



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

DEMETRIO SEDLAK RIBEIRO JÚNIOR

**ANÁLISE DE SISTEMAS DE DOIS E TRÊS SPINS
ACOPLADOS**

Londrina
2016

DEMETRIO SEDLAK RIBEIRO JÚNIOR

**ANÁLISE DE SISTEMAS DE DOIS E TRÊS SPINS
ACOPLADOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Mário César Baldiotti

Londrina
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Ribeiro Jr., Demetrio S..

Análise de Sistemas de Dois e Três Spins Acoplados / Demetrio S. Ribeiro Jr. - Londrina, 2016.
45 f. : il.

Orientador: Mário C. Baldiotti.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Computação Quântica - Teses. 2. Spins Acoplados - Teses. 3. Portas Lógicas Quânticas - Teses. I. Baldiotti, Mário C.. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

DEMETRIO SEDLAK RIBEIRO JÚNIOR

**ANÁLISE DE SISTEMAS DE DOIS E TRÊS SPINS
ACOPLADOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Mário César Baldiotti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Rodrigo Fresneda
Universidade Federal do ABC - UFABC

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 08 de Abril de 2016.

Apesar dos pesares, dedico este trabalho à
minha Esposa e minha Mãe, e que toda
glória deste seja de Jesus Cristo.

“É esse o vírus que eu sugiro que você contraia,
na procura pela cura da loucura, quem tiver
cabeça dura vai morrer na praia.”

A Carta. **Djavan**

RIBEIRO JR., D. S. **Análise de Sistemas de Dois e Três Spins Acoplados**. 2016. 45 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Este trabalho foi estruturado na análise e estudo de redes de duas e três partículas (spins) acopladas. Com foco, especialmente, em suas aplicações na computação quântica. Onde os resultados apresentados possuem um considerável potencial prático na manipulação destes sistemas, quando formados por *Quantum Dots*. No que se refere a sistemas de dois spins acoplados, a ênfase é dada na implementação de Portas Lógicas Quânticas Universais. Uma vez que, através destas, pode-se realizar qualquer tipo de processamento com os Algoritmos Quânticos. As condições e campos para o desenvolvimento de portas específicas são comentados. Para sistemas de três spins acoplados, a ênfase é dada no desenvolvimento de algoritmos de correção de erros. Em todos os casos, a teoria é desenvolvida visando sua implementação prática. Portanto, os cuidados necessários para executar as condições teóricas também são levados em consideração. Bem como a utilização de soluções exatas que envolvam campos passíveis de serem realmente produzidos em laboratório.

Palavras-chave: Equação de Spin. Sistemas de Dois, Quatro e Oito Níveis. Redução de níveis. Implementação. Pulso Adiabático.

RIBEIRO JÚNIOR, D. S. **Analysis of Two and Three Coupled Spins Systems.** 2016. 45 p. Dissertation (Master in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

This work was structured in the analysis and study of lattices model of two and three coupled particles (spins). The focus is quantum computing. The presented results have considerable practice potential in the manipulation of these systems, when formed by *Quantum Dots*. As regards the two coupled spin systems, the emphasis is on the implementation of Universal Quantum Gates. Once using these gates, it's possible perform any kind of processing with quantum algorithms. The conditions and fields for the development of specific gates are commented. For three coupled spins systems, the emphasis is on the development of error correction algorithms. In all cases, the theory is developed to present a practical implementation. And the necessary precautions to perform the theoretical conditions are also taken into consideration. As well as the use of exact solutions describing fields that can be actually produced in laboratory.

