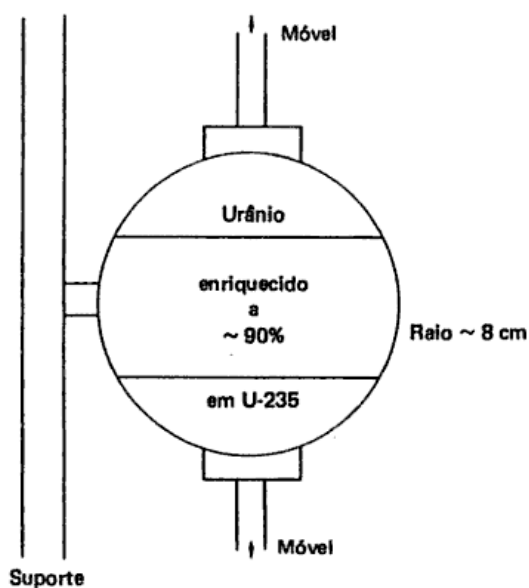


Tabela 3 – Seções de choque para nêutrons de 1 MeV .

Isótopo	$\sigma_T (b)$	$\sigma_a (b)$	$\sigma_f (b)$
U^{235}	6,7	1,65	1,4
U^{238}	6,9	0,255	0,095

A equação para difusão em regime estacionário, como demonstrado no capítulo 4, pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \rho - \left(\frac{1 - k_\infty}{L^2} \right) \rho = 0.$$

A rigor, ao invés de utilizarmos L^2 , deveríamos utilizar o comprimento de migração M^2 , que leva em conta a distância percorrida pelo nêutron antes da termalização, L_s , e a distância que ele percorre até ser absorvido, L , como mostra a equação (4.23). Contudo, como já discutido, os nêutrons atingem energias próxima a 1 MeV rapidamente devido às colisões inelásticas e, portanto, a distância que eles viajam até alcançarem estas energias é muito menor que L . Assim, podemos substituir M^2 por L^2 sem muito prejuízo nesta análise. O raio crítico, quando considerado que a densidade deve cair a zero nas regiões fora do reator é dado por (4.22):

$$R_c = \pi \sqrt{\frac{D_1}{(\chi_p - \chi_a)}} = \pi \frac{L}{\sqrt{k_\infty - 1}}.$$

A seção de choque para absorção do ^{235}U é igual 1,65 b, o que corresponde a 1,4 b para absorção com posterior fissão e 0,25 b para absorção sem fissão (captura radiativa). A taxa de produção de nêutrons é $\chi_p = \nu \Sigma_f v_n$ (nêutrons / s), onde Σ_f é a seção macroscópica para fissão do urânio com 23% de U^{235} , v_n é a velocidade média dos nêutrons e ν o número médio de nêutrons emitidos por fissão. Semelhantemente, a taxa de absorção é dada por $\chi_a = \Sigma_a v_n$ (nêutrons / s). A

densidade do urânio metálico é $19,1 \text{ g/cm}^3$, o que fornece $N = 0,048 \times 10^{24} \text{ (átomos/cm}^3\text{)}$. Com os dados da tabela 3 encontramos:

$$\Sigma_T = N \left(\frac{23}{100} \sigma_T^{U^{235}} + \frac{77}{100} \sigma_T^{U^{238}} \right) = 0,328 \text{ cm}^{-1}. \quad (7.1)$$

Da equação (2.35) temos que:

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{N \sigma_{tr}} = \frac{1}{N(\sigma_T + \sigma_s \bar{\mu})}, \quad (7.2)$$

onde $\sigma_{tr} = \sigma_T + \sigma_s \bar{\mu}$. Como para elementos com alto número de massa (caso do urânio) podemos fazer $\bar{\mu} \rightarrow 0$, então:

$$\lambda_{tr} \sim \frac{1}{N \sigma_T} = \lambda_T = \frac{1}{\Sigma_T} = 3,0395 \text{ cm}. \quad (7.3)$$

As seções de choque para fissão e para absorção do urânio enriquecido com 23% de U^{235} são:

$$\sigma_f = \frac{23}{100} \sigma_f^{35} + \frac{77}{100} \sigma_f^{38} = 0,3951 \quad (7.4)$$

e

$$\sigma_a = \frac{23}{100} \sigma_a^{35} + \frac{77}{100} \sigma_a^{38} = 0,5758, \quad (7.5)$$

assim, a equação para o raio crítico fornece:

$$R_c = \pi \sqrt{\frac{\frac{\lambda_{tr} v_n}{3}}{v N \sigma_f v_n - N \sigma_a v_n}} = 21,47 \text{ cm} \quad (7.6)$$

Logo, a massa crítica para um reator operando com nêutrons na faixa de 1 MeV e com enriquecimento de 23% do U^{235} no urânio natural é $M = (4\pi R^3/3) \times 19,1 \sim 737\text{ Kg}$ dos quais aproximadamente 169 Kg é de U^{235} .

7.1 MANUTENÇÃO DA CRITICALIDADE EM UM REATOR NUCLEAR

7.1.1 Reatividade

A estabilidade na produção de energia em um reator é uma tarefa difícil, pois depende de uma série de fatores. Uma quantidade que é normalmente utilizada para medir a estabilidade do reator é a reatividade. Ela é definida como razão entre a variação do número de nêutrons em duas gerações subseqüentes (por exemplo, geração 1 e geração 2) e o número de nêutrons na geração 2. Assim, se na geração 1 tínhamos N nêutrons, na geração 2 teremos kN nêutrons, de forma que a reatividade é dada por:

$$\rho = \frac{\Delta \text{POPULAÇÃO}_{2-1}}{\text{POPULAÇÃO}_2} = \frac{kN - N}{kN} = \frac{k-1}{k} \quad (7.7)$$

sendo $k = \eta f p \varepsilon (1-l_f)(1-l_t)$. Portanto, do ponto de vista da reatividade o sistema é dito crítico quando $\rho = 0$, subcrítico quando $\rho < 0$ ou supercrítico quando $\rho > 0$. Observamos que a reatividade é influenciada pelos fatores que determinam a criticalidade do reator, os quais podem ser divididos, de maneira geral, em dois grupos: fatores com efeito a médio e curto prazo e fatores com efeito a longo prazo. Como exemplo de um fator cujo efeito é imediato (curto prazo) é a introdução das varetas de materiais absorvedores (geralmente cádmio ou boro) nos reatores quando a potência se eleva. As varetas têm a finalidade de retirar nêutrons do sistema, diminuindo assim o fator de reprodução e conseqüentemente a produção de nêutrons. A queima do material combustível também afeta a produção de energia do reator, pois além de diminuir o número efetivo de átomos disponíveis para fissão, gera núcleos produtos cujos subseqüentes decaimentos podem dar origem a elementos altamente absorvedores de nêutrons. É claro que fatores externos, como a introdução de varetas absorvedoras não seriam o caso de um reator. Por isso,

vamos fixar nossa atenção apenas nos fatores que podem influenciar *naturalmente* a reatividade. Estes fatores são: a temperatura, a queima do combustível e a geração dos subprodutos da fissão.

