



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

RODRIGO MORENO LUNA

**COHOMOLOGIAS DE DE RHAM E DOUBEAULT EM
TEORIAS DE CAMPO ABELIANO**

Londrina
2010

RODRIGO MORENO LUNA

**COHOMOLOGIAS DE DE RHAM E DOUBEAULT EM
TEORIAS DE CAMPO ABELIANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em física.

Orientador: Prof. Dr. Andrey A. Bytsenko

Londrina
2010

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina.**

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

L961c Luna, Rodrigo Moreno.
Cohomologias de de Rham e Doubeault em teorias de campo abeliano / Rodrigo
Moreno Luna. – Londrina, 2010.
ix, 53 f. : il.

Orientador: Andrey A. Bytsenko.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Centro
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2010.

1. Física matemática – Teses. 2. Invariância de calibre – Teses. 3. Formas diferenciais
– Teses. 4. Teoria de campos (Física) – Teses. I. Bytsenko, Andrey A. II. Universidade
Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas . Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

CDU 53:51

RODRIGO MORENO LUNA

**COHOMOLOGIAS DE DE RHAM E DOUBEAULT EM TEORIAS DE
CAMPO ABELIANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Andrey A. Bytsenko
Universidade Estadual de Londrina

Prof Dr. Manuel Simões Filho
Universidade Estadual de Londrina

Profa. .Dra. Maria Emília Xavier Guimarães
Universidade Federal Fluminense

Londrina, 09 de abril de 2010.

Este trabalho é dedicado à todos meus amigos e familiares

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Bytsenko pela paciência e ajuda nesses anos.

Agradeço aos meus bons amigos David Simeão Cobo e Flávio Franchello pelos dias de riso e de muito trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro

E principalmente agradeço à minha família por me apoiar incondicionalmente

A Todos vocês, muito obrigado.

.

LUNA, R. N. **Cohomologias de de Rham e Doubeault em Teorias de Campo Abeliano.** 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina

RESUMO

Nesta dissertação analisamos formas diferenciais e suas relações com as cohomologias de Rham e de Dolbeault. Discutimos as aplicações dessas cohomologias em teorias de campo abelianas.

Palavras chave: Cohomologias. Gauge. Formas diferenciais.

LUNA, R. N. **De Rham and Dolbeault Cohomologies on Abelian Field Theories.** 2010.
Dissertation (Master's Degree in Physics) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina

ABSTRACT

In this dissertation we analyze the differential forms with its relations to the de Rham and Dolbeault cohomologies. We discuss the applications of these cohomologies to the abelian field theories.

Keywords: Cohomology. Gauge. Differential forms.

Cohomologias de de Rham e Doulbeault em Teorias de Campo Abeliano

1	Preliminares	1
1.1	Variedade Diferenciável	1
1.1.1	Definição	2
1.1.2	Funções Diferenciáveis	3
1.2	Espaço Tangente	5
1.3	Espaço Cotangente	7
1.4	Tensores	9
1.5	Relação de Equivalência	10
1.6	Grupos e Álgebras de Lie	11
1.6.1	Grupos de Lie e suas Ações	11
1.6.2	Álgebras de Lie	13
2	Formas	15
2.1	Introdução	15
2.2	Derivada Exterior	18
2.3	Formas Fechadas e Exatas	19
2.4	Operador Estrela de Hodge	20
2.4.1	O Operador Codiferencial	21
2.5	Formas Harmônicas	22
3	Cohomologia de de Rham	24
3.1	Complexo de co-cadeias	24
3.2	Invariância Difeomórfica da Cohomologia de de Rham	25

3.3	Grupos de Cohomologia de de Rham	26
3.4	Lema de Poincaré	28
3.5	Aplicação do Lema de Poincarè	31
4	Campos de Gauge	33
4.1	Campos de Gauge e Conexões	33
4.2	Teoria de Chern-Simons Abeliana	35
4.3	Generalização da Teoria de Chern-Simons	36
5	Variedades Complexas	38
5.1	Variedades Riemanianas	38
5.2	Funções Holomórficas	39
5.3	As Variedades Complexas	39
5.4	Espaço Tangente Complexificado	40
5.5	Formas Holomórficas e Campos Vetoriais	42
5.5.1	Decomposição do Espaço Exterior Complexificado	42
5.5.2	Objetos Holomórficos em Variedades Complexas	43
6	Cohomologia de Dolbeault	46
6.1	Definindo	46
6.2	Aplicação	47
7	Conclusão	49
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICES	52
	A Homologia	52
	B Propriedades de Integração	53

A compreensão humana não é um exame desinteressado, mas recebe infusões da vontade e dos afetos; disso se originam ciências que podem ser chamadas “ciências conforme a nossa vontade”. Pois um homem acredita mais facilmente no que gostaria que fosse verdade. Assim, ele rejeita coisas difíceis pela impaciência de pesquisar; coisas sensatas, porque diminuem a esperança; as coisas mais profundas da natureza, por superstição; a luz da experiência, por arrogância e orgulho; coisas que não são comumente aceitas, por deferência à opinião do vulgo. Em suma, inúmeras são as maneiras, e às vezes imperceptíveis, pelas quais os afetos colorem e contaminam o entendimento.

Francis Bacon, *Novum Organon* (1620).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedade Diferenciável

Modelos matemáticos para muitos sistemas físicos possuem variedades como objetos básicos de estudo. Por exemplo variedades simpléticas são modelos para a mecânica analítica. A idéia básica das variedades diferenciáveis é introduzir objetos locais que suportarão processos de diferenciação onde possamos definir mapas diferenciáveis, tensores, formas diferenciais e que, além disso, una essas estruturas de maneira suave.

A grosso modo, uma variedade diferenciável é um espaço matemático que, numa escala suficientemente pequena, comporta-se como um espaço euclidiano com uma certa dimensionalidade n , chamada dimensão da variedade. Exemplos de variedades são curvas e superfícies. Quando se olha para uma superfície bem comportada nota-se que, localmente, esta pode ser obtida em um pequeno domínio de um plano. Neste caso, verifica-se que um ponto desta superfície é descrito por dois parâmetros (duas coordenadas) em um plano; por este motivo diz-se que superfícies são variedades diferenciáveis bi-dimensionais.

Em geral é impossível obter toda a superfície num dado domínio de um plano, para isso precisamos “colar” vários outros domínios. Em outras palavras, as coordenadas não são sempre definidas em toda a superfície, ao contrário do caso do plano. Tais coordenadas são chamadas coordenadas locais e a “suavidade” de uma superfície é refletida nas relações entre elas. Uma variedade diferenciável é um espaço topológico tal que qualquer ponto nele possui uma vizinhança cujos pontos podem ser descritos por coordenadas locais com n parâmetros indepen-

dentes e as relações entre coordenadas locais diferentes podem ser descritas por funções diferenciáveis.

1.1.1 Definição

Seja M um espaço de **Hausdorff**, em outras palavras, para dois pontos distintos $p, q \in M$ existem abertos U e V tais que $p \in U$ e $q \in V$ e $U \cap V = \emptyset$ e também que exista um número finito de abertos U_i que recubram M , **axioma de base enumerável**, podemos definir que

Definição 1.1 M é uma variedade topológica se este for um espaço de **Hausdorff** que satisfaz o **axioma de base enumerável** e possui um ponto arbitrário cuja vizinhança é homeomórfica a \mathbb{R}^n .

Podemos mapear uma variedade topológica M com abertos que a recobrem, mas é necessário “colar” esses mapas. Supondo que dois mapas se intersectam, dizemos que tais abertos são unidos por um homeomorfismo

$$f_{\alpha\beta}: \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta). \quad (1.1)$$

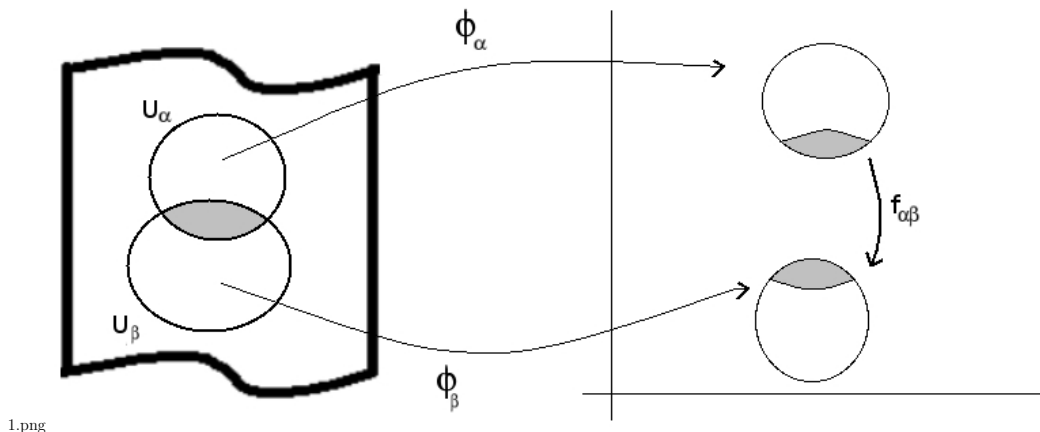


Fig. 1.1 – Exemplo de homeomorfismo.

Como $f_{\alpha\beta}$ é um mapa de um aberto em \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^n , ele é descrito como $f_{\alpha\beta} = (f_{\alpha\beta}^1, \dots, f_{\alpha\beta}^n)$, sendo as funções $f_{\alpha\beta}^i$ contínuas. Escolhendo um ponto arbitrário p em $(U_\alpha \cap U_\beta)$, $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ com respeito a (U_α, ϕ_α) e $(y_1(p), \dots, y_n(p))$ com respeito a (U_β, ϕ_β) , existe uma relação tal que

$$y_i(p) = f_{\alpha\beta}^i(x_1(p), \dots, x_n(p)). \quad (1.2)$$

Esse homeomorfismo $f_{\alpha\beta}$ descreve a relação entre duas coordenadas locais, ou seja, descreve uma mudança de coordenada. Numa variedade diferenciável é necessário que todas as mudanças de coordenadas sejam difeomorfismos.

Definição 1.2 M é uma variedade diferenciável n -dimensional se:

- M é um espaço topológico.
- M possui uma família de pares (U_α, ϕ_α) .
- U_α é uma família de abertos que recobrem M , ou seja, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$. ϕ_α é um homeomorfismo de U_α para um aberto U'_α de \mathbb{R}^n .
- Dados U_α e U_β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, o mapa $f_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ de $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ para $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é infinitamente diferenciável.

Onde ϕ_α é a função coordenada e o aberto U_α é a vizinhança da coordenada. O par (U_α, ϕ_α) é chamado de **mapa** enquanto toda a família de pares (U_α, ϕ_α) é chamada de **atlas**.

1.1.2 Funções Diferenciáveis

Seja $f: M \rightarrow N$ um mapa de uma variedade m -dimensional (m -variedade) para uma n -variedade. Através de f um ponto $p \in M$ é mapeado para um ponto $f(p) \in N$. Tomando uma carta (U, ϕ) em M e uma (V, ψ) em N , onde $p \in M$ e $f(p) \in N$, temos que

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

A diferenciabilidade de f é independente da escolha do sistema de coordenadas. Escolhendo duas cartas que se superpoem (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) e um ponto $p \in U_1 \cap U_2$. Podemos mapear o ponto p para (V, ψ) a partir de (U_1, ϕ_1) e também a partir de (U_2, ϕ_2)

$$F' = \psi \circ f \circ \phi_2^{-1}. \quad (1.4)$$

Lembrando que esses abertos se superpoem, e que a mudança de coordenada é dada por

$$g = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}. \quad (1.5)$$

Podemos mapear uma variedade para outra, como segue.

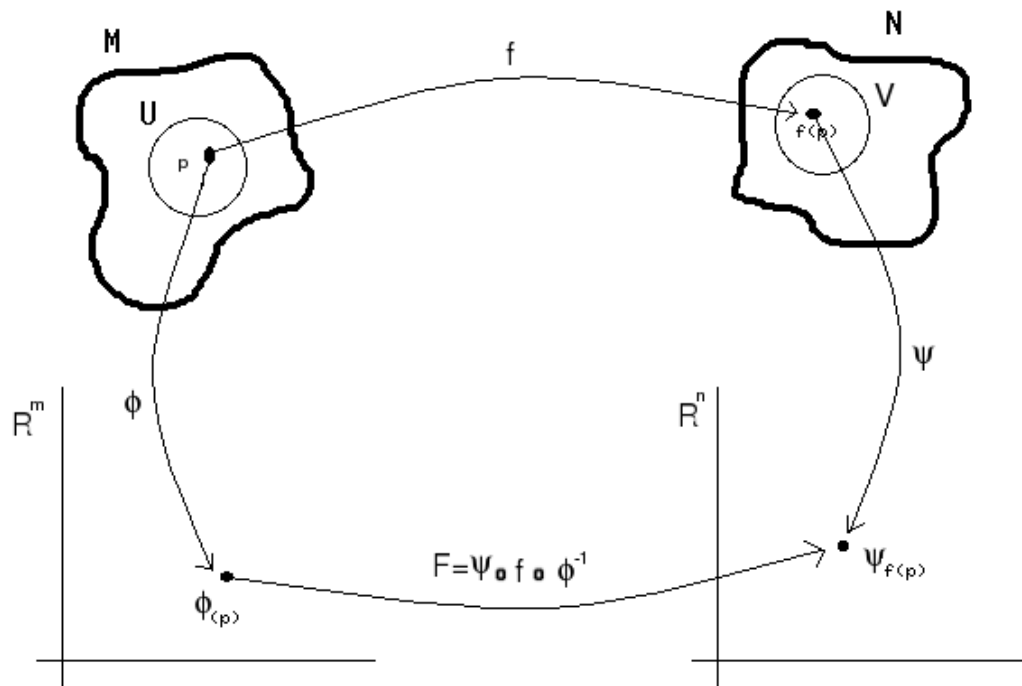


Fig. 1.2 – Mapa entre variedades.