Key words: Spin Equation. Two, Four and Eight Level-Systems. Reduction of levels. Implementation. Adiabatic Pulse.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1. CARACTERÍSTICAS DAS PRINCIPAIS PORTAS LÓGICAS	11
Figura 3.1.3.1. VARIAÇÃO DEGRAU X VARIAÇÃO ADIABÁTICA	37

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
1.1 O BIT E AS PORTAS LÓGICAS	9
1.2 O <i>QUBIT</i> E AS PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS	12
1.3 PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS DE UM E DOIS <i>QUBITS</i>	14
1.4 CORREÇÃO DE ERROS E TRÊS <i>QUBITS</i>	16
1.4.1 O Código de Três <i>Qubits</i> para Canal de Inversão	16
2 DESENVOLVIMENTO	19
2.1 EQUAÇÃO DE SPIN	19
2.2 SISTEMAS DE DOIS E TRÊS SPINS ACOPLADOS	23
2.3 REDUÇÃO DE NÍVEIS EM SISTEMAS DE SPINS ACOPLADOS	24
2.3.1 Redução para o Caso de Dois Spins Acoplados	25
2.3.2 Redução para o Caso de Três Spins Acoplados	28
3 ALGUMAS APLICAÇÕES	32
3.1 IMPLEMENTAÇÃO TEÓRICA DE PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS	32
3.1.1 A <i>Porta NOT</i>	32
3.1.2 Uma Porta Lógica Quântica Universal (<i>Porta XOR</i>)	33
3.1.3 O Campo Adiabático	36
4 CONCLUSÃO	38
A Relação de Identidade da Configuração Triangular	39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43

1 INTRODUÇÃO

1.1 O Bit e as Portas Lógicas

O bit (sigla dada para dígito binário) é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida, podendo assumir apenas dois valores, 0 ou 1. Assim como introduzido por Leibniz (e posteriormente aperfeiçoado por Boole) [1] os bits também podiam representar alguns conceitos como ativo e inativo, aceso e apagado, verdadeiro e falso, de modo que construções feitas com mais de um bit serviam para representar conceitos intermediários, como por exemplo:

- 00 – Desligado;
- 01 – Tensão/carga baixa;
- 10 – Tensão/carga moderada;
- 11 – Tensão/carga alta.

Desta forma um conjunto de *bits* pode então representar um código, um número (basta fazer a conversão de binário para decimal, ou para o sistema desejado), e até mesmo uma palavra (ou texto). Assim, considera-se o *bit* um dado que, em conjunto (denominado *byte*), constitui uma informação.

Fisicamente o valor de um bit é, de uma maneira geral, armazenado como uma carga elétrica acima ou abaixo de um nível padrão em um único capacitor dentro de um dispositivo de memória. Mas bits podem ser representados fisicamente por vários meios. Os meios e técnicas comumente usados são: Pela eletricidade (como o caso do capacitor), por via da luz (em fibras ópticas, ou em leitores e gravadores de discos ópticos, por exemplo), por via de ondas eletromagnéticas (rede wireless), ou também, por via de polarização magnética (discos rígidos).





As portas lógicas são dispositivos de execução física de uma função Booleana, isto é, elas realizam uma operação lógica de uma ou mais entradas lógicas, produzindo uma

única saída. São principalmente implementadas usando diodos ou transistores atuando como chaves eletrônicas, mas também podem ser construídas usando relés eletromagnéticos, lógica fluídica, lógica pneumática, ótica, moléculas, ou até mesmo elementos mecânicos. As portas lógicas podem ser conectadas da mesma maneira que funções Booleanas podem ser compostas, permitindo a construção de um modelo físico de toda a lógica Booleana, e portanto, toda a matemática e todos os algoritmos que podem ser descritos por esta lógica.

No Quadro 1 tem-se as principais portas lógicas (clássicas), com a indicação da função booleana que executam. A denominada *Tabela Verdade* organiza as saídas possíveis para cada porta lógica em função de cada entrada possível.

Entende-se por operações lógicas compostas aquelas que são construídas à custa de duas ou mais operações lógicas básicas. Uma operação lógica composta diz-se universal quando, exclusivamente à custa de portas do seu tipo, se consegue construir qualquer uma das operações básicas (e.g. a *porta NOT* e a *porta AND*), e conseqüentemente, constrói-se todo e qualquer circuito de lógica combinatória, por mais complexo que este seja.

Quadro 1. Características das principais portas lógicas.