7.1.2 O Efeito da Temperatura

Trocas na temperatura do combustível do reator podem mudar sua reatividade. Para entender de que forma isto acontece começaremos definindo o coeficiente da temperatura α_T :

$$\alpha_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}.$$

Na equação acima ρ é a reatividade e T é a temperatura do material em questão. Assim, em um reator tem-se diferentes coeficientes de temperatura, isto é, o coeficiente de temperatura do moderador, o coeficiente de temperatura do combustível, etc. Utilizando (7.7), α_T pode ser escrito como:

$$\alpha_T = \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dT}. \quad (7.8)$$

O fator de criticalidade é sempre positivo, de forma que α_T e dk/dT sempre terão o mesmo sinal. A consequência disso é que se o reator como um todo possui um coeficiente de temperatura positivo, o fator de multiplicação aumenta com um acréscimo na temperatura. Como resultado do aumento da temperatura e, conseqüentemente, da criticalidade, a potência do reator aumenta, ocasionando mais aumento na temperatura, o que faz aumentar ainda mais a criticalidade. Assim, um reator com coeficiente de temperatura positivo possui um alto grau de instabilidade. Por outro lado, se o reator possui um coeficiente de temperatura negativo, o fator de multiplicação diminui com o aumento da temperatura. Contudo, a diminuição do fator de criticalidade resulta em uma diminuição na potência do reator, que por sua vez leva a uma diminuição na temperatura, gerando, portanto um

estado de equilíbrio, razão pela qual a maioria dos reatores são construídos de maneira a terem um coeficiente de temperatura negativo.

No caso do reator natural, o qual não possui moderador e nem materiais estruturais, a análise é mais simples, pois reside apenas na influência da temperatura sobre o combustível. Neste caso, a temperatura pode afetar a reatividade de duas maneiras: pela mudança nas seções de choque das várias reações envolvidas no processo e pela variação na densidade do meio. A primeira delas é mais importante quando se trata de reatores térmicos, pois para baixas temperaturas as reações de ressonâncias se tornam mais prováveis que em alta temperatura. Contudo, para reatores rápidos este efeito é menos importante e pode ser desconsiderado. A segunda afeta diretamente a quantidade $R_c = \pi \left(L / \sqrt{k_\infty - 1} \right)$, pois o aumento da temperatura influencia no tamanho do volume do sistema. Para compreender como isto acontece, devemos antes entender a dinâmica do aquecimento no reator. Na referência [23], com algumas simplificações ao problema, encontramos uma análise do aquecimento para reatores esféricos em regime estacionário. Uma outra forma de abordar o problema incluindo a variável temporal pode ser encontrado em [12]. Partindo da densidade de corrente de calor $J = -k \nabla T$, e da equação para condução de calor:

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (7.9)$$

Na equação (7.9), $T(\vec{r}, t)$ é a distribuição de temperatura, q é a taxa de produção de energia por unidade de tempo e por unidade de volume, k é a condutividade térmica do meio, $\frac{1}{\alpha} = \frac{c\rho}{k} = \frac{1}{a^2}$, onde ρ é a densidade do meio e c o calor específico. Iremos seguir o mesmo raciocínio utilizado em [23], considerando q constante em todo reator e um sistema de resfriamento que retira calor do reator com uma eficiência tal que a temperatura de sua superfície permanece constante. A equação (7.9) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7.10)$$

em regime estacionário, a solução geral fica:

$$T(r) = -\frac{qr^2}{6k} + c_1 + \frac{c_2}{r}. \quad (7.11)$$

Impondo $T(r = R) = T_0$, então:

$$T_0 = -\frac{qR^2}{6k} + c_1 + \frac{c_2}{R}. \quad (7.12)$$

O calor produzido no volume total do reator é:

$$Q = q \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (7.13)$$

Impondo que o fluxo na superfície é igual ao calor produzido:

$$J4\pi R^2 = Q \rightarrow J(r = R) = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{qR}{3}. \quad (7.14)$$

Por outro lado, substituindo $J(r = R) = -k\nabla T|_{r=R}$, encontramos:

$$J(r = R) = \frac{2qR}{6} + \frac{kc_2}{R^2}. \quad (7.15)$$

Comparando (7.14) e (7.15), observamos que em regime estacionário, c_2 é necessariamente nula e, assim, a constante c_1 fica:

$$c_1 = \frac{qR^2}{6k} + T_0. \quad (7.16)$$

Substituindo na solução (7.11):

$$T(r) = -\frac{qr^2}{6k} + \frac{qR^2}{6k} + T_0, \quad (7.17)$$

e em termos do calor total:

$$T(r) = T_0 + \frac{Q}{8\pi Rk} - \frac{qr^2}{6k}. \quad (7.18)$$

A temperatura máxima ocorre em $r = 0$:

$$T_{r=0}^{máx} = T_0 + \frac{Q}{8\pi Rk} \quad (7.19)$$

a suposição $q = cte$ no interior do reator não é realista, visto que a taxa de produção de calor depende da população de nêutrons, quem em regime estacionário é proporcional a $\text{sen}(\pi r/R)/r$, de modo que fica mais interessante supormos que:

$$q(r) = Aq_0 \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r}. \quad (7.20)$$

Neste sentido, a equação em regime estacionário escreve-se como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{Aq_0}{k} \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r}. \quad (7.21)$$

A solução da homogênea fica:

$$T(r) = \frac{b_1}{r} + b_2, \quad (7.22)$$

e supondo uma solução particular na forma:

$$\rho(r) = \frac{B \text{sen} \omega r}{r}. \quad (7.23)$$

Substituindo esta última solução na equação diferencial e fazendo $\omega = \pi/r$, encontramos:

$$B = \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 \frac{q_0 A}{k}, \quad (7.24)$$

portanto:

$$T(r) = \frac{b_1}{r} + b_2 + \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 \frac{q_0 A}{k} \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r}. \quad (7.25)$$

Reescrevendo o termo de fonte na forma:

$$\frac{q_0 A}{k} \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r} = \frac{q_0}{k} \left(\frac{A}{R}\right) \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r/R} = \frac{q_0}{k} A' \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r/R} = \frac{q_0}{k} \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r/R},$$

onde fizemos $A' = 1$. Impondo $T(R) = T_0$, então $T_0 = \frac{b_1}{R} + b_2$. A densidade de corrente de calor é dada por:

$$J(R) = -k \nabla \left(\frac{b_1}{r} + b_2 + \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 \frac{q_0}{k} \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r/R} \right)_{r=R}, \quad (7.26)$$

que fornece:

$$J(R) = k \frac{b_1}{R^2} + \frac{q_0 R}{\pi}. \quad (7.27)$$

A quantidade de calor produzido é dada por:

$$Q = 4\pi \int_0^R r^2 q_0 \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r/R} dr = 4q_0 R^3. \quad (7.28)$$