Chamando as coordenadas de p em M de x^μ e as coordenadas de $f(p)$ em N de y^α , fica claro que $y^\alpha = F^\alpha(x^\mu)$. Diremos que o mapeamento f é diferenciável de classe C^∞ (smooth) se F o for. Se, além disso, ele for inversível e sua inversa também for suave, f é dito um difeomorfismo e M é difeomorfo a N e vice-versa. (Lembrando que a dimensões de M e N tem que ser iguais, $\dim M = \dim N$). Uma função f sobre M é um mapeamento suave de M em \mathbb{R} . Denotaremos o espaço de todas as funções sobre M por $C(M)$. Um conjunto importante de funções é o das “funções coordenadas”, definidos como $\phi^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira

$$\phi^\mu(p) = P^\mu \circ \phi(p) = x^\mu, \quad (1.6)$$

onde P^μ é uma aplicação que associa ao ponto (x^1, \dots, x^m) a μ -ésima coordenada do ponto p , x^μ .

Definição 1.3 Uma família de mapas $h_t : M \rightarrow N$, onde M e N são variedades diferenciáveis, indexada pelos números reais $t \in [0, 1]$ é dita uma homotopia se o mapa

$$H : M \times I \rightarrow N, \quad (1.7)$$

definido por $H(x, t) = h_t(x)$ com $x \in M$, $t \in I$ for de classe C^∞ .

Dois mapas $f : M \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow N$ são ditos homotópicos se existe uma função $h_t : M \rightarrow N$, tal que $h_0 = f$ e $h_1 = g$. Intuitivamente, f e g serão homotópicos se, e somente se, um puder ser continuamente trocado pelo outro.

1.2 Espaço Tangente

Podemos definir um vetor tangente X a uma curva α num ponto $p \in M$. Por conveniência, seja $\alpha(0) = p$. Assim, definiremos o vetor tangente como uma aplicação de M em \mathbb{R} , dada por

$$X[f] = \left. \frac{df_{(\alpha(t))}}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.8)$$

A interpretação geométrica torna-se fácil se considerarmos um trecho da curva α como estando dentro de uma carta (U, ϕ) , dessa forma,

$$f(\alpha(t)) = f(\phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha(t)) = F(\phi(\alpha(t))) = F(x_{\alpha(t)}^1, \dots, x_{\alpha(t)}^m). \quad (1.9)$$

A função f tem uma análoga F que a “imita”, na imagem da curva α em \mathbb{R}^m , $(x_{\alpha(t)}^1, \dots, x_{\alpha(t)}^m)$. Também temos:

$$X[f] = \left. \frac{dF(x_{\alpha(t)}^1, \dots, x_{\alpha(t)}^m)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{\mu=1}^m \left. \frac{dx_{\alpha}^{\mu}}{dt} \frac{\partial F(x_{\alpha})}{\partial x_{\alpha}^{\mu}} \right|_{t=0} \quad (1.10)$$

Usando a notação de Einstein,

$$X[f] = \left. \frac{dx_{\alpha}^{\mu}}{dt} \frac{\partial F(x_{\alpha})}{\partial x_{\alpha}^{\mu}} \right|_{t=0}. \quad (1.11)$$

Para um caso em que $\alpha(0) = \beta(0)$ o termo $\frac{\partial F}{\partial x}$ fica independente da curva $\alpha(t)$ e este representa o gradiente da função escalar $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, induzida por f . As quantidades $\frac{dx_{\alpha}^{\mu}}{dt}$ representam as componentes do vetor tangente à curva induzida em \mathbb{R} pela curva $\alpha(t)$. Dessa forma a equação (1.11) representa o produto escalar (interno), em \mathbb{R} , entre o vetor tangente a $c(t) = \phi \circ \alpha(t)$ e o gradiente da função escalar F . Assim, $X[f]$ tem uma interpretação em \mathbb{R} de derivada direcional de F ao longo da tangente a c em $\phi(p)$. Com isso temos um vetor associado a uma curva $\alpha(t)$ na variedade.

O vetor tangente X é associado à classe de equivalência de curvas que passam por p e possuem a mesma *derivada direcional*, pois existem infinitas curvas

passando por p associadas ao mesmo X . O conjunto de todos os vetores tangentes é um espaço vetorial, chamado de *espaço tangente a M em p* , simbolizado por T_pM . Para caracterizarmos completamente um vetor tangente, basta fornecer m números X^μ (as componentes de X), pois a função f não desempenha nenhum papel em sua caracterização.

Considerando agora os μ vetores

$$e_\mu(f) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu}, \quad (1.12)$$

qualquer vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos e_μ ,

$$X(f) = X^\mu e_\mu(f), \quad (1.13)$$

e isso nos permite considerar os e_μ como uma base do espaço tangente. Suprimindo a função f sobre a qual o vetor está atuando, temos

$$X = X^\mu e_\mu, \quad (1.14)$$

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.15)$$

Esse espaço é linear, ou seja, $(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)(f) = \lambda_1 X_1(f) + \lambda_2 X_2(f)$.

Agora suponha que o ponto p está em uma região de intersecção de duas cartas, uma carta cuja coordenatização seja ϕ e outra com uma coordenatização ψ que conduz às coordenadas y . Sendo um processo análogo ao anterior, vemos que o vetor tangente à curva α em p pode ser escrito como

$$X(f) = \bar{X}^\mu \bar{e}_\mu = \frac{dy_\alpha^\mu}{dt} \frac{\partial \bar{F}(y_\alpha)}{\partial y_\alpha^\mu} \Big|_{t=0}, \quad (1.16)$$

onde $y_\alpha^\mu = P^\mu \circ \psi \circ \alpha(t)$ e $\bar{F} = f \circ \psi^{-1}$. Inserindo $\phi^{-1} \circ \phi$, ficamos com

$$y_\alpha^\mu(t) = P^\mu \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha(t) = \Psi^\mu(x_\alpha(t)), \quad (1.17)$$

e definindo $\bar{Y}^\mu = P^\mu \circ \psi \circ \phi^{-1}$, como a μ -ésima componente da função de transição $\psi \circ \phi^{-1}$. E também

$$x_\alpha^\mu(t) = P^\mu \circ \phi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \alpha(t) = \Phi^\mu(y_\alpha(t)). \quad (1.18)$$

Essas relações mostram que é possível escrever Y_α^μ como função de X_α^μ e vice-versa, ou seja, a função de transição é um difeomorfismo. Também obtemos a relação entre F e \bar{F} :

$$\bar{F}(y_\alpha) = f \circ \psi^{-1} \circ \psi(p) = f \circ \phi^{-1} \circ \phi(p) = F(x_\alpha). \quad (1.19)$$

Por fim,

$$\bar{e}_\mu(f) = \frac{\partial \bar{F}(y_\alpha)}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial y'_\alpha} \frac{\partial F(x_\alpha)}{\partial y'_\alpha} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x y \mu_\alpha} e_\nu(f) \quad (1.20)$$

e

$$\bar{X}^\mu = \frac{dy'_\alpha}{dt} = \frac{\partial y'_\alpha}{\partial x'_\alpha} \frac{dx'_\alpha}{dt} = \frac{\partial y'_\alpha}{\partial x'_\alpha} X^\nu. \quad (1.21)$$

A expressão do vetor fica independente da coordenatização, pois, as componentes e os vetores base transformam-se inversamente uns dos outros.

1.3 Espaço Cotangente

O espaço cotangente de uma variedade diferenciável M em $p \in M$ é definido como o espaço vetorial dual de $T_p M$. Dado um espaço vetorial n -dimensional X e suas bases e_μ , bases já conhecidas da seção anterior, podemos definir as bases e^μ do espaço cotange (X^*) como o produto interno

$$\langle e^\nu, e_\mu \rangle = \delta_\mu^\nu. \quad (1.22)$$

Para investigar melhor essa relação, podemos encarar essa nova base e^ν como elementos de diferenciais de linha $e^\nu = dx^\nu$. Por exemplo, a ação sobre um dado vetor X será

$$dx^\nu(X) = X(x^\nu) = X^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = X^\mu \delta_\mu^\nu = X^\nu, \quad (1.23)$$

o efeito de aplicar esse funcional linear sobre um vetor X é selecionar sua ν -ésima componente. Agora aplicando sobre os vetores bases do espaço tangente teremos

$$dx^\nu(e_\mu) = e_\mu(x^\nu) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.24)$$

assim como na definição (1.22).

Podemos definir os vetores cotangentes a M em $p \in M$ como funcionais lineares sobre $T_p M$, ou seja, tais funcionais irão associar a cada vetor tangente um número real. Agora definindo a soma e multiplicação por escalares (reais) no espaço desses funcionais lineares,

$$(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)(X) = \lambda_1 w_1(X) + \lambda_2 w_2(X).$$

Dessa maneira esse espaço se torna um espaço vetorial dual a $T_p M$, e será denotado por $T_p^* M$ (Espaço cotangente a M em $p \in M$). Esses funcionais lineares são

aplicações lineares w que associam a cada vetor um número $w(X) \in \mathbb{R}$. O exemplo mais simples de um vetor cotangente é a diferencial de uma função, pois, dada uma função f associamos à ela um vetor cotangente df através de

$$df(X) = X(f) = X^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\mu}, \quad (1.25)$$

onde $F = f \circ \phi^{-1}$, para um homeomorfismo ϕ dado como parte de uma coordenatização. Vemos facilmente que esse funcional é linear:

$$\begin{aligned} df(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) &= (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)(f) \\ &= \lambda_1 X_1(f) + \lambda_2 X_2(f) = \lambda_1 df(X_1) + \lambda_2 df(X_2). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Considerando uma 1-forma geral w , e como w é uma aplicação linear, temos que

$$w(X) = X^\mu w(e_\mu), \quad (1.27)$$

desse modo uma 1-forma é completamente fixada pela sua ação sobre os vetores base e_μ . Agora uma 1-forma $w' = w_\mu dx^\mu$ com $w_\mu = w(e_\mu)$ aplicada a X nos dá

$$w'(X) = X^\nu w'(e_\nu) = X^\nu w_\mu dx^\mu(e_\nu) = X^\mu w_\mu. \quad (1.28)$$

Assim podemos escrever

$$w = w_\mu dx^\mu.$$

As 1-formas dy^μ podem ser expressas em termos das bases dx^μ como $dy^\mu = \alpha_\nu^\mu dx^\nu$. E para calcularmos α_ν^μ basta aplicarmos dy^μ sobre os vetores e_ν ,

$$dy^\mu(e_\nu) = \alpha_\sigma^\mu dx^\sigma(e_\nu) = \alpha_\nu^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (1.29)$$

por fim, substituindo α_ν^μ ,

$$dy^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (1.30)$$

Tentando obter uma lei de transformação das componentes, aplicaremos as 1-formas sobre os vetores base \bar{e}_μ de uma nova coordenatização

$$w(\bar{e}_\mu) = \bar{w}_\nu dy^\nu(\bar{e}_\mu) = \bar{w}_\mu, \quad (1.31)$$

ou seja,

$$w(\bar{e}_\mu) = w_\nu dx^\nu(\bar{e}_\mu) = w_\nu \bar{e}_\mu(x^\nu) = w_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \quad (1.32)$$

Assim, por meio de

$$\bar{w}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} w_\nu, \quad (1.33)$$

observamos que as componentes de uma 1-forma mudam com a matriz Jacobiana de mudança de coordenadas, o que é o caso inverso das componentes de vetores tangentes.

1.4 Tensores

Dados dois espaços vetoriais, X e Y , é possível formarmos um terceiro espaço vetorial denotado por $X \otimes Y$, associando a cada vetor $x \in X$ e $y \in Y$ um vetor $x \otimes y \in X \otimes Y$:

- A associação é bilinear e x e y , dados os escalares arbitrários $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$

$$\begin{aligned}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \otimes y &= \lambda_1 x_1 \otimes y + \lambda_2 x_2 \otimes y, \\ x \otimes (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= \alpha_1 x \otimes y_1 + \alpha_2 x \otimes y_2.\end{aligned}$$

- se $\{x_i\}$ é uma base em X e $\{y_j\}$ é uma base em Y , então $\{x_i \otimes y_j\}$ é uma base em $X \otimes Y$.

Usando os elementos de base de $T_p M$ e $T_p^* M$, podemos estender o conceito de campo afim de incluir os campos tensoriais sobre M , campos com l componentes covariantes e k componentes contravariantes, escrevendo

$$T_l^k = T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}. \quad (1.34)$$

O símbolo do produto tensorial \otimes implica numa não simetrização ou não anti-simetrização dos índices, ou seja, cada elemento de base atua de forma independente da outra. Usando a bilinearidade de T e expressando w e X em termos de bases de um mesmo sistema de coordenadas em $T_p M$ e $T_p^* M$, temos

$$T(w, x) = T(w_\mu dx^\mu, X^\nu e_\nu) = w_\mu X^\nu T(dx^\mu, e_\nu). \quad (1.35)$$

Dada uma outra coordenatização, cuja qual forneça coordenadas \bar{x}^μ para o ponto p , então

$$T(w, x) = T(\bar{w}_\mu d\bar{x}^\mu, \bar{X}^\nu \bar{e}_\nu) = \bar{w}_\mu \bar{X}^\nu T(d\bar{x}^\mu, \bar{e}_\nu), \quad (1.36)$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{T}_\nu^\mu &:= T(d\bar{x}^\mu, \bar{e}_\nu) = T\left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} e_\beta\right) \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} T(dx^\alpha, e_\beta) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} T_\beta^\alpha.\end{aligned} \quad (1.37)$$

Por fim, substituindo \bar{w}_μ e \bar{X}^ν em termos de w_μ e X^ν ,

$$T(w, x) = w_\mu X^\nu T(dx^\mu, e_\nu) = \bar{w}_\mu \bar{X}^\nu T(d\bar{x}^\mu, \bar{e}_\nu). \quad (1.38)$$

Note que T é independente da coordenatização.