Nome ou tipo	Símbolo (Norma ANSI)	Função Booleana	Tabela Verdade																			
<i>NOT</i>		\bar{A}	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Entrada</th> <th>Saída</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><i>A</i></td> <td></td> <td>not <i>A</i></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td></td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		Entrada		Saída	<i>A</i>		not <i>A</i>	0		1	1		0						
Entrada		Saída																				
<i>A</i>		not <i>A</i>																				
0		1																				
1		0																				
<i>AND</i>		$A \cdot B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Entrada</th> <th>Saída</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><i>A</i></td> <td><i>B</i></td> <td><i>A</i> and <i>B</i></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		Entrada		Saída	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> and <i>B</i>	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
Entrada		Saída																				
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> and <i>B</i>																				
0	0	0																				
0	1	0																				
1	0	0																				
1	1	1																				
<i>OR</i>		$A + B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Entrada</th> <th>Saída</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><i>A</i></td> <td><i>B</i></td> <td><i>A</i> or <i>B</i></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		Entrada		Saída	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> or <i>B</i>	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
Entrada		Saída																				
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> or <i>B</i>																				
0	0	0																				
0	1	1																				
1	0	1																				
1	1	1																				
<i>XOR</i>		$A \oplus B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Entrada</th> <th>Saída</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><i>A</i></td> <td><i>B</i></td> <td><i>A</i> xor <i>B</i></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		Entrada		Saída	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> xor <i>B</i>	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
Entrada		Saída																				
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> xor <i>B</i>																				
0	0	0																				
0	1	1																				
1	0	1																				
1	1	0																				

Fonte: o próprio autor

1.2 O Qubit e as Portas Lógicas Quânticas

Os bits são representados por estados de um sistema (clássico), sendo fisicamente componentes eletrônicos dentro de um chip, e por tratar-se de um sistema binário não há como se ter informações constituídas por algo além de zeros e uns, onde o estado de cada bit é muito bem determinado. Em contrapartida, na computação quântica, o *qubit* (abreviação de quantum bit) é representado por estados quânticos, isto é, por vetores num espaço de Hilbert. Inclusive já existem alguns dispositivos que são possíveis candidatos à tal representação, como: Um fóton, que pode estar verticalmente polarizado e o representamos por $|1\rangle$, ou estando horizontalmente polarizado o representamos por $|0\rangle$; íons aprisionados em armadilhas magnéticas; *Quantum Dots* (i.e. conjunto de elétrons confinados a dimensões nanométricas); átomos (como o de Hidrogênio por exemplo) ocupando ‘vales’ de uma rede óptica cristalina, representando por $|0\rangle$ o elétron na camada K (estado fundamental), e por $|1\rangle$ o elétron na camada L (estado excitado); elétrons, que para um determinada direção (como o eixo z) podem estar com *spin up* e o representamos por $|0\rangle$, ou estando com *spin down* o representamos por $|1\rangle$.

Ao que os estudos e pesquisas nesta área indicam, um dos candidatos mais promissores para a representação dos *qubits* é o estado de *spin* dos *Quantum Dots* [2]. Principalmente devido ao seu escalonamento, isto é, uma vez desenvolvida uma tecnologia funcional de alguns *qubits*, esta poderá ser diretamente estendida para equipamentos de vários *qubits*. Basicamente, os *Quantum Dots* são estruturas desenvolvidas em semicondutores que funcionam como caixas tridimensionais com potenciais eletrostáticos capazes de aprisionar alguns quantas de carga. A eletrônica moderna fornece excelentes técnicas que permitem controlar, criar e medir até mesmo um único elétron dentro destes “pontos quânticos” [2].

Em todo caso, por se tratar de estados quânticos estes não são totalmente determinísticos. Dessa forma um elétron poderia estar numa superposição de estados, tendo *spin up* e *down* ao mesmo tempo. A consequência deste fenômeno quântico é o fato de não termos mais somente zeros e uns como a base da informação, pois há agora a

possibilidade de termos um estado que não é zero e nem um, mas sim os dois ao mesmo tempo. Se classicamente tínhamos então, para os *bits* (b , referente aos estados clássicos que se pode ter),

$$b = 0 \text{ ou } b = 1 ,$$

já para os *qubits* temos ($|\psi\rangle$ referente ao vetor, no *espaço de Hilbert*, da função de onda dos estados quânticos),