Assumindo novamente que o fluxo na superfície é igual à quantidade de calor produzido:

$$J(r = R) = \frac{4q_0R^3}{4\pi R^2} = \frac{q_0R}{\pi}. \quad (7.29)$$

Comparando (7.27) e (7.29) encontramos que b_1 deve ser nula. A temperatura então fica sendo dada por:

$$T(r) = T_0 + \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 \frac{q_0}{k} \frac{\text{sen}(\pi r/R)}{r/R}. \quad (7.30)$$

A temperatura máxima, a qual ocorre em $r = 0$, é encontrada tomando-se o limite da expressão acima:

$$\lim_{r \rightarrow 0} T(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(T_0 + \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 \frac{q_0}{k} \frac{\pi \text{sen}(\pi r/R)}{\pi(r/R)} \right), \quad (7.31)$$

que fornece:

$$\lim_{r \rightarrow 0} T(r) = T_0 + \frac{q_0 R^2}{\pi k}. \quad (7.32)$$

Escrevendo q_0 em termos de Q :

$$q_0 = \frac{Q}{4R^3}, \quad (7.33)$$

e a temperatura máxima para este caso então fica:

$$T^{m\acute{a}x} = \lim_{r \rightarrow 0} T(r) = T_0 + \frac{Q}{4\pi k R}. \quad (7.34)$$

Como podemos observar comparando (7.34) com (7.19) a temperatura máxima é maior tomando-se a expressão $q(r)$ do que fazendo $q = cte$.

A despeito de qual seja a distribuição de fontes considerada, a solução transiente da equação:

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

pode ser escrita em termos de autofunções do sistema sem fontes na forma:

$$T_{trans}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right)}{r} e^{-\omega_n t}. \quad (7.35)$$

Com um pouco de álgebra obtemos $\omega_n = \frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2}$, onde $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

Observe então que o tempo característico do sistema, τ_T , é dado por:

$$\tau_T = \frac{R^2}{a^2 \pi^2}. \quad (7.36)$$

Substituindo $k = 27,5 W/mK$, $c = 300 J/KgK$ e a densidade do urânio metálico $\rho = 19100 Kg/m^3$, encontramos um tempo característico $\tau_T \sim 4 \times 10^3 s$.

7.1.3 Queima do Combustível

Como podemos ver através do fator de reprodução infinito, $k_{\infty} = \eta p f \varepsilon$, a queima do combustível afeta a criticalidade do reator, pois sendo $\eta = \nu \left(\frac{\sigma_f^c}{\sigma_a^c} \right)$, onde σ_a^c denota a seção de choque para absorção no combustível, podemos observar que em um reator regenerador, ou seja, um reator que contenha U^{238} e U^{235} , mas com a atuação U^{238} focada nas reações para produção do plutônio e, este por sua vez, na produção do combustível U^{235} , a alteração na concentração

do U^{235} afeta η . Isto fica mais claro quando escrevemos explicitamente em termos das seções de choque do U^{238} e do U^{235} . Chamando N^{35} e N^{38} as concentrações do U^{235} e do U^{238} :

$$\eta = \nu \frac{N^{35} \sigma_f^{35}}{N^{35} \sigma_f^{35} + N^{35} \sigma_r^{35} + N^{38} \sigma_a^{38}} = \nu \frac{\sigma_f^{35}}{\sigma_f^{35} + \sigma_r^{35} + \frac{N^{38}}{N^{35}} \sigma_a^{38}}, \quad (7.37)$$

onde σ_r^{35} é seção de choque para captura radioativa do U^{235} . Contudo, a queima do combustível é um processo muito lento: para um reator cuja a potência esteja na faixa de 100 KW , como deve ter sido o caso do reator de Oklo [9], podemos demonstrar que a fissão 1 g de U^{235} , considerando que a fissão de cada átomo libera, em média, uma energia igual a 200 MeV , é suficiente para alimentar o reator por 227 horas. Uma massa 169 Kg de U^{235} seria combustível suficiente para o reator por $3,8 \times 10^7$ horas, o que equivale a 4.300 anos. Do mesmo modo, a produção do U^{235} a partir do plutônio é um fator que interfere na criticalidade, porém de maneira a aumentar a reatividade do sistema.

7.2 PRODUÇÃO DE “VENENOS” EM UM REATOR NUCLEAR

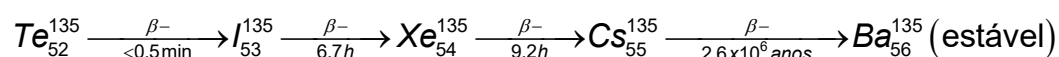
A fissão nuclear libera nêutrons e uma variedade de núcleos-produtos. O subsequente decaimento destes núcleos pode gerar elementos com alta seção de choque para absorção de nêutrons, os quais prejudicam a manutenção da reação em cadeia e por isso são conhecidos como “venenos”. Embora vários elementos produzidos pelo decaimento dos núcleos-produtos tenham uma significativa seção de choque para absorção dos nêutrons, dois deles necessitam de atenção especial devido ao alto valor da mesma, são eles o xenônio e o samário. O principal impacto dos venenos sobre a manutenção da criticalidade reside em sua atuação direta sobre f , a fração de nêutrons absorvidos pelo urânio em relação ao número total de nêutrons absorvidos, e conseqüentemente, no fator de multiplicação de nêutrons:

$$f = \frac{\Sigma_a^U}{\Sigma_a^U + \Sigma_a^P} = \frac{N^U \sigma_a^U}{N^U \sigma_a^U + N^P \sigma_a^P} \quad (7.38)$$

Assim, o aumento da quantidade de venenos no reator introduz uma variação negativa na criticalidade.

7.2.1 Xenônio

O xenônio pode ser produzido diretamente através da fissão, mas sua presença é mais comum devido ao seu aparecimento na cadeia de decaimento do telúrio (aproximadamente apenas 0,3% do xenônio presente no reator é proveniente da fissão, enquanto que cerca de 6% é proveniente do decaimento do iodo):



A meia vida do telúrio é tão pequena que podemos considerar que o iodo é emitido praticamente após a fissão. Embora ele permaneça por mais tempo no reator, sua atuação sobre a criticalidade do sistema não é muito significativa porque ele é um fraco absorvedor de nêutrons. Por outro lado o xenônio possui elevada seção de choque para absorção. Como cerca de 95% do decaimento do iodo produz xenônio, antes de analisarmos a variação na concentração do xenônio devemos considerar a variação na concentração do iodo. Neste ponto se torna necessário revisarmos algumas equações de decaimento radioativo.