Considerando agora o espaço tensorial $T_p M \otimes T_p^* M$, um elemento da base deste espaço será consequentemente $e_\mu \otimes dx^\nu$. Tal elemento, seguindo o mesmo raciocínio de antes, pode ser considerado um funcional linear (bilinear) sobre $T_p M \times T_p^* M$, cuja ação é definida por

$$e_\mu \otimes dx^\nu(w, X) := e_\mu(x)dx^\nu(X) = w_\mu X^\nu. \quad (1.39)$$

Dessa maneira todo tensor pode ser escrito como uma combinação linear dessa nova base,

$$T(w, X) = T_\nu^\mu e_\mu \otimes dx^\nu(w, X), \quad (1.40)$$

com

$$T_\nu^\mu = T(dx^\mu, e_\nu).$$

Vendo que

$$T_\nu^\mu e_\mu \otimes dx^\nu(w, X) = w_\mu X^\nu T(dx^\mu, e_\nu). \quad (1.41)$$

Note então que um tensor do tipo (1,1) é um elemento de $T_p M \otimes T_p^* M$. Um elemento genérico de um espaço tensorial formado por q espaços tangentes e r espaços cotangentes em p , será um tensor do tipo (q, r) e é escrito por

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r}, \quad (1.42)$$

como proposto no início da seção.

1.5 Relação de Equivalência

Sendo A e B dois conjuntos, qualquer subconjunto do *produto cartesiano* $A \times B$ é dito uma *relação*. Uma relação R pode ser especificada como:

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid C\},$$

onde C é uma condição que associa um elemento de A e de B .

Dado um conjunto X , com $x, y, z \in X$, uma *relação de equivalência* requer as seguintes propriedades:

- **reflexão:** $(x)R(x)$.
- **simetria:** $(x)R(y)$ seja o mesmo que $(y)R(x)$.

- **transitividade:** seja $(x)R(y)$ e $(y)R(z)$ então $(x)R(z)$.

Uma relação de equivalência é usualmente denotada pelo símbolo “ \sim ”. Assim, se (a, b) pertence a relação, escrevemos $a \sim b$ e lemos “ a é equivalente a b ”. A existência de uma relação de equivalência num conjunto X faz com que ele se particione naturalmente em subconjuntos onde, em cada um, todos os elementos são equivalentes uns aos outros. Tais subconjuntos são chamados de *classe de equivalência*. A classe de equivalência de um elemento a é denotada por $[a]$. O elemento a usado para denotar a classe de equivalência $[a]$ é chamado de representativo da classe.

- as classes de equivalência são disjuntas,
- todo elemento de X está em uma, e apenas uma, classe de equivalência.

O conjunto formado por todas as classes de equivalência é chamado conjunto quociente de X pela relação \sim , (espaço quociente ou grupo quociente, dependendo da estrutura que ele acomodar) e é denotado por X/\sim . Um simples exemplo de conjunto quociente é a decomposição dos números inteiros em duas classes de equivalência, a dos números pares e a dos ímpares. A relação entre dois números será sua paridade e o conjunto quociente terá dois elementos, o conjunto dos pares e o dos ímpares.

1.6 Grupos e Álgebras de Lie

1.6.1 Grupos de Lie e suas Ações

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G que possui uma estrutura de grupo compatível com uma estrutura diferenciável. Isso significa que uma operação de grupo $(a, b) \mapsto ab$ é suave sendo um mapa $G \times G \rightarrow G$, e que o mapa $a \mapsto a^{-1}$ é suave sendo um mapa de G para ele mesmo.

Podemos dizer que um grupo de Lie é um grupo onde as coordenadas locais podem ser encontradas quando a multiplicação e a inversão puderem ser expressas por funções suaves, então as coordenadas de ab dependem suavemente das coordenadas de a e b e as coordenadas de a^{-1} dependem de a .

Um grupo de Lie pode ser qualquer grupo topológico cujo espaço subjacente é uma variedade topológica, ou seja, é sempre possível encontrar coor-

denadas locais em um *grupo de Lie topológico* onde a multiplicação e a inversão sejam mapas diferenciáveis.

Os exemplos mais simples de grupos de Lie são os grupos de matrizes, tais como o $GL(n)$, $SL(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$, em que cada um deles podem ser considerados uma sub-variedade do espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Qualquer representação linear de dimensão finita de um grupo de matrizes é um exemplo de uma ação suave de um grupo de Lie em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n .

Todo homomorfismo contínuo de um grupo de Lie para outro é suave, e sendo H um subgrupo de um grupo de Lie, este também será um grupo de Lie.

Uma ação (ou ação pela esquerda) de um grupo G em um conjunto E é uma correspondência que associa a cada elemento $g \in G$ um mapa $\phi_g : E \rightarrow E$ de forma que

$$\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \phi_{g_2}. \quad (1.43)$$

Em outras palavras, uma ação de grupo é um homomorfismo de G para o grupo de transformações de E . Um caso importante se dá quando um homomorfismo é injetor, pois existirá um isomorfismo entre G e um subgrupo do grupo de transformações de E . Por exemplo, podemos encarar o grupo de matrizes como um grupo de transformações lineares de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n .

Se E é um espaço vetorial e as transformações ϕ_g são lineares, a ação é uma representação linear de G em E . Uma ação de grupo de G em E dá origem a uma relação de equivalência natural em E , pois $x_1 \in E$ e $x_2 \in E$ são equivalentes se estes podem ser obtidos um do outro pela ação de algum elemento de G . Em outras palavras, se existe algum $x_2 = \phi_g(x_1)$ para algum $g \in G$.

Diremos agora que a classe de equivalência n_x de um ponto $x \in E$ é a órbita de x , portanto N_x é o conjunto dos pontos que podem ser obtidos de x pela ação dos elementos de G . O conjunto de elemento de G que deixam x fixo, $h \in H_x$ com $\phi_h(x) = x$, será chamado de estabilizador de x .

Para cada matriz ortogonal tridimensional A , com determinante igual a 1 (um), podemos atribuir uma rotação $x \mapsto Ax$ de \mathbb{R}^3 sobre um eixo que passa pela origem do sistema. Isso determina uma ação de $SO(3)$ em \mathbb{R}^3 . As órbitas (classes de equivalência) são esferas bidimensionais centradas na origem, acrescida de uma órbita contendo apenas a origem.

Toda a matriz ortogonal fixa a origem, então o estabilizador da origem é a própria $SO(3)$. Mas o estabilizador de um ponto x distinto, consiste em

rotações sobre a linha que o conecta a origem, e lembrando que uma rotação em torno de um eixo pode ser vista como uma rotação de um plano perpendicular ao eixo, existe um isomorfismo com $SO(2)$.

Seja G um grupo de Lie atuando sobre uma variedade diferenciável M , temos que a órbita de $x \in M$ é o conjunto de todos os pontos $\phi_g(x)$ com $g \in G$ e o estabilizador de x é um grupo $H_x \subset G$ que satisfaz $\phi_h(x) = x$. Agora denotaremos as intersecções de H_x por G_0 , ou seja, G_0 será um subgrupo de G que fixa todos os pontos de M e quando $G_0 = 0$ dizemos que a ação é *efetiva*. Considerando a ação como um homomorfismo de G para o grupo de transformações de M , então o kernel desse homomorfismo será o próprio G_0 e a imagem de G no grupo de transformações de M é isomorfo a G/G_0 .

1.6.2 Álgebras de Lie

Lembrando que uma álgebra sobre os reais é um espaço vetorial real A juntamente com um mapa bilinear $A \times A \rightarrow A$, sendo que tal mapa pode ser considerado uma operação binária dando à A uma estrutura de anel.

Diremos que tal A é uma álgebra de Lie se a operação binária, denotada por $[,]$, for anti-comutativa e satisfaça a identidade de Jacobi

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0. \quad (1.44)$$

Isso é facilmente compreendido tomando como exemplo um dado espaço vetorial real V e $End V$ for o espaço dos endomorfismos de V (mapas lineares de V para ele mesmo). Então diremos que $End V$ será uma álgebra de Lie se

$$[a, b] = ab - ba, \quad (1.45)$$

com $a, b : V \rightarrow V$ sendo mapas lineares e ab e ba indicando suas composições.

Seja \mathfrak{a} uma álgebra de Lie, e \mathfrak{a}' um sub-espaço linear de \mathfrak{a} que é fechado perante comutação, ou em outras palavras, $[a, b] \in \mathfrak{a}' \quad \forall a, b \in \mathfrak{a}'$. Dessa maneira \mathfrak{a}' herda uma estrutura de álgebra de Lie e é dita uma *sub-álgebra de Lie* de \mathfrak{a} . E uma sub-álgebra de Lie \mathfrak{a}' é um *ideal* de \mathfrak{a} de

$$[a, b] \in \mathfrak{a}' \quad \text{para um } a \in \mathfrak{a} \text{ e } b \in \mathfrak{a}'.$$

Um mapa linear $\phi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ entre duas álgebras de Lie é um homomorfismo se $\phi([a, a']) = [\phi(a), \phi(a')]$ para $a, a' \in \mathfrak{a}$. O kernel de um homo-

morfismo ϕ , $(\ker \phi)$, é um ideal de \mathfrak{a} desde que $\phi(b) = 0$, o que implica em $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)] = 0$.

Uma álgebra de Lie é dita *simples* se ela não possui ideais não-triviais e todo homomorfismo de uma álgebra de Lie simples \mathfrak{a} para uma álgebra \mathfrak{b} não nula é um isomorfismo.

Seja agora (e_1, \dots, e_n) a base de um espaço vetorial subjacente de uma álgebra de Lie \mathfrak{a} (de dimensão finita), sabe-se que é possível escrever cada elemento $[e_\alpha, e_\beta]$ de maneira única sendo uma combinação linear dos e_1, \dots, e_n :

$$[e_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma,$$

onde os números reais $c_{\alpha\beta\gamma}$ são ditos *constantes estruturais* da álgebra de Lie \mathfrak{a} de acordo com a base dada.

Todo grupo de Lie possui uma álgebra de Lie associada a ele. Uma base de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie \mathfrak{G} é dita *sistema de geradores* de \mathfrak{G} , por exemplo dado o grupo $SU(2)$ (que é um grupo de Lie) seu sistema de geradores é dado por

$$e_1 = \frac{1}{2i}\sigma_1, \quad e_2 = \frac{1}{2i}\sigma_2, \quad e_3 = \frac{1}{2i}\sigma_3$$

com os σ_i sendo as matrizes de Pauli. Esses geradores satisfazem a seguinte regra de comutação:

$$[e_\alpha, e_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma,$$

ou seja, as constantes estruturais de $\mathfrak{su}(2)$ são $c_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Vê-se que o produto externo dos vetores base de \mathbb{R}^3 satisfazem à mesma relação, e segue-se que a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ é isomórfica à \mathbb{R}^3 com a estrutura algébrica dada pelo produto externo.

Capítulo 2

Formas Diferenciais

2.1 Definição

Definição 2.1 (Uma forma multilinear alternada). *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre uma variedade M . Uma n -forma linear é um mapa $B : V \times V \times \dots \times V \rightarrow W$, onde W é um espaço vetorial arbitrário, que é linear em cada termo.*

Isso significa que:

$$B(a_1, a_2, \dots, a_n) + B(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = B(a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n), \quad (2.1)$$

e,

$$s \cdot B(a_1, a_2, \dots, a_n) = B(s \cdot a_1, a_2, \dots, a_n) = \dots = B(a_1, a_2, \dots, s \cdot a_n). \quad (2.2)$$

Isso faz com que ela seja multilinear. Para que seja alternada ela deve satisfazer:

$$B(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = -B(a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n), \quad (2.3)$$

para todo $1 \leq i < n$.

Com essas condições a n -ésima potência exterior de V , $\Lambda^n(V)$, é um espaço vetorial munido de um mapa multilinear alternado

$$\wedge : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \Lambda^n(V), \quad (2.4)$$

tal que qualquer mapa multilinear alternado

$$f : V \times V \times \dots \times V \rightarrow W, \quad (2.5)$$

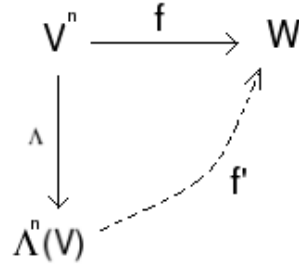


Fig. 2.1 – Unicidade.

onde existe uma f' única tal que $f' : \Lambda^n(V) \rightarrow W$ e o diagrama comuta (Figura 2.1), ($f' \circ \wedge = f$).

Definiremos para $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n := \wedge(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (2.6)$$

sendo este o produto cunha, e pelo fato de \wedge ser multilinear e alternado possui as seguintes propriedades

- $v \wedge w = -w \wedge v$,
- $a \cdot (v \wedge w) = (a \cdot v) \wedge w = v \wedge (a \cdot w)$,
- $v \wedge w + v \wedge w' = v \wedge (w + w')$.

Adiante estas propriedades serão generalizadas para dimensões maiores.

Definição 2.2 *Uma k -forma diferencial em U é um mapa contínuo e infinitamente diferenciável*

$$w : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}), \quad (2.7)$$

onde \mathbb{R}^{n*} é o dual do espaço vetorial \mathbb{R}^n .

O conjunto de todas as k -formas diferenciais em U é denotado por $\Omega^k(U)$.

Se (U, ϕ_u) é uma carta local com coordenadas (x^1, \dots, x^k) , então uma k -forma diferencial w pode ser escrita como

$$w_u = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{1}{k!} w_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

onde as componentes w_{i_1, \dots, i_k} são anti-simétricas nos índices

$$w_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)} = (-1)^{\text{sgn}\sigma} w_{i_1 \dots i_k}, \quad (2.8)$$

para toda permutação σ . Se (V, ϕ_v) é uma outra carta com coordenadas (y_1, \dots, y_k) , então

$$w_v = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \bar{w}_{j_1, \dots, j_k} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k. \quad (2.9)$$

As componentes nos dois sistemas de coordenadas estão relacionados em $U \cap V$ pela fórmula:

$$\bar{w}_{j_1, \dots, j_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial(x^{i_1} \dots x^{i_k})}{\partial(y^{j_1} \dots y^{j_k})}, \quad (2.10)$$

onde a derivada parcial representa a matriz jacobiana da mudança de coordenadas.

Seja $C^\infty(\Lambda^k)$ o espaço das k -formas, representado por tensores anti-simétricos $f_{i_1 \dots i_k}(x)$, os elementos desse espaço podem ser escritos como:

$C^\infty(\Lambda^0) = \{f(x)\}$	dimensão = 1
$C^\infty(\Lambda^1) = \{f_i(x) dx^i\}$	dimensão = n
$C^\infty(\Lambda^2) = \{f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j\}$	dimensão = $\frac{n(n-1)}{2!}$
\vdots	\vdots
$C^\infty(\Lambda^{n-1}) = \{f_{i_1 \dots i_{n-1}}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}\}$	dimensão = n
$C^\infty(\Lambda^n) = \{f_{i_1 \dots i_n}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}\}$	dimensão = 1

Vemos que Λ^k e Λ^{n-k} são espaços vetoriais com a mesma dimensão e em particular, $C^\infty(\Lambda^n)$ é representável por uma simples função multiplicada por uma forma de volume n -dimensional ($\dim M = n$).

Formas diferenciais admitem uma multiplicação de mapas, ou *produto exterior*,

$$\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \rightarrow \Omega^{k+l}(U). \quad (2.11)$$

Essa multiplicação não é nem simétrica nem anti-simétrica, pois, para $w \in \Omega^k(U)$ e $\alpha \in \Omega^l(U)$,

$$w \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge w, \quad (2.12)$$

facilmente comprovado reordenando as bases dx^i .

2.2 Derivada Exterior

Para definirmos uma operação nas formas diferenciais que seja similar à derivada, essa operação deve obedecer a algum tipo de regra da cadeia, e em “algum sentido”, deve ser invariante sobre mudanças de coordenadas.

Proposição 2.1 *O mapa d é unicamente definido se:*

- d é um mapa linear $\Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$. $d(Aw + B\eta) = (Adw + Bd\eta)$.
- dadas duas formas diferenciais $w \in \Omega^k(U)$ e $\alpha \in \Omega^l(U)$,

$$d(w \wedge \alpha) = d(w) \wedge \alpha + (-1)^k w \wedge d(\alpha). \quad (2.13)$$

- Para uma f (0-forma), a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, d coincide com a derivada no seguinte sentido $d(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.
- $d \circ d = 0$.

Podemos definir d indutivamente a partir da 2ª proposição, pois se $w = f(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ temos que

$$\begin{aligned} d(f(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d(f(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}) \wedge dx^{i_k} + \\ &+ (-1)^{k-1} (f(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}) \wedge d(dx^{i_k}) \\ &= d(f(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}) \wedge dx^{i_k}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para provar que d é bem definido, basta checar que a segunda propriedade se mantém para todo k e l . A quarta propriedade é facilmente demonstrada tomando uma 0-forma $f(x)$:

$$\begin{aligned} d \circ d(f(x)) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dada uma função $f = f(x)$ onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas de um dado U então, das propriedades mostradas acima, tem-se que:

- $d(f(x)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

- $d(f_j(x)dx^j) = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j$
- $d(f_{jk}(x)dx^j \wedge dx^k) = \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

Uma importante implicação de que $ddw = 0$ é vista em uma notação vetorial, onde essa relação é equivalente à

$$\mathbf{curl} \cdot \mathbf{grad} f = 0 ; \mathbf{div} \cdot \mathbf{curl} f = 0.$$

2.3 Formas Fechadas e Exatas

Seja w uma 1-forma diferenciável em $U \subset \mathbb{R}^2$, dada por $w = adx + bdy$ com a e b sendo funções diferenciáveis. A derivada exterior de w será:

$$\begin{aligned} dw &= d(adx) + d(bdy) = da \wedge dx + db \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dizemos que se $dw = 0$ a forma diferencial w é **fechada** e, no caso acima, teremos que $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$. Havendo a possibilidade de escrevermos uma forma diferencial w como $w = d\alpha$, então ela é dita **exata**. Facilmente vemos que toda forma diferencial exata é fechada, entretanto, nem toda forma diferencial fechada é proveniente de uma exata. Tomemos como exemplo a seguinte situação. Sejam w_1 e w_2 duas formas diferenciais quaisquer mas sendo $dw_1 = dw_2$. De imediato segue que $w_1 = w_2 + \psi$, se ψ é uma forma fechada. Supondo também que $w_1 = df_1$ para alguma função f_1 dada por $f_1 = f_0 + f$, onde f é uma constante, ou seja, desejamos tentar provar que w_1 é exata. Façamos com que $f_0 = \theta$, onde (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y) em $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$. Sabendo que θ é dado por $\tan(\theta) = y/x$, válido para $x \neq 0$, aplicamos a derivada exterior, e obtemos que

$$\begin{aligned} d(\tan(\theta)) &= d\left(\frac{y}{x}\right) \\ (\sec^2(\theta))d\theta &= \left(\frac{-y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x}\right) dy \\ (\tan^2(\theta) + 1)d\theta &= \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right] d\theta = \left(\frac{-y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x}\right) dy \\ d\theta &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = df_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Com o mesmo procedimento para $\cot(\theta) = x/y$ temos

$$\begin{aligned} d(\cot(\theta)) &= d\left(\frac{x}{y}\right) \\ (-\csc^2(\theta))d\theta &= \left(\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{-x}{y^2}\right)dy \\ -\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]d\theta &= \left(\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{-x}{y^2}\right)dy \\ d\theta &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = df_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assumindo que $w_1 = df_0$ para alguma função $f \in C^\infty(S^1, R^1)$, então

$$\int_0^{2\pi} w_1 = \int_0^{2\pi} df_0 = f_0(2\pi) - f_0(0) = 0. \quad (2.19)$$

Da equação (2.18), $df_0 = d\theta$, segue que

$$\int_0^{2\pi} df_0 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \quad (2.20)$$

Da Contradição de (2.18) e (2.19) segue que w_1 não é *exata*. A conclusão é que, de fato toda forma diferencial exata é fechada, mas a recíproca não é totalmente verdadeira. Uma maneira de se analisar a real diferença entre as formas diferenciais fechadas das exatas é a *Cohomologia de de Rham*, tema do capítulo seguinte desse trabalho.

2.4 Operador Estrela de Hodge

O *operador estrela de Hodge* é uma transformação linear entre pares dos espaços $\Omega^p(M)$ e $\Omega^{n-p}(M)$,

$$* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M); \quad p = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

Definição 2.3 *No espaço Euclidiano o operador é definido por:*

$$*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \epsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \quad (2.22)$$

onde $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ é o tensor totalmente anti-simétrico n -dimensional.

A composição de $*$ com ele mesmo resulta numa dualidade e para uma p -forma $w = \sum w_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ teremos:

$$**w = (-1)^{p(n-p)}w. \quad (2.23)$$

Um exemplo simples da aplicação do operador estrela de Hodge é aquele em que se considera uma função $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, sendo U um aberto em \mathbb{R}^3 :

$$*f = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

e

$$*(f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = f.$$

Ou, de uma maneira similar, se:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3,$$

aplicando $*$ teremos:

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2. \quad (2.24)$$

2.4.1 O Operador Codiferencial

Juntando o operador estrela de Hodge ($*$) e a derivada exterior (d) podemos gerar um operador δ que aplicado à uma p -forma em uma variedade M n -dimensional nos devolverá uma $(p - 1)$ -forma.

Definição 2.4 *O codiferencial é uma mapa linear*

$$\delta : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M),$$

definido em termos do diagrama

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{*} \Omega^{n-p}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{n-p+1}(M) \xrightarrow{*} \Omega^{p-1}(M),$$

ou seja,

$$\delta w = (-1)^{n(p+1)+1} * d(*w). \quad (2.25)$$

Dada uma função $f \in C^\infty(M)$ vemos facilmente que : $\delta f = *d(*f) = 0$, pois o operador $*$ aplicado a uma função resulta numa forma com todas as n bases dx^i da variedade e o operador d acrescentará uma base a mais, ou seja, teremos bases repetidas e pela definição de d não pode existir uma $(n + 1)$ -forma numa variedade n -dimensional. Dizemos que w é uma p -forma diferencial é *co-fechada* se $\delta w = 0$, e *co-exata* se $w = \delta\alpha$ para uma certa α sendo uma $(p + 1)$ -forma. Analisando as propriedades do operador δ , observamos que:

- $\delta \circ \delta = 0$, pois

$$\begin{aligned} [(-1)^k * d*] \circ [(-1)^k * d*] &= (-1)^k (-1)^k * d(**)d* \\ &= (-1)^{p(n-p)} * (dd)* = 0 \end{aligned}$$

e $d \circ d = 0$. (Usando $k = (n(p+1) + 1)$).

- $*\delta d = d\delta*$.
- $d * \delta = \delta * d = 0$.
- Dada uma p -forma w , $*(\delta w) = (-1)^p d(*w)$.
- $\delta(*w) = (-1)^{n-p+1} * dw$.

Mesmo sendo trabalhosa, a prova dessas propriedades é bastante simples, e segue o mesmo raciocínio da primeira demonstração, pois, basta agruparmos $** = (-1)^{p(n-p)}$ e reordenarmos a ordem de operação.

2.5 Formas Harmônicas

Já conhecidos os operadores d e δ , podemos juntá-los e definir um operador Δ , conhecido como *operador de Laplace-Beltrami* ou *Laplaciano Generalizado*, que é um mapa linear de p -formas para p -formas,

Definição 2.5 Para uma p -forma com $0 \leq p \leq n$ e n sendo a dimensão de M , temos

$$\Delta := d\delta + \delta d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M) \quad (2.26)$$

chamado de *Operador de Laplace-Beltrami*.

Este operador possui as seguintes propriedades:

- $\Delta = (d + \delta)^2$,
- $d \circ \Delta = dd\delta + d\delta d = d\delta d = d\delta d + \delta dd = (d\delta + \delta d)d = \Delta \circ d$,
- $\delta \circ \Delta = \delta d\delta + \delta\delta d = \delta d\delta = \delta d\delta + d\delta\delta = (\delta d + d\delta)\delta = \Delta \circ \delta$,
- $*\Delta = *d\delta + *\delta d = \delta d* + d\delta* = (\delta d + d\delta)* = \Delta*$.

Um exemplo é facilmente entendido se considerarmos Δ atuando em uma função $f \in \mathbb{R}^3$, pois $\Delta f = \delta df = *d*df$ e

$$\begin{aligned}
 (df) &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i & (2.27) \\
 *(df) &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2 \\
 d(*df) &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
 *[d(*df)] &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Uma forma diferencial é dita uma *forma harmônica* se ela satisfaz $\Delta w = 0$, e o espaço das p -formas harmônicas é denotado por:

$$\mathbf{H}^p = \{w \in \Omega^p(M) \mid \Delta w = 0\}.$$

Analisando melhor a relação $\Delta w = 0$, vemos que uma p -forma $w \in \Omega^p(M)$ é harmônica se, e somente se, ela satisfizer $dw = 0$ e $\delta w = 0$, pois, visto que $\Delta = d\delta + \delta d$, então w sendo fechada e também co-fechada são condições suficientes para que ela seja harmônica.

Capítulo 3

Cohomologia de de Rham

Nossa estratégia é substituir o espaço topológico X por um objeto algébrico, por exemplo um grupo $G(X)$, que contenha as informações desse espaço topológico para que desse modo seja possível realizar cálculos com ele. Cada função contínua entre espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$, corresponde a uma função de grupos, $f' : G(X) \rightarrow G(Y)$.

Uma das ferramentas da topologia algébrica que realiza essa correspondência é a cohomologia das formas diferenciais ou Cohomologia de de Rham. A cohomologia de de Rham está baseada nas formas diferenciais sobre uma variedade e associa cada variedade M aos seus grupos cohomológicos $H^r(M)$ através da sua *relação de equivalência*.

Para medirmos a falha de que uma forma fechada não seja necessariamente uma forma exata, definimos uma relação de equivalência no espaço vetorial das k -formas diferenciais em M . Assim duas formas serão *cohomólogas*, $w \sim w'$, se elas se diferirem por uma forma exata, ou seja, $w - w' = d\alpha$.

3.1 Complexo de co-cadeias

Definição 3.1 *Um complexo de co-cadeias C é uma coleção de espaços vetoriais $\{C^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ juntamente com um conjunto de mapas lineares $d_k : C^k \rightarrow C^{k+1}$, tal que $d_{k+1} \circ d_k = 0$ para todo k . O conjunto de mapas lineares $\{d_k\}$ é conhecido como diferencial de C .*

Definição 3.2 *Uma sequência de mapas lineares de espaços vetoriais*

$$C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_n} C^m, \quad (3.1)$$

é exata se, e somente se, $\text{im } d_n = \ker d_{n+1}$.