O número de decaimentos radioativos em um tempo dt em determinada amostra de material é proporcional ao número de átomos radioativos $N(t)$ no instante t :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad (7.39)$$

onde λ é a constante de decaimento do elemento em questão. Supondo que estão sendo produzidos β átomos por segundo e por volume do elemento, então a variação na sua concentração será:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta - \lambda N(t). \quad (7.40)$$

Multiplicando ambos lados por $e^{\lambda t}$ e reagrupando os termos:

$$e^{\lambda t} \frac{dN(t)}{dt} + e^{\lambda t} \lambda N(t) = \beta e^{\lambda t} \rightarrow \frac{d}{dt} [N(t)e^{\lambda t}] = \beta e^{\lambda t} \quad (7.41)$$

Integrando adequadamente ambos lados encontramos:

$$N(t) = \frac{\beta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}). \quad (7.42)$$

No instante inicial temos $N(0) = 0$ e no equilíbrio, isto é, para $t \rightarrow \infty$, temos $N_{eq} = \beta/\lambda$.

A mudança na concentração do iodo deve ser igual a sua taxa de produção menos a taxa de decaimento e taxa de queima:

$$\frac{dN_I}{dt} = \gamma_I \Sigma_f^C \phi - \lambda_I N_I - \sigma_a^I N_I \phi, \quad (7.43)$$

onde N_I é a concentração (*átomos/cm³*) do iodo, γ_I é o rendimento na sua produção, Σ_f^C é a seção macroscópica para fissão do combustível, $\phi = \rho v_n$ (*nêutrons/cm² × s*) é o fluxo de nêutrons no reator, λ_I é a constante de decaimento e σ_a^I é a seção de choque para absorção do iodo, que por ser muito pequena iremos desprezar. Portanto:

$$\frac{dN_I}{dt} = \gamma_I \Sigma_f^C \phi - \lambda_I N_I. \quad (7.44)$$

A solução da equação acima é:

$$N_I(t) = \frac{\gamma_I \Sigma_f^C \phi}{\lambda_I} (1 - e^{-\lambda_I t}), \quad (7.45)$$

para $t = 0$ temos $N_I(0) = 0$ e no equilíbrio, ou seja, para $t \rightarrow \infty$, temos $N_I^{eq} = \frac{\gamma_I \Sigma_f^C \phi}{\lambda_I}$.

A variação da concentração do xenônio é dada pela equação abaixo:

$$\frac{dN_{Xe}}{dt} = \gamma_{Xe} \Sigma_f^C \phi + \lambda_I N_I - \lambda_{Xe} N_{Xe} - \sigma_a^{Xe} N_{Xe} \phi, \quad (7.46)$$

onde o primeiro e o terceiro termos do lado direito são, respectivamente, a taxa de produção e decaimento do xenônio, o segundo é a taxa de decaimento do iodo, e o quarto é taxa com que o xenônio está sendo consumido. Esta equação pode ser reescrita como:

$$\frac{dN_{Xe}}{dt} = \gamma_{Xe} \Sigma_f^C \phi + \lambda_I \Sigma_f^C \phi - \beta e^{-\lambda_I t} - \lambda_{Xe} N_{Xe} - \sigma_a^{Xe} N_{Xe} \phi, \quad (7.47)$$

onde $\beta = \lambda_I \Sigma_f^C \phi$. Chamando $\beta' = (\gamma_{Xe} + \lambda_I) \Sigma_f^C \phi$, $\lambda' = (\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi)$, a equação acima fica:

$$\frac{dN_{Xe}}{dt} = \beta' - \lambda' N_{Xe} - \beta e^{-\lambda_I t}. \quad (7.48)$$

Supondo uma solução da forma $N(t) = n(t) e^{-\lambda' t}$ encontramos:

$$N(t) = \frac{\beta'}{\lambda'} - \frac{\beta}{\lambda' - \lambda_I} e^{-\lambda_I t} - \frac{\beta'}{\lambda'} e^{-\lambda_I t} + \frac{\beta}{\lambda' - \lambda_I} e^{-\lambda_I t}. \quad (7.49)$$

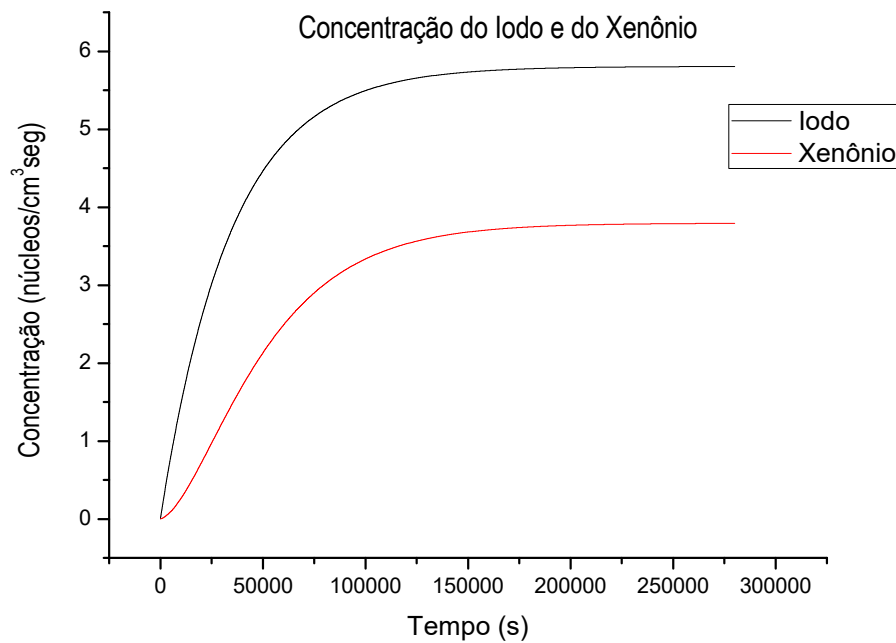
Substituindo os valores de β' , λ' e β obtemos:

$$N(t) = \frac{(\gamma_{Xe} + \lambda_I) \Sigma_f^C \phi}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi} \left(1 - e^{-(\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi)t} \right) - \frac{(\gamma_{Xe} + \lambda_I) \Sigma_f^C \phi}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi - \lambda_I} \left(-e^{-\lambda_I t} + e^{-(\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi)t} \right) \quad (7.50)$$

quando $t \rightarrow \infty$, a concentração de equilíbrio é $N_{Xe}^{eq} = \frac{(\gamma_{Xe} + \lambda_I) \Sigma_f^C \phi}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi}$. O gráfico da

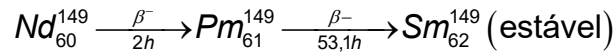
figura abaixo mostra a dependência da concentração do iodo e do xenônio com o tempo.

Figura 24 – Concentração dos principais “venenos” em um reator.



7.2.3 Samário

Embora tenha uma seção de choque menos expressiva que a do xenônio, o samário ainda é um forte absorvedor de nêutrons. Ele não é produzido diretamente através da fissão. Sua produção tem origem no decaimento:



Como a meia vida do neodímio é significativamente menor que a do promécio, podemos considerar o balanço na quantidade de samário a partir do promécio. A taxa de variação do promécio é dada por:

$$\frac{dN_{Pm}}{dt} = \gamma_{Pm} \Sigma_f^C \phi - \lambda_{Pm} N_{Pm}. \quad (7.51)$$

Semelhantemente ao caso anterior, na situação de equilíbrio, a quantidade de promécio no reator é dada por $N_{Pm}^{eq} = \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f^C \phi}{\lambda_{Pm}}$. O samário é um elemento estável, e como ele não é produzido através da fissão, a sua taxa de variação leva em conta apenas a taxa de decaimento do promécio e a sua taxa de “queima”. A taxa na variação do samário é escrita como:

$$\frac{dN_{Sm}}{dt} = \lambda_{Pm} N_{Pm} - \sigma_a^{Sm} N_{Sm} \phi. \quad (7.52)$$

Para o equilíbrio, a concentração de samário é $N_{Sm}^{eq} = \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f^C \phi}{\sigma_a^{Sm}}$.

7.3 TEMPOS CARACTERÍSTICOS DO GEO-REATOR

Primeiramente vamos analisar o tempo necessário para que o número de nêutrons no reator se estabilize. Considere para isso o gráfico da figura 21. Como mencionado no capítulo 5, os gráficos foram feitos em função das

variáveis multiplicadas por $(\pi a/R)^2$, e como no primeiro momento estávamos interessados apenas em analisar o comportamento dos fatores envolvidos no reator (densidade, número de nêutrons, etc.) fizemos $(\pi a/R)^2 = 1$. Contudo, queremos saber agora qual o tempo necessário para um reator, cujo raio seja da ordem de 21 cm , com coeficiente de difusão dado por $D = \lambda_r v_n / 3$, onde v_n é a velocidade dos nêutrons com energia igual a 1 MeV e λ_r é dado por (7.3), apresente $N(t) = cte$. A partir da figura 21, temos que este tempo é dado por:

$$\tau_N = 2,18 \frac{R^2}{\pi^2 a^2} = 2,18 \frac{R^2}{\pi^2 D} = 7,25 \times 10^{-6} \text{ s}.$$

Observe que o número de nêutrons se estabiliza de maneira quase instantânea. Este é um tempo muito menor do que do que o tempo característico, τ_T , da temperatura, que é da ordem de $4 \times 10^3 \text{ s}$.

Além dos dois tempos mencionados acima, também temos o tempo necessário para que os “venenos” da fissão atinjam o equilíbrio. Assim, observando a figura 24, vemos que o gráfico se estabiliza em aproximadamente $\tau_x = 140000 \text{ s} \sim 40 \text{ h}$, que é igual cerca de 4 vezes a meia vida do xenônio. Embora tenhamos calculado as concentrações somente para o iodo e para o xenônio, o resultado obtido é bastante geral, podendo-se demonstrar que para o restante dos elementos produzidos na fissão o tempo para que se atinja a concentração de equilíbrio é da ordem das meias-vidas dos elementos.

8 CONCLUSÕES

A idéia de um reator de fissão nuclear natural operando no centro da Terra seria viável tanto para explicar a origem de parte do calor proveniente do interior do planeta, quanto a origem do dínamo terrestre. Contudo, para que o tal reator possa ter funcionado por tanto tempo, é necessário a existência de um mecanismo capaz de retirar os produtos da fissão que atrapalham ou até mesmo impeçam a sua continuidade. Segundo uma das hipóteses admitidas por Herndon, o núcleo interno seria formado principalmente por urânio (em grande quantidade) e tório (em menor quantidade) e devido à ação gravitacional, os produtos de fissão seriam separados dos actínídeos mais pesados, mantendo, dessa forma, a massa crítica de combustível separada dos produtos de fissão [4]. Além disso, devido à reversibilidade do campo magnético, para que sua origem esteja no reator, este necessita ter funcionado de forma intermitente, parando e recomeçando o processo em certos intervalos de tempo. Esta é uma vantagem do geo-reator sobre as outras fontes de energia: a produção de energia pelo reator pode variar dependendo da composição e da disponibilidade de nêutrons. Dessa forma, a solução da equação da difusão dependente do tempo, a qual fornece a densidade de nêutrons no reator em função da posição e do tempo, toma um papel de grande importância para a análise da variação temporal da atividade do reator.

Como visto no decorrer do trabalho, o número de nêutrons no reator é influenciado por uma série de fatores, tendo sido útil então definir a reatividade. Dentre os fatores que podem influenciar naturalmente na reatividade do reator, destacamos a temperatura, a produção de elementos nocivos e a queima de combustível. Foi mencionado no último capítulo que a variação na quantidade de combustível em um reator de baixa potência causa efeitos a muito longo prazo na reatividade. Juntando este fato com a produção de combustível pelas reações de regeneração, podemos, a princípio, desconsiderar a queima do combustível como fator influenciador da reatividade. Discutiremos, portanto, as situações críticas, subcríticas e supercríticas no reator a partir de uma massa inicial de urânio, considerando a geração de subprodutos e o efeito da temperatura.

Neste cenário, podemos então imaginar uma determinada massa de urânio enriquecido a ponto de formar um sistema levemente super-crítico. Cada

átomo de urânio funciona como uma fonte súbita e a densidade é obtida pela superposição destas várias fontes – equação (5.51). A população de nêutrons cresce rapidamente dado que o tempo característico para este processo, τ_N – fornecido pela equação (7.53) – é da ordem de microssegundos. Devido à energia liberada pela fissão, a temperatura do meio aumenta e o reator se aquece. O processo de aquecimento é regido pela equação de difusão de calor com tempo característico τ_T – fornecido pela equação (7.36). Com o aquecimento o combustível se expande, diminuindo assim a densidade do sistema e, conseqüentemente, a quantidade de fissões também se reduzirá. Com o número de fissões reduzido, a população de nêutrons no reator diminui podendo, inclusive, levar o sistema a níveis subcríticos, de forma a “desligar” o reator. Assim, podemos entender a temperatura como uma chave que liga e desliga o reator. Quando a população de nêutrons é nula ou muito pequena, inicia-se o processo de resfriamento, também regido pelo tempo característico τ_T . Com o resfriamento e conseqüente aumento na densidade de combustível, o sistema pode, utilizando-se de uma população remanescente de nêutrons ou de algumas fissões espontâneas, estabilizar-se em um dado volume e uma dada distribuição de temperatura, e assim operar em regime crítico por algum tempo. Se por algum motivo a temperatura do meio volta a aumentar (isto poderia ocorrer devido, por exemplo, a uma falha na retirada de calor), a densidade de combustível tende a diminuir, ocasionando um novo ciclo de resfriamento. O sistema dessa forma se mantém em equilíbrio por um longo tempo (enquanto houver combustível disponível), intercalando períodos críticos, supercríticos e subcríticos.