A sequência

$$0 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad (3.2)$$

é exata se, e somente se, $\text{im } f = \ker g = 0$, se, e somente se, g for injetora.

Similarmente, a sequência

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} 0 \quad (3.3)$$

é exata se, e somente se, $\text{im } f = \ker g = B$, se, e somente se, f for sobrejetora.

Definição 3.3 *O k -ésimo espaço cohomológico de uma cadeia de complexos C , $H^k(C)$, é dado pelo espaço quociente*

$$H^k(C) = \frac{\ker d_k}{\text{im } d_{k-1}}. \quad (3.4)$$

Note que isso faz sentido já que pela propriedade $d_k \circ d_{k-1} = 0$ implica que $\text{im } d_{k-1} \subseteq \ker d_k$. E se C é exato então $H^k(C) = 0$.

Tomando nossos espaços vetoriais como sendo $C^k = \Omega^k(M)$ e d_k a derivada exterior, temos o *complexo de de Rham*

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_n} \Omega^n(M). \quad (3.5)$$

E a soma direta

$$\bigoplus_{k=0}^n H_{dR}^k(M),$$

é a *Cohomologia de de Rham* de M .

3.2 Invariância Difeomórfica da Cohomologia de de Rham

Seja $f : M \rightarrow N$ um mapa diferenciável entre variedades e α^k uma k -forma em N , então podemos fazer o retrocesso de α^k e definir $f^*\alpha^k$ como uma k -forma em M . Supondo que $x^\mu \in M$, $y^i \in N$, $y^i = f^i(x^\mu)$ e uma forma diferencial $\alpha = g_i(y)dy^i$, teremos

$$f^*\alpha = g_i(f(x))\partial_\mu f^i(x)dx^\mu. \quad (3.6)$$

Se a forma $\alpha \in C^\infty(N, \Lambda^k)$ é fechada, então $f^*\alpha \in C^\infty(M, \Lambda^k)$ também o é, pois, o operador d e f^* comutam. Desse modo:

$$f^* : Z^k(N) \rightarrow Z^k(M). \quad (3.7)$$

De maneira similar para uma forma exata $d\beta \in C^\infty(N, \Lambda^k)$, teremos

$$f^* : B^k(N) \rightarrow B^k(M). \quad (3.8)$$

Conseqüentemente o retrocesso desce para um mapa no espaço quociente:

$$f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M); \quad H^k(N) \ni [\alpha] \mapsto f^*[\alpha] := [f^*\alpha] \in H^k(M). \quad (3.9)$$

Esse mapa linear, $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$, mostra que variedades difeomórficas possuem cohomologias de de Rham isomórficas, pois, se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ é um isomorfismo cuja inversa é dada por $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^* : H^k(M) \rightarrow H^k(N)$. Vemos, desse resultado, que a cohomologia de de Rham é um invariante de variedades difeomórficas.

3.3 Grupos de Cohomologia de de Rham

Vamos definir alguns grupos que são de suma importância para o progresso do trabalho. O espaço das r -formas fechadas será denotado por,

$$\begin{aligned} Z^r(M) : &= \{w \in C^\infty(M, \Lambda^k) \mid dw = 0\} \\ &= \ker(d : C^\infty(M, \Lambda^k) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{k+1})). \end{aligned} \quad (3.10)$$

O espaço das r -formas exatas será denotado por,

$$\begin{aligned} B^r(M) : &= \{w \in C^\infty(M, \Lambda^k) \mid w = d\alpha, \alpha \in C^\infty(M, \Lambda^{r-1})\} \\ &= \text{Im}(d : C^\infty(M, \Lambda^{r-1}) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^r)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definidos esses dois grupos vemos que $B^r(M) \subseteq Z^r(M)$, uma vez que toda forma exata é fechada.

Definição 3.4 *o r -ésimo grupo de cohomologia de de Rham de M é*

$$H^r(M) := \frac{Z^r(M)}{B^r(M)}. \quad (3.12)$$

Definiremos também que para $r = 0$, $B^0(M) = 0$. O grupo $H^r(M)$ é um espaço vetorial real e a adição de classes e a multiplicação por um escalar são dadas por:

1. se $w_1 \sim w'_1$ e $w_2 \sim w'_2$ então $(w_1 + w_2) \sim (w'_1 + w'_2)$.

Dados $(w_1 - w'_1) = d\alpha_1$ e $(w_2 - w'_2) = d\alpha_2$, somando as duas igualdades obtemos

$$(w_1 - w'_1) + (w_2 - w'_2) = (w_1 + w_2) - (w'_1 + w'_2) = d\alpha_1 + d\alpha_2 = d(\alpha_1 + \alpha_2),$$

de maneira que $(w_1 + w_2) \sim (w'_1 + w'_2)$.

2. seja um escalar $c \in \mathbb{R}$ então $cw_1 \sim cw'_1$.

$$(w_1 - w'_1) = d\alpha_1 \Rightarrow c(w_1 - w'_1) = cd\alpha_1 = d(c\alpha_1),$$

de onde concluímos que $cw_1 \sim cw'_1$.

Tomemos como exemplo a seguinte situação para calcularmos os grupos de cohomologia de de Rham. Seja M uma variedade diferenciável m -dimensional. Determinaremos o grupo de de Rham $H^0(M)$. Sabe-se que as funções reais infinitamente diferenciáveis sobre M formam o grupo $C^\infty(M)$. O grupo $Z^0(M)$ corresponde à todas funções que cumprem $df = 0$, ou seja, são constantes em cada componente conexa de M . Já que $B^0(M) = 0$, temos imediatamente que

$$H^0(M) = Z^0(M). \quad (3.13)$$

Vê-se também que $Z^0(M) = \mathbb{R}$, logo

$$H^0(M) = Z^0(M) = \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Se M for composto por n componentes conexas, teremos n grupos $Z^0(M)$ e então

$$H^0(M) = Z^0(M) = \mathbb{R}^n. \quad (3.15)$$

Outro exemplo pode ser ilustrado pela *Lei de Oersted-Ampère* da eletrodinâmica. Levando em consideração uma 1-forma de Oersted-Ampère a seguir:

$$w = \frac{2I}{c} \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right], \quad (3.16)$$

sendo $w \in Z^1(S^1)$. A lei de Ampère pode ser escrita como:

$$\int_{c_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{c_1} w = \frac{4\pi}{c} I, \quad (3.17)$$

com I sendo a corrente total e \vec{H} o campo magnético. Essa lei é equivalente a dizer que existe um potencial multivalorado:

$$v = v(x, y) = \frac{2I}{c} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.18)$$

no espaço $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, e $v \in \{v + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Temos por causa do primeiro grupo de de Rham que:

$$H^1(S^1) = \frac{Z^1(S^1)}{B^1(S^1)} \cong \{a dv | a \in \mathbb{R}\} \cong H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Uma interpretação estrutural da lei de Oersted-Ampère se dá para os seguintes casos mostrados na figura abaixo, com $w = -d\varphi$.

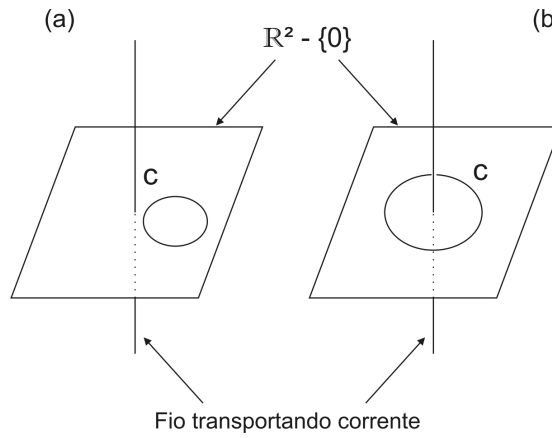


Fig. 3.1 – Interpretação física da cohomologia de de Rham.

Então a lei de Oersted-Ampère pode ser interpretada em termos do espaço:

$$B^1(S^1) = \{d\varphi \mid \varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})\}, \quad (3.20)$$

que é o elemento zero de $H^1(S^1)$. Isso corresponde a $a = 0$, e a implicação física é de que $\text{curl } \vec{H} = 0$ e conseqüentemente $\vec{H} = -\text{grad}\varphi$, situação representada pela figura (4.1a). Se $a \neq 0$, então $w \neq -d\varphi$, $w \notin B^1(S^1)$ e essa lei precisa ser interpretada em termos de outros elementos ao invés do elemento zero de $H^1(S^1)$. Em outras palavras, se $w = -d\varphi$ não é cohomólogo a zero, w é multivalorado.

3.4 Lema de Poincaré

Teorema 3.1 *Se w é uma k -forma em um aberto $U \subset M$, o qual é deformável a um ponto, tal que $dw = 0$, então existe uma $(k-1)$ -forma α tal que $w = d\alpha$.*

Prova: Construindo um operador linear $K : \Lambda^p(U \times I) \rightarrow \Lambda^{p-1}(U)$, $\forall p \geq 1$, tal que

$$K[H^*dw] + d[KH^*w] = w, \quad \forall w \in \Lambda^p(U), \quad (3.21)$$

onde H^* é induzido pelo mapa (1.7). Com isso em mãos podemos provar o lema de Poincaré, desde que $dw = 0$ produza $dK[H^*w] = w$. Dessa forma definiremos que $\alpha := K[H^*w]$, de modo que $d\alpha = w$. Agora precisamos mostrar que (3.21) é verdade.

Lema 3.1 *Sejam $U \subset M$ um aberto deformável a um ponto $x_0 \in U$ e H um mapa C^∞ em $U \times I$, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$,*

$$h : U \times I \rightarrow U, \quad H(x, 0) = x_0 ; H(x, 1) = x \quad \forall x \in U.$$

Se K é um mapa linear

$$K : \Lambda^p(U \times I) \rightarrow \Lambda^{p-1}(U),$$

é definido como se segue:

$$Kw = 0,$$

para $w = a_j(x, t)dx^j \in \Lambda^p(U \times I)$. E

$$Kw = \sum_{\bar{j}} \left(\int_0^1 b_{\bar{j}}(x, t) dt \right) \wedge dx^{\bar{j}},$$

para $w = b_{\bar{j}}(x, t)dt \wedge dx^{\bar{j}} \in \Lambda^p(U \times I)$.

Assim para qualquer $w \in \Lambda^p(U)$, temos

$$K[H^*dw] + d[KH^*w] = w.$$

Prova: Seja $w = a(x)dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \in \Lambda^p(U)$, então

$$H^*w = a(H(x, t))dH^{j_1} \wedge \dots \wedge dH^{j_p} \in \Lambda^p(U \times I), \quad (3.22)$$

onde

$$dH^j = \sum \frac{\partial H^j}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H^j}{\partial t} dt$$

e

$$H(x, t) = \{H^j(x^1, \dots, x^n, t)\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Seja $H^*w = \beta + \gamma$, com

$$\begin{aligned}\beta &= \sum b(x, t) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \\ \gamma &= \sum c(x, t) dt \wedge dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_{p-1}},\end{aligned}$$

e definindo dois mapas $i_0, i_1 : U \rightarrow U \times I$ por

$$i_0(x) = (x, 0) \in U \times I, \quad i_1(x) = (x, 1) \in U \times I, \quad (3.23)$$

então $i_0^*(\gamma) = 0$ e $i_1^*(\gamma) = 0$. De (3.23), temos

$$\begin{aligned}H \circ i_0 : U &\rightarrow x_0 \quad \text{é um mapa constante,} \\ H \circ i_1 : U &\rightarrow U \quad \text{é um mapa identidade.}\end{aligned} \quad (3.24)$$

E também

$$\begin{aligned}(H \circ i_0)^*(H^*w) &= i_0^*(H^*w) = 0, \\ (H \circ i_1)^*(H^*w) &= i_1^*(H^*w) = w.\end{aligned}$$

De (3.23) e (3.24) inferimos

$$i_0^*(\beta) = 0 \quad e \quad i_1^*(\beta) = w. \quad (3.25)$$

Agora a definição de (3.22), implica em

$$K(H^*w) = K(\gamma) = \sum \left(\int_0^1 c(x, t) dt \right) dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_{p-1}}, \quad (3.26)$$

dessa forma

$$d[K(H^*w)] = \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial c(x, t)}{\partial x^k} dt \right) dx^k \wedge \cdots \wedge dx^{l_{p-1}}, \quad (3.27)$$

mas $d(H^*w) = d\beta + d\gamma$ sendo então

$$\begin{aligned}d(H^*w) &= \sum \frac{\partial b}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} + \sum \frac{\partial b}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &+ \sum \frac{\partial c}{\partial x^k} dx^k \wedge dt \wedge dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_{p-1}}.\end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto

$$\begin{aligned}KH^*dw &= K[d(H^*w)] = \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial b(x, t)}{\partial t} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &- \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dt \right) dx^k \wedge dt \wedge dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_{p-1}}.\end{aligned} \quad (3.29)$$

Por fim de acordo com (3.25)

$$\begin{aligned} Kd(H^*w) + dK(H^*w) &= \sum b(x, 1)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} - \sum b(x, 0)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= i_1^*(\beta) - i_0^*(\beta) = w. \quad \square \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim se U é deformável a um ponto $x_0 \in U$, toda forma fechada em U é exata. Em outras palavras, toda forma fechada é localmente exata.

3.5 Aplicação do Lema de Poincarè

A teoria clássica do eletromagnetismo é baseada nas equações de Maxwell, numa notação que não manifesta um caráter covariante, e essas equações são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

usando as unidades de Heaviside-Lorentz, $c = 1$, ρ sendo a *densidade de carga* e \mathbf{j} a *densidade de corrente*. Mas também temos que as componentes do campo elétrico \mathbf{E} e do campo magnético \mathbf{B} são dadas por mais duas equações, sendo elas

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Essas duas equações envolvem seis quantidades, as componentes dos 3-vetores \mathbf{E} e \mathbf{B} , sendo que esses 3-vetores podem ser expressos em termos de quatro quantidades, as componentes do 3-vetor \mathbf{A} e a quantidade escalar ϕ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na verdade, essas quatro quantidades se transformam como as componentes de um 4-vetor $A = A^\mu$,

$$A^\mu \equiv (\mathbf{A}^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}). \quad (3.34)$$

Em termos dessas quantidades, podemos reescrever as equações (3.33) de uma forma covariante:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = dA, \quad (3.35)$$

onde as componentes do tensor $F_{\mu\nu}$ são as componentes dos campos elétrico e magnético:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo $F_{\mu\nu}$ sendo a *força*, enquanto A^μ dito o *potencial*. As duas equações homogêneas de Maxwell dadas por (3.32) podem ser escritas agora na forma

$$dF = d(dA) = 0,$$

ou seja,

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \quad (3.36)$$

Pois $F = F_{\mu\nu}$ sendo uma forma exata, sua derivada exterior resulta numa forma fechada. Agora, as outras duas equações de Maxwell (inhomogêneas) dadas por (3.31), são escritas como

$$\delta F = j, \quad \text{ou} \quad \partial_\mu F_{\mu\nu} = j^\nu,$$

sendo j^ν um 4-vetor o qual incorpora as fontes, que são a carga e a densidade de corrente: $j^\nu = (j^0, \mathbf{j}) = (\rho, \mathbf{j}^i)$, com $i = 1, 2, 3$.

Mas onde vemos a importância do Lema de Poincaré? Primeiramente se considerarmos um caso particular da teoria, no caso uma configuração da magnetostática. Temos que $\nabla \times \vec{E} = 0$, com \vec{E} sendo o campo elétrico. Com isso em mãos o Lema de Poincaré implica na existência de uma função escalar V tal que $\vec{E} = -\nabla V$, ou seja, o potencial elétrico. Também se aplica quando temos $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, pois do lema sabemos que existe um certo \vec{A} tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, ou em outras palavras, o potencial vetor. Outras aplicações do Lema de Poincaré serão vistas no decorrer desse trabalho.

Capítulo 4

Campos de Gauge

4.1 Campos de Gauge e Conexões

Seja G um grupo de Lie, com uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , e U um aberto de \mathbb{R}^n . Um campo de gauge em U é um campo de covetores A_μ , assumindo valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} . Um campo com valores em um espaço vetorial de dimensão r pode ser interpretado como uma r -upla de campos com valores reais, então se escolhermos uma base (e_1, \dots, e_r) para \mathfrak{g} , podemos expressar A_μ na forma de $A_\mu(x) = A_\mu^k(x)e_k$, onde $A_\mu^k(x)$ (para um k fixo) especifica um campo vetorial de valores reais em U .

Seja $\Psi(x)$ um campo tomando valores num espaço de representação T de G . (em outras palavras, Ψ se transforma de acordo com a representação T de G). A derivada covariante $\nabla_\mu \Psi$ do campo Ψ (a respeito do campo de gauge A_μ) é definida como

$$\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + t(A_\mu)\Psi, \quad (4.1)$$

onde t representa a diferencial da representação T . A força $F_{\mu\nu}$ do campo de gauge A_μ é definida por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (4.2)$$

Vemos que

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\Psi = t(F_{\mu\nu})\Psi. \quad (4.3)$$

Uma transformação (local) de gauge é uma função $g(x)$ com valores em G . Um campo $\Psi(x)$ que se transforma sob uma representação T é mapeado

por uma transformação de gauge $g(x)$ para um campo Ψ' por

$$\Psi'(x) = T(g(x))\Psi(x). \quad (4.4)$$

Um campo de gauge $A_\mu(x)$ é mapeado por g para um novo campo, por

$$A'_\mu(x) = \tau(g(x))A_\mu(x) - (\partial_\mu g)g^{-1}(x), \quad (4.5)$$

onde τ é a representação adjunta de G . Dizemos que os campos A_μ e A'_μ são *gauge-equivalentes*, e a função $g(x)$ realiza essa equivalência entre os campos. Também temos que

$$\nabla'_\mu \Psi'(x) = T(g(x))\nabla_\mu \Psi(x), \quad (4.6)$$

com ∇'_μ representando a derivada covariante com respeito ao campo A'_μ . A força $F'_{\mu\nu}$ do campo A'_μ é relacionada à $F_{\mu\nu}$ do campo A_μ por

$$F'_{\mu\nu} = \tau(g(x))F_{\mu\nu}(x). \quad (4.7)$$

Um campo A_μ é dito um *campo de gauge puro* se, e somente se,

$$A_\mu(x) = g^{-1}(x)\partial_\mu g(x), \quad (4.8)$$

para uma função g com valores em G . Isso mostra que a força de um campo de gauge puro é zero, e quando o domínio é simplesmente conexo, o inverso é válido, ou seja, se $F_{\mu\nu} = 0$ então $A_\mu = g^{-1}\partial_\mu g(x)$. Campos de gauge são uma generalização do campo eletromagnético, pois podemos considerá-lo um campo de gauge do grupo de Lie abeliano $U(1)$. As fórmulas acima relacionadas para a força de um campo e para a transformação de gauge, no caso de $G = U(1)$, se reduzem para as fórmulas padrão da teoria do campo eletromagnético:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \partial_\mu \lambda(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para todo campo de gauge pode-se associar uma *conexão*, que é na verdade uma regra para transportarmos ao longo de curvas uma quantidade que se transforma de acordo com a representação de G . Agora seja V um espaço vetorial r -dimensional, e U um aberto de \mathbb{R}^n . Uma s -forma diferencial com valores em V sobre U é dada por

$$w = \frac{1}{s!} w_{\lambda_1 \dots \lambda_s} dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_s},$$

onde $w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}$ são funções sobre U com valores em V . Se (v_1, \dots, v_r) é uma base para V , w pode ser escrita como $w = w^a v_a$, sendo w^a formas com valores reais. Então, essa forma diferencial w , com valores em V , pode ser vista como uma r -upla das formas w^a , com a variando de 1 até a dimensão r de V . Para um campo de gauge A_μ com valores na álgebra de Lie g , temos uma 1-forma, com valores em g , correspondente $A = A_\mu dx^\mu$. Se A'_μ é um campo gauge-equivalente a A_μ , a equivalência é dada por uma função g , e as 1-formas A e A' são relacionadas por

$$\begin{aligned} A' &= \tau(g)A - (dg)g^{-1}, \\ A &= \tau(g^{-1})A' + g^{-1}dg. \end{aligned} \quad (4.10)$$

E novamente vemos que se A_μ é gauge-equivalente a zero, podemos escrever que $A = g^{-1}dg$, o que está de acordo com (4.5) e (4.8). A força $F_{\mu\nu}$ é uma 2-forma com valores em g dada por

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A], \quad (4.11)$$

com $[A \wedge A]$ sendo uma forma diferencial com componentes $[A_\mu, A_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu$.

4.2 Teoria de Chern-Simons Abeliana

Teorias quânticas de campos resultam em uma ótima descrição de fenômenos físicos e a invariância local de gauge vem a ser um dos princípios básicos por trás da construção de modelos realísticos de partículas. Há uma situação particular na qual podemos desenvolver uma base para entendermos o porque da teoria de Chern-Simons nos motivar. E tal situação se dá quando o sistema físico é caracterizado por uma ação quadrática do tipo

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int \phi \Delta \phi. \quad (4.12)$$

Nessa equação ϕ representa o campo (ou um conjunto de campos) do modelo e Δ representa algum operador diferencial. Em teorias de campo usuais, a ação não é invariante sob transformações gerais de coordenadas (atuando nos campos da teoria) a menos que a métrica seja uma variável dinâmica. No modelo de Chern-Simons abeliano, a métrica introduzida em uma variedade não é uma variável da teoria, todavia, a ação de Chern-Simons, S_{CS} , é invariante pois ela não depende da métrica. Mais precisamente S_{CS} depende das *formas de Chern-Simons* [7],

estas possuem uma natureza topológica, tornando assim a métrica da variedade irrelevante.

Considerando agora a ação de Chern-Simons (abeliana) definida por [6, 8]

$$S_{CS} = \frac{k}{8\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (4.13)$$

onde A_μ é o campo vetorial.

As formas de Chern-Simons implicam em Lagrangeanas para teorias de gauge, invariantes sob algum grupo de simetria (G) em uma certa variedade de dimensão ímpar M . Uma Lagrangeana de Chern-Simons padrão é uma $(2n + 1)$ -forma, construída para uma conexão A e suas derivadas exteriores. Um caso simples é o da 3-forma $C_3(A) = A \wedge dA$, onde A é uma 1-forma de conexão para um grupo abeliano. Esse funcional também pode ser visto como uma integral de uma 3-forma sobre uma 3-variedade M , dado por

$$S_{CS} = e \int_M A \wedge dA, \quad (4.14)$$

que é invariante sob transformações gerais de coordenadas e de gauge (abeliano), com A_μ se transformando como um vetor covariante.

4.3 Generalização da Teoria de Chern-Simons

A descrição do campo teórico da teoria cohomológica de de Rham é dada pela seguinte ação:

$$S_{dR} = \int_M \sum_{k=1}^l w^{(n-k)} \wedge dw^{(k-1)}, \quad (4.15)$$

onde $w^s \in \Omega^s(M)$ são as s -formas em M , $s = 0, 1, 2, \dots, n$, $\dim M = n$, e $l = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ é a parte inteira do número $\frac{(n+1)}{2}$. As equações de Euler-Lagrange para esse funcional são

$$dw^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4.16)$$

As soluções para essas equações são elementos de $Z_{dR}^k(M)$. Soluções vindas do grupo $B_{dR}^k(M)$ resultam em soluções triviais. Portanto o espaço das soluções não triviais para as equações de campo (4.16) são dadas pelo espaço

$$\bigoplus_{k=0}^n H_{dR}^k(M). \quad (4.17)$$

Vemos que a descrição teórica da teoria de de Rham generaliza a teoria de Chern-Simons abeliana, pois, lembrando que a ação de Chern-Simons é

$$S_{CS} = \int_M A \wedge dA,$$

com $A = w^1 \in \Omega^1(M)$, $\dim M = 3$. A ação de de Rham para $n = 3$ toma a forma

$$\begin{aligned} S_{dR} &= \int_M (w^2 \wedge dw^0 + w^1 \wedge dw^1) \\ &= \int_M (w^2 \wedge dw^0) + \int_M (w^1 \wedge dw^1) \\ &= \int_M (w^2 \wedge dw^0) + \int_M A \wedge dA. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Capítulo 5

Variedades Complexas

5.1 Variedades Riemannianas

Seja M uma variedade diferenciável.

Definição 5.1 *Uma métrica riemanniana em M é um campo tensorial g do tipo $(2,0)$ o qual é simétrico, positivo e definido em todo M . Um par (M, g) onde g é uma métrica riemanniana é chamado de Variedade Riemanniana.*

Cada espaço tangente $T_p M$ de uma variedade riemanniana é então um espaço euclidiano pela forma bilinear de g_p . Todo vetor $\xi \in T_x M$ em uma variedade riemanniana define uma 1-forma ξ^b pela fórmula

$$\xi^b(X) := g(\xi, X), \quad \forall X \in T_x M. \quad (5.1)$$

Similarmente, um endomorfismo A de $T_x M$ define uma forma bilinear A^b pela fórmula

$$A^b(X, Y) := g(A(X), Y), \quad \forall X, Y \in T_x M. \quad (5.2)$$

Uma importante observação a ser feita é que em variedades riemannianas podemos “medir” o comprimento de curvas. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva simples e diferenciável, seu comprimento é definido como

$$L(\gamma) := \int_0^1 g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{1/2} dt, \quad (5.3)$$

e vemos que ele depende apenas da própria curva, e não da sua parametrização. De fato, se $t = t(s)$ é um difeomorfismo suave do intervalo $[0, 1]$ e $c(s) := \gamma(t(s))$ então $\dot{c}(s) = \dot{\gamma}(t(s)) \cdot t'(s)$ e $g(\dot{c}(s), \dot{c}(s))^{1/2} = g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{1/2} \cdot t'(s)$, vem da fórmula de mudança de variáveis.