É importante ressaltar que, embora tenhamos considerado no parágrafo acima o efeito da temperatura como sendo o determinante para o próximo regime, um mecanismo para a retirada dos “venenos” é imprescindível, pois, embora haja estabilização na população dos átomos de Xe e Sm , dependendo da potência em que trabalha o reator, os efeitos dos subprodutos podem, assim como a temperatura, levar o reator ao desligamento. A queima do veneno gerará subprodutos não muito absorvedores, mas cujo acúmulo continuado pode acarretar a inviabilidade da reação em cadeia. Um mecanismo de retirada destes elementos e a dinâmica deste processo precisam ser encontrados e compreendidos.

Quanto à geração total de calor, para dar conta da potência presumida que deve ter o reator central, um certo número de bolhas é necessário. A

dinâmica do processo responsável pelo ligamento e desligamento deste conjunto de fontes que trocam calor entre si e com o meio externo ainda precisa ser entendida. Uma vez determinada esta dinâmica e conhecidas as variações temporais do número de nêutrons, da concentração de venenos e da temperatura, seríamos capazes de verificar se há algum padrão na variação da potência do reator geo-reator. Finalmente, se o geo-reator está ligado com a origem do campo magnético, poderemos explorar os possíveis efeitos da variação da sua potência sobre a variabilidade do campo magnético como forma de examinar a validade da proposta de Herndon.

REFERÊNCIAS

- [1] FIORENTINI, Gianni, LISSIA, Marcelo, MANTOVANI, Fabio, VANUCCI, Riccardo. "Geo-Neutrinos: a short review". **Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)**, Vol. 143, p. 53-59, 2005.
- [2] FIORENTINI, Gianni, LISSIA, Marcelo, MANTOVANI. "Geo-neutrinos and the Earth's interior", **Phys. Rept.**, Vol. 453, p. 117-172, 2007.
- [3] G. Domogatski, V. Kopeinkin, L. Mikaelyan, V. Sinev. "Neutrino Geophysics at Baksan I: Possible Detection of Georeactor Antineutrinos", **Phys. Atom. Nucl.** Vol. 68 p. 69-72, 2005.
- [4] HOLLENBACH, D. F., HERNDON, J. M., "Deep-Earth: Nuclear fission, helium, and the geomagnetic field". **PNAS** Vol. 98 n. 20, p. 11085-11090, set/2001.
- [5] HERNDON J. Marvin, EDGERLEY, Dennis. "Background for terrestrial antineutrino investigations: radionuclide distribution, georeactor fission events, and boundary conditions on fission power production". Submetido a **Proc. R. Soc. Lond.,A**. Disponível em arXiv:hep-ph/0501216v4.
- [6] J. M. Herndon, "Substructure of the inner core of the Earth", **PNAS** vol. 93 n. 2, p. 646-648, 1996.
- [7] LEANERD, John. G., DYE, Stephen T., PAKVASSA, Sandip. "Neutrino geophysics conference introduction", Vol. 99, n. 1-4, p. 1-15, dez/2006.
- [8] KAPLAN, Irving. Física Nuclear. Guanabara, 1978, 633 p.
- [9] MUKHIN, K. N. Experimental Nuclear Physics, Vol. I. Mir Publishers, 1987.
- [10] KRANE, Keneth S. Introductory Nuclear Physics. John Wiley & Sons. 845 p. 1988.
- [11] LAMARSH, John R., Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison-Wesley, 1972, 585 p.
- [12] MORSE, Philip, FESHBACH, Herman, Methods of theoretical physics. MacGraw Hill Book Company. 1978 p.
- [13] WYLD, Henry William. Mathematics methods for physics. Addison Wesley, 1994. 628 p.
- [14] GREINER, Walter, REINHARDT, Joachim. Quantum Electrodynamics, 3 ed. Springer 2003.
- [15] BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Guanabara, 1988.

- [16] J. M. Herndon, "The chemical composition of the interior shells of the Earth", Proc. R. Soc. A, 1980 A 371, p. 149-154.
- [17] GUTENBERG, B., RICHER, C. F. Mon. Nat. Roy, astr. Soc. geophys. Suppl. 4, p. 363-372, 1938.
- [18] LEHMANN, I. Publs. Bur. cent. seis. int. A, 14, p. 3-31, 1936
- [19] Dziewonsk, A. M., GILBERT, F. Nature, 234, p. 393-446, 1971.
- [20] MURRAY, Raymond L. Energia Nuclear. Hemus, 2004, 292 p.
- [21] ALLEN, R. C., WALTON R. B., PERKINS R. B., OLSON, R. A., TASCHEK, R. F. "Interactions of $0,5 \text{ e } 10 \text{ MeV}$ neutrons with some heavy elements". Physical Review. Vol 104, n. 3, nov/2006.
- [22] HERNDON, J. M., Nuclear Georeactor Origin of Oceanic Basalt He-3/He-4, Evidence, and Implications, PNAS, Vol. 100, n. 6, p. 3047-3050, mar/2003.
- [23] CHALKO, T. J., No second chance? Can Earth explode as a result of global warming?. NU Journal of Discovery, V. 3, p. 1-9, 2001.

APÊNDICE

APÊNDICE A – Densidade de Nêutrons Criada a Partir da Fonte Extensa no Caso Dependente do Tempo

A densidade de nêutrons gerada pela fonte extensa a partir da superposição de várias fontes pontuais. Assim, devemos integrar a função de Green no volume que contém as fontes, dV_0 , e no tempo, contado a partir de t_0 :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_0^t \left(\int_{V_0} \frac{q_0}{[4\pi a^2 (t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}{4a^2(t-t_0)}} dV_0 \right) dt_0$$

A.1 Densidade de Nêutrons na Região sem Fontes

Começaremos com a região $r > R$, pois a integração é mais simples. Reescrevendo a equação acima:

$$\rho_f(\vec{r}, t) = q_0 \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{[4\pi a^2 (t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{r}^2 + \vec{r}_0^2 - 2\vec{r}\vec{r}_0 \cos \theta)}{4a^2(t-t_0)}} r_0^2 dr_0 \sin \theta d\theta d\phi \right) dt_0 \quad (\text{A.1})$$

Fazendo $u = -\frac{(\vec{r}^2 - \vec{r}_0^2 - 2\vec{r}\vec{r}_0 \cos \theta)^2}{4a^2(t-t_0)}$, a equação acima pode ser

colocada na forma:

$$\rho_f(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{t-t_0}} dt_0 \left(\int_0^R \frac{r_0 dr_0}{r} \int_{\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}}^{\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} e^u du \right) \quad (\text{A.2})$$

Realizando a integração em du :

$$\rho_f(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R r_0 e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 - \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R r_0 e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \quad (\text{A.3})$$

Chamando $\rho_f(\vec{r}, t) = I_1 + I_2$, com:

$$I1 = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R r_0 e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \quad (\text{A.4})$$

e

$$I2 = -\frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R r_0 e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \quad (\text{A.5})$$

Fazendo $u = \frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}$, a integral I_1 pode ser reescrita como:

$$I1 = \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t dt_0 \sqrt{t-t_0} \int_{\frac{(r-R)^2}{4a^2(t-t_0)}}^{\frac{r^2}{4a^2(t-t_0)}} e^{-u} du + \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \quad (\text{A.6})$$

ou

$$I1 = \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t dt_0 \sqrt{t-t_0} \left(e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(r-R)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right) + \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \quad (\text{A.7})$$

Para a integral I_2 fazemos $u = \frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}$ para obter:

$$I2 = -\frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t dt_0 \sqrt{t-t_0} \int_{\frac{(r+R)^2}{4a^2(t-t_0)}}^{\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} e^{-u} du + \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \quad (\text{A.8})$$

$$I_2 = \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t dt_0 \sqrt{t-t_0} \left(e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t_0)}} \right) + \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \quad (\text{A.9})$$

A densidade então fica:

$$\rho_f(\vec{r}, t) = \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t dt_0 \sqrt{t-t_0} \left(e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(r-R)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right) + \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt_0}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R \left(e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} + e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right) dr_0 \quad (\text{A.10})$$

É conveniente desmembrar os termos de (A.10) fazendo

$$\rho_f(\vec{r}, t) = I_1^\alpha + I_2^\alpha + I_3^\alpha + I_4^\alpha$$

Começaremos calculando a integral I_1^α :

$$I_1^\alpha = \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^t dt_0 \sqrt{t-t_0} e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2(t-t_0)}} \quad (\text{A.11})$$

Fazendo a mudança de variável $u = \frac{(r+R)}{2a^2(t-t_0)^{1/2}}$ e utilizado a função

erro:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \rightarrow \begin{cases} \operatorname{erf}(\infty) = 1 \\ \operatorname{erf}(0) = 0 \end{cases}$$

A integral fica:

$$I_1^\alpha = \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_{\frac{\alpha_1}{\sqrt{t}}}^{\infty} 2\alpha_1^3 \frac{e^{-u^2}}{u^4} du \quad (\text{A.12})$$

Chegamos a:

$$I_1^\alpha = -\frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \frac{2}{3} e^{-\frac{\alpha_1^2}{t}} \left(\frac{2\alpha_1^2}{\sqrt{t}} - 1 \right) t^{3/2} + \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \alpha_1^3 \frac{8}{3} \int_{\frac{\alpha_1}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

onde $\alpha_1 = \frac{(r+R)}{2a}$. Semelhantemente calculamos I_2^α e encontramos

$$I_2^\alpha = \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \frac{2}{3} e^{-\frac{\alpha_2^2}{t}} \left(\frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{t}} - 1 \right) t^{3/2} + \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \alpha_2^3 \frac{8}{3} \int_{\frac{\alpha_2}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (\text{A.13})$$

onde $\alpha_2 = \frac{(r-R)}{2a}$. A soma de I_1^α com I_2^α resulta em $I_1^\alpha + I_2^\alpha = IA + IB + IC + ID + IE$.

A integral I_3^α é:

$$I_3^\alpha = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(\frac{1}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \right) dt_0 \quad (\text{A.14})$$

Primeiro trabalhamos com a integral em dt_0 usando a variável

$u = \frac{(r+r_0)}{2a(t-t_0)^{1/2}}$. Esta integral resulta em:

$$I_3^\alpha = \frac{q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^R (\sqrt{t}) e^{-\frac{\alpha_3^2}{t}} dr_0 - \frac{q_0}{a} \int_0^R \alpha_1 dr_0 + \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^R \alpha_3 dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_3}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \quad (\text{A.15})$$

onde $\alpha_3 = \frac{(r+r_0)}{2a}$. A primeira integral de I_3^α pode ser ajustada de maneira a

fornecer:

$$I_3^\alpha = \frac{2q_0 t}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{r+R}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{r}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right) - \frac{q_0}{a} \int_0^R \alpha_3 dr_0 + \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^R \alpha_3 dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_3}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \quad (\text{A.16})$$

De modo semelhante podemos encontrar para I_4^α :

$$I_4^\alpha = \frac{2q_0 t}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{r}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{r-R}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right) - \frac{q_0}{a} \int_0^R \alpha_4 dr_0 + \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^R \alpha_4 dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_4}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du$$

onde $\alpha_4 = \frac{(r-r_0)}{2a}$. Somando I_3^α e I_4^α :

$$\begin{aligned} I_3^\alpha + I_4^\alpha &= -\frac{q_0}{a} \int_0^R (\alpha_3 + \alpha_4) dr_0 \leftrightarrow I_B^\alpha \\ &+ \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^R \alpha_3 dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_3}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du + \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^R \alpha_4 dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_4}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \leftrightarrow I_C^\alpha \\ &\frac{2q_0 t}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{r+R}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{r-R}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right) \leftrightarrow I_A^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A integração em I_B^α é direta e fornece:

$$I_B^\alpha = \frac{q_0}{a} \int_0^R (\alpha_3 + \alpha_4) dr_0 = \frac{-q_0}{a^2} Rr \quad (\text{A.18})$$

A densidade é dada pela soma:

$$\rho_f(\vec{r}, t) = IA + IB + IC + ID + IE + I_A^\alpha + I_B^\alpha + I_C^\alpha \quad (\text{A.19})$$

Para verificar a conformidade da solução transiente com a solução estacionária, devemos analisar os termos quando $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} IA = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \left[\frac{4}{3} e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2 t}} \left(\frac{r^2 + R^2}{4a^2} \right) \right] \left(e^{\frac{2rR}{4a^2 t}} - e^{-\frac{2rR}{4a^2 t}} \right) \sqrt{t} \right\} = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} IB = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \left[\frac{4}{3} e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2 t}} \left(\frac{r^2 + R^2}{4a^2} \right) \right] \left(e^{\frac{2rR}{4a^2 t}} - e^{-\frac{2rR}{4a^2 t}} \right) \sqrt{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{4}{3} \frac{q_0 R \sqrt{t}}{a \sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} IC = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \left(\frac{2}{3} e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2 t}} \right) \left(e^{\frac{2rR}{4a^2 t}} - e^{-\frac{2rR}{4a^2 t}} \right) t^{3/2} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3} \frac{q_0 R \sqrt{t}}{a \sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$ID = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \frac{(6Rr^2 + 2R^3)}{8a^3} = \frac{q_0 R^3}{3a^2} \frac{1}{r} + \frac{q_0 Rr}{a^2} \quad (\text{A.23})$$