5.2 Funções Holomórficas

Uma função $F = f + ig : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita holomórfica se satisfaz as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \quad (5.4)$$

Sendo j um endomorfismo de \mathbb{R}^2 correspondendo à multiplicação por i em \mathbb{C} via a identificação de \mathbb{R}^2 com \mathbb{C} dada por $z = x + iy \mapsto (x, y)$. O endomorfismo j pode ser expresso por

$$j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Se enxergarmos F como uma função real $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sua diferencial num ponto $p \in U$ é o mapa linear

$$(F_*)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Dessa maneira vemos que as relações de Cauchy-Riemann são equivalentes à relação de comutação

$$j \circ (F_*)_p = (F_*)_p \circ j, \quad \forall p \in U. \quad (5.7)$$

Podemos identificar \mathbb{C}^m com \mathbb{R}^{2m} via

$$(z_1, \dots, z_m) = (x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m),$$

e denotando por j_m o endomorfismo de \mathbb{R}^2 correspondendo à multiplicação por i em \mathbb{C}^m :

$$J_m := \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Um mapa $F : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é holomórfico se, e somente se, a diferencial F_* de F como um mapa real $F : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ satisfizer

$$J_m \circ (F_*)_p = (F_*)_p \circ J_n. \quad (5.9)$$

5.3 As Variedades Complexas

Uma variedade complexa de dimensão complexa m é uma variedade topológica (M, \mathcal{U}) cujo atlas $(\phi_u)_{U \in \mathcal{U}}$ satisfaz a seguinte condição de compatibilidade: para toda intersecção $U, V \in \mathcal{U}$, o mapa entre os abertos de \mathbb{C}^m

$$\phi_{UV} := \phi_U \circ \phi_V^{-1} \quad (5.10)$$

é holomórfico. O par (U, ϕ_U) é dito uma carta e a coleção de todas as cartas é dita uma *estrutura holomórfica*. Temos que o mapa holomórfico entre abertos de \mathbb{C}^m é, em particular, um mapa diferencial entre abertos de \mathbb{R}^{2m} . Além disso, toda variedade complexa M de dimensões complexas m define uma variedade real $2m$ -dimensional $M_{\mathbb{R}}$, a qual é o mesmo que um espaço topológico M . O inverso não é verdade, pois, nem todo mapa diferencial é holomórfico. Entretanto as estruturas holomórficas de M estão encodadas em um tensor da variedade real $M_{\mathbb{R}}$, o qual é um campo de endomorfismos do espaço tangente definido como:

- Para todo $X \in T_x M_{\mathbb{R}}$, escolhemos $U \in \mathcal{U}$ contendo x e definimos

$$J_U(X) = (\phi_U)_*^{-1} \circ j_m \circ (\phi_U)_*(X).$$

Se escolhermos algum $V \in \mathcal{U}$ contendo x , então $\phi_{UV} = \phi_V \circ \phi_U^{-1}$ é holomórfico, e $\phi_V = \phi_{VU} \circ \phi_U$. Dessa forma

$$\begin{aligned} J_V(X) &= (\phi_V)_*^{-1} \circ j_m \circ (\phi_V)_*(X) = (\phi_V)_*^{-1} \circ j_m \circ (\phi_{VU})_* \circ (\phi_U)_*(X) \\ &= (\phi_V)_*^{-1} \circ (\phi_{VU})_* \circ j_m \circ (\phi_U)_*(X) = (\phi_U)_*^{-1} \circ j_m \circ (\phi_U)_*(X) \\ &= J_U(X). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tais fatos dizem que J_U não depende de U . Sua coleção, então, é um tensor J bem definido em $M_{\mathbb{R}}$ e satisfaz $J^2 = -Id$.

Definição 5.2 *Um tensor do tipo $(1,1)$ J em uma variedade (real) M , o qual satisfaz $J^2 = -Id$, é dito uma estrutura quase complexa.*

O par (M, J) se refere à uma variedade quase complexa. A partir desse momento sempre identificaremos uma variedade complexa M com sua variedade real subjacente $M_{\mathbb{R}}$, juntamente com o tensor J .

5.4 Espaço Tangente Complexificado

Seja (M, J) uma variedade quase complexa. Queremos agora diagonalizar o endomorfismo J , para isso temos que complexificar o espaço tangente. Definimos

$$TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Extenderemos todos os endomorfismos e operadores diferenciais de TM para $TM^{\mathbb{C}}$ pela linearidade de \mathbb{C} . Seja $T^{1,0}M$, denotando o auto-espço de $TM^{\mathbb{C}}$ correspondendo ao auto-valor i de J , e $T^{0,1}M$ denotando o autoespço de $TM^{\mathbb{C}}$ correspondendo ao auto-valor $-i$ de J .

Lema 5.1 *Tem-se*

$$T^{1,0}M = \{X - iX \mid X \in TM\}, \quad T^{0,1}M = \{X + iX \mid X \in TM\}$$

$$\text{e } TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M.$$

Teorema 5.1 *Seja (M, J) uma variedade quase complexa. A estrutura quase complexa J (em M) vem de uma estrutura holomórfica se e somente se a distribuição $T^{0,1}M$ é integrável.*

Prova: suponha que J venha de uma estrutura holomórfica em M . Considere uma carta holomórfica (U, ϕ_U) e seja $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ a α -ésima componente de ϕ_U . Se $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ formam uma base de \mathbb{R}^{2m} , temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (\phi_U)_*^{-1}(e_\alpha) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = (\phi_U)_*^{-1}(e_{m+\alpha}).$$

E mais, $j_m(e_\alpha) = e_{m+\alpha}$, diretamente da definição temos

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}.$$

Usando a seguinte notação:

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right). \quad (5.12)$$

Direto do lema (5.1) e da equação (5.12), vemos que $\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$ são seções de $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ respectivamente. Além disso, eles formam uma base local em cada ponto de U . Sejam agora Z e W duas seções locais de $T^{0,1}$ escritas como

$$Z = \sum Z_\alpha \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \right), \quad W = \sum W_\alpha \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \right). \quad (5.13)$$

Em um cálculo direto, ficamos com

$$[Z, W] = \sum_{\alpha, \beta=1}^m Z_\alpha \frac{\partial W_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} - \sum_{\alpha, \beta=1}^m W_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} \quad (5.14)$$

o que resulta em uma seção local de $T^{0,1}M$. \square

Uma estrutura quase complexa surgindo de uma estrutura holomórfica é dita uma *estrutura complexa*. Uma vez com essas coordenadas em mãos é fácil mostrar que as funções de transição são holomórficas. Suponha que (u_α, v_α) é um outro sistema de coordenadas locais:

$$\frac{\partial}{\partial v_\alpha} = J \frac{\partial}{\partial u_\alpha}.$$

Teremos

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\beta} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \quad (5.15)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\beta} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_\beta}. \quad (5.16)$$

Aplicando J em (5.15) e comparando com (5.16)

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \text{ e } \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}. \quad (5.17)$$

Isso mostra que as funções de transição são holomórficas.

5.5 Formas Holomórficas e Campos Vetoriais

5.5.1 Decomposição do Espaço Exterior Complexificado

Seja (M, J) uma variedade quase complexa. Agora voltaremos nossa atenção para as formas exteriores e ao espaço exterior complexificado $\Lambda_{\mathbb{C}}^* M = \Lambda^* M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. As seções de $\Lambda_{\mathbb{C}}^* M$ podem ser vistas como somas formais de $w + i\tau$, onde w e τ são formas reais em M . Definindo os seguintes sub-espços de $\Lambda_{\mathbb{C}}^1 M$:

- $\Lambda_{\mathbb{C}}^{1,0} M := \{\xi \in \Lambda_{\mathbb{C}}^1 M \mid \xi(Z) = 0, \forall Z \in T^{0,1} M\}$,
- $\Lambda_{\mathbb{C}}^{0,1} M := \{\xi \in \Lambda_{\mathbb{C}}^1 M \mid \xi(Z) = 0, \forall Z \in T^{1,0} M\}$.

As seções desses sub-espços são chamadas formas do tipo $(1,0)$ e do tipo $(0,1)$ respectivamente. O lema (5.1) nos dá:

Lema 5.2 *Tem-se*

- $\Lambda^{1,0} M = \{w - iw \circ J \mid w \in \Lambda^1 M\}$,
- $\Lambda^{0,1} M = \{w + iw \circ J \mid w \in \Lambda^1 M\}$, e

$$\bullet \Lambda_{\mathbb{C}}^1 M = \Lambda^{1,0} M \oplus \Lambda^{0,1} M.$$

Denotaremos a k -ésima potência exterior de $\Lambda^{0,1} M$ por $\Lambda^{0,k} M$ e $\Lambda^{p,q}(M)$ denotando o produto tensorial $\Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,q}$. A potência exterior de uma soma direta de espaços vetoriais pode ser descrita por:

$$\Lambda^k(E \oplus F) \simeq \bigoplus_{i=0}^k \Lambda^i E \otimes \Lambda^{k-i} F. \quad (5.18)$$

Do lema (5.2) temos:

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k M \simeq \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} M. \quad (5.19)$$

Seções de $\Lambda^{p,q} M$ são ditas formas do tipo (p,q) e o espaço das (p,q) -formas é $\Lambda^{p,q} M$. Uma k -forma complexa pertence a $\Lambda^{p,q} M$ se, e somente se, ela desaparecer quando aplicada a $(p+1)$ -vetores de $T^{1,0} M$ ou em $(q+1)$ -vetores de $T^{0,1} M$.

Se J é uma estrutura complexa, podemos descrever esses espaços em termos de coordenadas locais holomórficas. Seja $z_{\alpha} = x_{\alpha} + iy_{\alpha}$ a α -ésima coordenada de ϕ_u . Extendendo a derivada exterior a funções complexas, pela linearidade de \mathbb{C} , definimos 1-formas complexas $dz_{\alpha} = dx_{\alpha} + idy_{\alpha}$ e $d\bar{z}_{\alpha} = dx_{\alpha} - idy_{\alpha}$. Então $\{dz_1, \dots, dz_m\}$ e $\{d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_m\}$ são bases locais para $\Lambda^{1,0} M$ e $\Lambda^{0,1} M$, respectivamente. Assim as bases para $\Lambda^{p,q} M$ serão

$$\{dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_q\}. \quad (5.20)$$

5.5.2 Objetos Holomórficos em Variedades Complexas

Começando por caracterizar as funções holomórficas.

Lema 5.3 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ uma função suave em M . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é holomórfica.
2. $\partial_Z f = 0, \forall Z \in T^{0,1} M$.
3. df é uma forma do tipo $(1,0)$.

Prova: (2) \Leftrightarrow (3). $df \in \Lambda^{1,0} M \Leftrightarrow df(Z) = 0, \forall Z \in T^{0,1} M \Leftrightarrow \partial_Z f = 0, \forall Z \in T^{0,1} M$

(1) \Leftrightarrow (3). A função f é holomórfica se, e somente se, $f \circ \phi_U^{-1}$ é holomórfica para toda carta (U, ϕ_U) , o que é equivalente a $f_* \circ (\phi_U)_*^{-1} \circ j_m =$

$if_* \circ (\phi_U)_*^{-1}$, ou seja, $f_* \circ J = if_*$. Esta última equação apenas diz que para todo vetor real X , $df(JX) = idf(X)$, ou melhor, que $idf(X + iJX) = 0$, $\forall X \in TM$, o que é equivalente a $df \in \Omega^{1,0}M$.

Sabendo que: $d(\Omega^{p,q}M) \subset \Omega^{p+1,q}M \oplus \Omega^{p,q+1}M, \forall 0 \leq p, q \leq m$, para todo (p, q) fixo. Definimos os operadores diferenciais: $\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$; $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$, por $d = \partial + \bar{\partial}$. Temos que as seguintes identidades se mantêm:

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0 \text{ e } \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0. \quad (5.21)$$

Prova: Temos que $d^2 = 0 = (\partial + \bar{\partial})^2 = \partial^2 + \bar{\partial}^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)$, e os três operadores no último termo assumem valores em diferentes sub-espacos de $\Lambda_{\mathbb{C}}^*M$.

Proposição 5.1 *Seja $w \in \Lambda^{1,1}(M) \cap \Lambda^2(M)$ uma 2-forma real do tipo (1,1) em uma variedade complexa M . Então w é fechada se, e somente se, todo ponto $x \in M$ possuir uma vizinhança aberta U tal que a restrição de w para U é igual a $i\partial\bar{\partial}u$ para alguma função real u em U .*

Prova: $d(i\partial\bar{\partial}) = i(\partial + \bar{\partial})\partial\bar{\partial} = i(\partial^2\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}^2) = 0$, por causa das identidades acima vistas, $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$.

Lema 5.4 *(Lema de Dolbeault) Uma (0,1)-forma $\bar{\partial}$ -fechada é localmente $\bar{\partial}$ -exata.*

Seja w uma forma real fechada do tipo (1,1). Do lema de Poincaré, sabemos que existe localmente uma 1-forma real τ , tal que $w = d\tau$. Seja $\tau = \tau^{1,0} + \tau^{0,1}$ a decomposição de τ em (1,0)-formas e (0,1)-formas, substituindo em $w = d\tau$, teremos

$$w = d\tau = \bar{\partial}\tau^{0,1} + (\partial\tau^{0,1} + \bar{\partial}\tau^{1,0}) + \partial\tau^{1,0}.$$

Assumiremos pelo lema (5.4) que existe uma função local f tal que $\tau^{0,1} = \bar{\partial}f$, implicando que $\bar{\partial}\tau^{0,1} = 0$. Pela conjugação complexa $\tau^{1,0} = \partial\bar{f}$, ficamos com $w = \partial\tau^{0,1} + \bar{\partial}\tau^{1,0} = (\partial\bar{\partial}f + \bar{\partial}\partial\bar{f}) = i\partial\bar{\partial}(2\text{Im } f)$, agora pela proposição (5.1), se $w = i\partial\bar{\partial}u \rightarrow dw = 0$, usando $u = (2\text{Im } f)$.

Usando o mesmo raciocínio da decomposição do operador $d = \partial + \bar{\partial}$, faremos a decomposição do operador codiferencial $\delta = \partial^* + \bar{\partial}^*$, usando

- $\partial^* : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p-1,q}(M), \quad \partial^* := - * \bar{\partial}^*$

- $\bar{\partial}^* : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q-1}(M), \quad \bar{\partial}^* := - * \partial^*.$

Definindo os operadores $\Delta^\partial := \partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial$ e $\Delta^{\bar{\partial}} := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ e, por fim, o operador de Laplace complexo $\Delta := \Delta^\partial + \Delta^{\bar{\partial}}$.