Para calcular o limite de IE usamos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \rightarrow \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du = \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}} (1 - u^2 + \dots) du = \left[u - \frac{u^3}{3} + \dots \right]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}} \quad (\text{A.24})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} IE = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} \alpha_2^3 \int_0^{\frac{\alpha_2}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \frac{8}{3} \alpha_1^3 \int_0^{\frac{\alpha_1}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right) = 0 \quad (\text{A.25})$$

os limites I_A^α e I_C^α , quando o tempo tende ao infinito fornecem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_A^\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{2q_0 t}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{r+R}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{r-R}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2q_0 R \sqrt{t}}{a \sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_C^\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2q_0}{a \sqrt{\pi}} \int_0^R \alpha_3 dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_3}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du + \frac{2q_0}{a \sqrt{\pi}} \int_0^R \alpha_4 dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_4}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Somando todos os termos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\vec{r}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (IA + IB + IC + ID + IE + I_A^\alpha + I_B^\alpha + I_C^\alpha) \quad (\text{A.28})$$

Portanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_f(\vec{r}, t) = \frac{q_0 R^3}{3a^2} \frac{1}{r} \quad (\text{A.29})$$

Como queríamos demonstrar, a solução dependente do tempo tende para a solução estacionária quando $t \rightarrow \infty$.

A.2 Densidade de Nêutrons na Região com Fontes

Partiremos novamente da equação (A.1). Manipulando-a chegamos nas mesmas equações I_1^α , I_2^α , I_3^α , I_4^α obtidas na região $r > R$. Porém, devemos observar que a constante α_2 que aparece em I_2^α deve ser redefinida, valendo agora $\alpha_2 = \frac{(R-r)}{2a}$, pois de outra forma a integral que aparece em (A.13) não seria bem definida, uma vez que $r - R$ é negativo e seus limites passariam pelo zero.

A soma $I_1^\alpha + I_2^\alpha$ resulta em:

$$\begin{aligned}
I_1^\alpha + I_2^\alpha = & \underbrace{\frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \left[\frac{4}{3} e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2 t}} \left(\frac{r^2 + R^2}{4a^2} \right) \right]}_{IA} \left(e^{\frac{2rR}{4a^2 t}} - e^{-\frac{2rR}{4a^2 t}} \right) \sqrt{t} \\
& + \underbrace{\frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \left[\frac{4}{3} e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2 t}} \left(\frac{2rR}{4a^2} \right) \right]}_{IB} \left(e^{\frac{2rR}{4a^2 t}} + e^{-\frac{2rR}{4a^2 t}} \right) \sqrt{t} \\
& + \underbrace{\frac{q_0 a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \left(\frac{2}{3} e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2 t}} \right)}_{IC} \left(e^{\frac{2rR}{4a^2 t}} - e^{-\frac{2rR}{4a^2 t}} \right) t^{3/2} \\
& + \underbrace{\frac{q_0 r^2}{3a^2} + \frac{q_0 R^2}{a^2}}_{ID} + \underbrace{\frac{8}{3} \alpha_2^3 \int_0^{\frac{\alpha_2}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \frac{8}{3} \alpha_1^3 \int_0^{\frac{\alpha_1}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du}_{IE}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

O cálculo de I_3^α para a região fora é idêntica à região dentro. Porém o cálculo de I_4^α muda levemente por conta do mesmo reajuste dos limites que foi feito para I_2^α . Veja:

$$I_4^\alpha = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(\frac{1}{2a\sqrt{t-t_0}} \int_0^R e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dr_0 \right) dt_0 \tag{A.31}$$

$$I_4^\alpha = \underbrace{\frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^r \left(\int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{t-t_0}} e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dt_0 \right) dr_0}_{\beta_1} + \underbrace{\frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \int_r^R \left(\int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{t-t_0}} e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2(t-t_0)}} dt_0 \right) dr_0}_{\beta_2} \tag{A.32}$$

Para a integração em dt_0 de β_1 fazemos a mudança $u = \frac{(r-r_0)}{2a(t-t_0)^{1/2}}$:

$$\beta_1 = \frac{q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^r (\sqrt{t}) e^{-\frac{(\alpha_4^{\beta_1})^2}{\sqrt{t}}} dr_0 - \frac{q_0}{a} \int_0^r \alpha_4^{\beta_1} dr_0 + \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^r \alpha_4^{\beta_1} dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_4^{\beta_1}}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \tag{A.33}$$

Com $\alpha_4^{\beta_1} = \frac{(r-r_0)}{2a}$. Em seguida utilizamos $u = \frac{(r-r_0)}{2a\sqrt{t}}$ o que resulta

em:

$$\beta_1 = \frac{2q_0 t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \frac{q_0}{a} \int_0^r \alpha_4^{\beta_1} dr_0 + \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^r \alpha_4^{\beta_1} dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_4^{\beta_1}}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \quad (\text{A.34})$$

De maneira análoga encontramos a expressão para β_2 :

$$\beta_2 = \frac{2q_0 t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R-r}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \frac{q_0}{a} \int_r^R \alpha_4^{\beta_2} dr_0 + \frac{2q_0}{a\sqrt{\pi}} \int_r^R \alpha_4^{\beta_2} dr_0 \int_0^{\frac{\alpha_4^{\beta_2}}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \quad (\text{A.35})$$

Onde $\alpha_4^{\beta_2} = \frac{(r_0-r)}{2a}$. A densidade é então dada por:

$$\begin{aligned} \rho_d(\vec{r}, t) &= (IA + IB + IC + ID + IE + I_3^\alpha + I_4^\alpha) \\ &= IA + IB + IC + ID + IE + I_3^\alpha + \beta_1 + \beta_2 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

onde a soma $I_3^\alpha + I_4^\alpha$ fornece:

$$\begin{aligned} I_3^\alpha + I_4^\alpha &= q_0 t \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{t}}\right) - \frac{q_0}{a} \int_0^R \alpha_4 dr_0 + \frac{q_0}{a} \int_0^R \alpha_4 dr_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_4}{\sqrt{t}}\right) \\ &\quad q_0 t \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{t}}\right) - \frac{q_0}{a} \int_r^R \alpha_4^{\beta_2} dr_0 + \frac{q_0}{a} \int_r^R \alpha_4^{\beta_2} dr_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_4^{\beta_2}}{\sqrt{t}}\right) \\ &\quad - \frac{q_0}{a} \int_0^r \alpha_4^{\beta_1} dr_0 + \frac{q_0}{a} \int_0^r \alpha_4^{\beta_1} dr_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_4^{\beta_1}}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Quando o tempo tende ao infinito a densidade é dada por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_d(\vec{r}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (IA + IB + IC + ID + IE + I_A^\alpha + I_B^\alpha + I_C^\alpha) \quad (\text{A.38})$$

forneendo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_d(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{2a^2} R^2 - \frac{q_0}{6a^2} r^2 \quad (\text{A.39})$$

que é a solução estacionária.