Capítulo 6

Cohomologia de Dolbeault

6.1 Definindo

Admitindo uma (r, s) -forma θ , uma (r', s') -forma ξ e M uma variedade complexa de dimensão complexa m , sabemos que $\theta \in \Omega^{r,s}(M)$ e $\bar{\theta} \in \Omega^{s,r}(M)$. Também temos que, se $\xi \in \Omega^{r',s'}(M)$ então $\theta \wedge \xi \in \Omega^{r+r',s+s'}(M)$ e por fim, uma q -forma complexa w pode ser escrita unicamente como

$$w = \sum_{r+s=q} \frac{1}{r!s!} w_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_s}. \quad (6.1)$$

Observamos também que para a mesma (r, s) -forma w ,

$$dw = \frac{1}{r!s!} \left(\frac{\partial w_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda + \frac{\partial w_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \right) \times dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_s},$$

sendo dw uma mistura de uma $(r+1, s)$ -forma e uma $(r, s+1)$ -forma. Analizando esta “mistura”, verificamos que podemos separar a atuação do operador d em $d = \partial + \bar{\partial}$ onde $\partial : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r+1,s}(M)$ e $\bar{\partial} : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r,s+1}(M)$. Agora, se para uma forma $w = w_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu$ tivermos

$$\partial w = \frac{\partial w_{\mu\bar{\nu}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \wedge dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu,$$

e

$$\bar{\partial} w = \frac{\partial w_{\mu\bar{\nu}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu,$$

os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ são chamados de *Operadores de Dolbeault*.

Podemos utilizar o mesmo raciocínio desenvolvido para a Cohomologia de de Rham e definir que se $\bar{\partial} w = 0$ a (r, s) -forma diferencial é dita **$\bar{\partial}$ -fechada**

e se $w = \bar{\partial}\alpha$ ela será dita $\bar{\partial}$ -**exata**. Com isso em mãos e novamente sabendo que $\bar{\partial}^2 = 0$, vemos que toda forma $\bar{\partial}$ -exata é $\bar{\partial}$ -fechada.

Considerando a seguinte sequência de homomorfismos

$$\Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,n}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0 \quad (6.2)$$

Como $\bar{\partial}^2 = 0$, a soma direta

$$\Omega^{p,*}(M) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^{p,q}(M), \quad (6.3)$$

é um complexo diferencial, chamado de *Complexo de Dolbeault*.

Definição 6.1 *Seja $Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ o espaço das formas $\bar{\partial}$ -fechadas em M , e $B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ o espaço das formas $\bar{\partial}$ -exatas em M , os (r,s) -ésimos grupos de $\bar{\partial}$ -cohomologia de Dolbeault serão dados por*

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) = \frac{Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)}{B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)}. \quad (6.4)$$

A soma direta

$$H_{\bar{\partial}}^{p,*}(M) = \bigoplus_{q=0}^n H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M), \quad (6.5)$$

é dita *Cohomologia de Dolbeault de M* .

Ao contrário da cohomologia de de Rham, a cohomologia de Dolbeault não é um invariante topológico da variedade, pois, ela depende diretamente da estrutura complexa J . Um elemento $[w] \in H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ é uma classe de equivalência das (r,s) -formas $\bar{\partial}$ -fechadas que se diferem por uma forma $\bar{\partial}$ -exata,

$$[w] = \{w' \in \Omega^{r,s}(M) \mid w - w' = \bar{\partial}\phi\}, \quad \phi \in \Omega^{r,s-1}(M). \quad (6.6)$$

Da mesma maneira que os grupos de cohomologia de de Rham de \mathbb{R}^n são triviais (como já visto), os grupos de $\bar{\partial}$ -cohomologia de Dolbeault de \mathbb{C}^m também são, ou seja, toda forma $\bar{\partial}$ -fechada é $\bar{\partial}$ -exata. Por fim, os grupos de $\bar{\partial}$ -cohomologia avaliam a não trivialidade da variedade complexa M .

6.2 Aplicação

Consideremos uma variedade complexa n dimensional M . A descrição teórica da cohomologia de Dolbeault de M é dada pelo seguinte funcional:

$$S_{Dol} = \int_M \sum_{q=1}^n w^{(n-p,n-q)} \wedge \bar{\partial}w^{(p,q-1)}, \quad (6.7)$$

onde $w^{(l,s)} \in \Omega^{(l,s)}(M)$. As equações de movimento são dadas por:

$$\bar{\partial}w^{(p,q-1)} = 0, \quad \bar{\partial}w^{(n-p,n-q)} = 0, \quad q = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6.8)$$

O espaço das soluções é um espaço vetorial dado por

$$\bigoplus_{q=1}^n (H_{\bar{\partial}}^{p,q-1}(M) \oplus H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}(M)).$$

A teoria de Dolbeault descrita pelo funcional acima generaliza a teoria BF holomórfica abeliana dada pelo seguinte funcional:

$$S_{AhBF} = \int_M B^{n,n-2} \wedge F^{0,2}, \quad (6.9)$$

onde $B^{n,n-2} := w^{n,n-2} \in \Omega^{n,n-2}(M)$, $F^{0,2} = \bar{\partial}w^{0,1} \in \Omega^{0,1}(M)$.

A teoria BF holomórfica abeliana não foi estudada, mas as regras para encontrarmos as equações do campo são as mesmas para os casos anteriores. Por essa razão podemos dizer que a teoria de Dolbeault a generaliza, pois, por exemplo, para uma variedade complexa M de dimensão $n = 2$, ficamos com

$$S_{AhBF} = \int_{M^2} B^{2,0} \wedge F^{0,2}, \quad (6.10)$$

e

$$\begin{aligned} S_{Dol} &= \int_M \sum_{q=1}^n w^{(n-p,n-q)} \wedge \bar{\partial}w^{(p,q-1)} \\ &= \int_{M^2} w^{(2,1)} \wedge \bar{\partial}w^{(0,0)} + \int_{M^2} w^{(2,0)} \wedge \bar{\partial}w^{(0,1)} \\ &= \int_{M^2} w^{(2,1)} \wedge \bar{\partial}w^{(0,0)} + S_{AhBF}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

para uma forma $w^{0,q}$.

Capítulo 7

Conclusão

Sendo M um espaço topológico ou alguma variedade diferenciável e assumindo-a como sendo o espaço de configuração de algum sistema físico, esse M também é relacionado à uma estrutura geométrica subjacente a esse sistema. Elementos geométricos de uma estrutura geométrica tais como intervalos, segmentos de curvas, superfícies e volumes são vistos como quantidades básicas numa correspondência bijetiva com quantidades físicas e são a base de fundação de qualquer teoria física.

Campos físicos e observáveis aparecem naturalmente dessas quantidades básicas e são, muitas vezes, facilmente bem descritos por formas diferenciais e grupos cohomológicos do espaço de configuração M . Toda teoria física abrange quantidades físicas mensuráveis que são relacionadas naturalmente com entidades geométricas, tais como, pontos $p_i \in M$, representam quantidades físicas como massas e cargas, ou elementos de superfície dão suporte às integrais de fluxo

$$e = \frac{1}{4\pi} \int_{c_2} E_{ij} dx^i dx^j = \int_{c_2} w$$

e

$$e = \int_{c_2} H_{ij} dx^i dx^j = \int_{c_2} *w$$

com $w \in \Omega^2(M)$ e $c_2 \in C_2(M)$.

Campos físicos são objetos intrínsecos definidos em um espaço de configuração não linear (M^n). Por outro lado, idealmente, (M^n) é descrito em termos de espaços lineares; uma idealização que não necessariamente corresponderá ao observado na natureza. Esses objetos intrínsecos são definidos aos pares

$$(w^p, c_p), \quad w^p \in \Omega^p(M), \quad c_p \in C_p(M), \quad p = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Para melhor compreensão veja os apêndices (A) e (B). Observáveis físicos são associados à campos descritos acima em termos de um mapa bilinear não-degenerado, β ,

$$\beta : H^p(M) \times H_p(M) \rightarrow \mathbb{R}; \quad ([w^p], [c_p]) \mapsto \int_{c_p} w^p$$

o que nos diz que a estrutura matemática subjacente das quantidades do campo do tipo acima descrito é essencialmente a Cohomologia de de Rham.

Um simples exemplo pode ser ilustrado se utilizarmos a cohomologia de de Rham na mecânica. Supondo um campo $w = F_i dx^i$ com $w \in \Omega^1(M)$, quais serão as condições topológicas do espaço de configuração M para que W seja um campo conservativo? Considerando primeiramente um campo definido pelo par (w^1, c_1) , com $w^1 = -dV$, onde V possui derivadas parciais e seja bem definido, isso nos diz que

$$\int_{x_1}^{x_2} dV = V(x_2) - V(x_1),$$

é independente do caminho c_1 que une os dois pontos $x_1, x_2 \in M$. Portanto, a regra para β definida acima se aplica, e qualquer que seja $c_1 \in \mathring{C}_1(M)$,

$$\beta : H^1(M) \times H_1(M) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (w^1, c_1) \mapsto \int_{c_1} w^1 = \int_{c_1} F_i dx^i = 0. \quad (7.1)$$

A regra (7.1) se mantém para todos os caminhos fechados c_1 que podem ser deformáveis a um ponto, ou seja, nesse caso

$$H^1(M) = 0.$$

Dessa forma vemos que as condições topológicas de M que caracterizam um campo conservativo $w^1 = -dV$ são

$$H^1(M) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{c_1} F_i dx^i = 0. \quad (7.2)$$

Finalizando este trabalho, percebemos que o estudo da cohomologia é de suma importância na física, pois, analisamos com ela características globais dos espaços utilizados na criação de modelos. Ao longo dos capítulos desse trabalho, almejamos estabelecer as ferramentas matemáticas necessárias para a compreensão dessa teoria.

Estudamos apenas as cohomologias de de Rham e de Dolbeault, mas existem diversas teorias cohomológicas, dentre elas as de Hochschild e de Čech. A simplicidade da idéia juntamente com sua vasta margem de implicações e resultados tornam esse estudo bastante interessante. O presente trabalho é apenas uma pequena amostra disso.

Referências

- [1] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger imprint, New York, 1990.
- [2] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York, 1963.
- [3] A. S. Schwarz, *Topology for Physicists*, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- [4] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Phys. Rep. C **66**, 1980, p.213.
- [5] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry: methods and applications.*, Springer, New York, 1990.
- [6] A. S. Schwarz, *The Partition Function of Degenerate Quadract Functional and Ray-Singer Invariants*, Lett. Math. Phys. 2, 1978, p.247-252.
- [7] S. S. Chern, J. Simons, *Characteristic Forms and Geometric Invariants*, The Annals of Mathematics, Second Series **99**(1), p. 48-69.
- [8] A. S. Schwarz, *The Partition Function of a Degenerate Functional*, Commun. Math. Phys. **67**(1), 1978.
- [9] A. A. Bytsenko, M. E. X. Guimarães, *Expository Remarks on Topological Field Theories, Branes, Complexes and Categories*, Fifth International Conference on Mathematical Methods in Physics, 2006.

Apêndice A

Homologia

Definiremos certos grupos abelianos, chamados *grupos de homologia*, os quais mostram os números de buracos em algum espaço topológico.

Definição: Duas cadeias fechadas ou *cycles*, c'_p e c''_p são ditas homólogas se diferirem por um contorno (*boundary*):

$$c'_p \sim c''_p \Leftrightarrow \exists c_{p+1} \in C_{p+1} : c'_p - c''_p = \partial c_{p+1}. \quad (\text{A.1})$$

Um caso especial dessa definição se dá quando um dado c_p é um contorno, $c_p = \partial c_{p+1}$, então c_p é dito homólogo a zero, $c_p \sim 0$. Para cada inteiro $p \geq 0$, $C_p(M)$ será o grupo de p -cadeia diferenciáveis em M e $\partial : C_p \rightarrow C_{p-1}$ será o mapa contorno (*boundary map*). Então

$$C_p = \{c_p \in C_p(M) \mid \partial c_p = 0\} = \ker \partial, \quad (\text{A.2})$$

será o grupo de ciclos. De uma maneira similar, temos:

$$\partial C_{p+1} = \{\partial c \mid c \in C_{p+1}\} = \text{Im} \partial, \quad (\text{A.3})$$

sendo o grupo dos contornos. Sendo $\partial c = b$, temos $\partial b = \partial(\partial c) = 0$, e $\partial C_{p+1} \subseteq C_p$. A imagem do homeomorfismo ∂ cai no kernel de ∂ , e ∂C_{p+1} é um subgrupo de C_p .

Podemos agora introduzir o grupo dito *p -ésimo grupo diferenciável de homologia*, dado por:

$$H_p(M) := \frac{C_p(M)}{\partial C_{p+1}} = \frac{\ker \partial}{\text{Im} \partial}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

onde tal grupo possui como elemento classes homológicas.

Apêndice B

Propriedades de Integração

- A integral de uma forma exata sobre um ciclo desaparece.

$$\int_c w = \int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha = 0. \quad (\text{B.1})$$

- A integral de uma forma fechada sobre um contorno b desaparece.

$$\int_b w = \int_{\partial c} w = \int_c dw = 0. \quad (\text{B.2})$$

- A integral de uma forma fechada sobre um ciclo depende somente da classe homológica do ciclo, pois, se $c' \sim c''$ então existe um c tal que $c' - c'' = \partial c$, e

$$\int_{c'} w = \int_{c'' + \partial c} w = \int_{c''} w + \int_{\partial c} w = \int_{c''} w. \quad (\text{B.3})$$

- A integral de uma forma fechada sobre um ciclo depende somente da classe cohomológica da forma, pois, se $w' \sim w''$ então existe um α tal que $w' - w'' = d\alpha$, e

$$\int_c w' - \int_c w'' = \int_c d\alpha = 0 \quad \text{e} \quad \int_c w' = \int_c w''. \quad (\text{B.4})$$