$$|\psi\rangle = k_0 |0\rangle + k_1 |1\rangle , \quad k_i \in \mathbb{C} , \quad |k_1|^2 + |k_2|^2 = 1 ,$$

onde $|\psi\rangle = |0\rangle$ e $|\psi\rangle = |1\rangle$ simplesmente se tratam dos casos em que $k_1 = 0$ e $k_0 = 0$ respectivamente, uma vez que k_0 e k_1 são constantes complexas referentes a amplitude de probabilidade de se encontrar $|\psi\rangle$ nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Assim como na computação clássica, há na computação quântica o interesse de manipular e processar os dados e a informação, e pode-se fazer isso através de portas lógicas. A computação quântica é desenvolvida de modo a realizar uma transformação unitária no estado de entrada, isto é, as portas lógicas clássicas de n entradas são substituídas por operadores unitários da mecânica quântica, agindo no espaço de Hilbert produto $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Estes operadores são definidos então como portas lógicas quânticas. Por fim, o estado final é medido, operação que, em geral, não é unitária e pode estar sujeita à interpretação probabilística da mecânica quântica.

Quanticamente definem-se as portas lógicas como sendo de um ou de dois *qubits*, uma vez que a partir destas se obtém as *portas* de mais *qubits*. Este trabalho terá como objetivo mostrar que a manipulação e controle da evolução de sistemas de dois e quatro níveis, possuem um grande potencial na implementação de portas quânticas de um e dois qubits. Similarmente, isto também é válido para os algoritmos de correção de erro, através de sistemas de oito níveis.

1.2.1 Portas Lógicas Quânticas de Um e Dois Qubits

A porta quântica *NOT* é o exemplo mais simples que possui análogo clássico, pois assim como no caso clássico consiste apenas em gerar saídas $|1\rangle$ para todas entradas $|0\rangle$ e saídas $|0\rangle$ para todas as entradas $|1\rangle$ (ou seja, mesmo para um caso de superposição de estados $|\psi\rangle = k_0|0\rangle + k_1|1\rangle$, pode-se realizar o processamento através de uma *porta NOT* obtendo-se como saída $NOT|\psi\rangle = k_0|1\rangle + k_1|0\rangle$).

Portanto pela representação matricial temos que

$$NOT|0\rangle = NOT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

assim como

$$NOT|1\rangle = NOT \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

logo,

$$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

No contexto das portas lógicas quânticas de dois *qubits*, as mais utilizadas são as chamadas *portas controladas*. Estas possuem um funcionamento que incorpora o processamento feito em um *qubit*. Os *qubits* de entrada são chamados, *qubit alvo* e *qubit de controle*. Sendo as saídas o próprio *qubit de controle* (inalterado) e o resultado da atuação da porta lógica no *qubit alvo*.

Apesar dos casos análogos, existem tanto portas quânticas que não possuem análogo clássico, quanto portas clássicas que não possuem análogo quântico. Este último caso se verifica pelo fato de que as operações quânticas devem ser unitárias, consequentemente, reversíveis. Para melhor entendimento, construindo portas que atuam de maneira irreversível, nota-se que estas não são unitárias, e portanto, não descrevem a evolução de um sistema quântico. Como exemplo, denotando \hat{U}_{AND} e \hat{U}_{OR} como os operadores equivalentes a atuação das *portas AND* e *OR controladas*, respectivamente, utilizando a

Tabela Verdade para a saída do *qubit* alvo temos,

$$\widehat{U}_{AND} |x, y\rangle = |x, x \cdot y\rangle ,$$

portanto,

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{AND} |00\rangle &= |00\rangle , \quad \widehat{U}_{AND} |01\rangle = |00\rangle , \\ \widehat{U}_{AND} |10\rangle &= |10\rangle , \quad \widehat{U}_{AND} |11\rangle = |11\rangle , \end{aligned}$$

sendo

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

logo temos

$$\widehat{U}_{AND} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Semelhantemente, como

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{OR} |00\rangle &= |00\rangle , \quad \widehat{U}_{OR} |01\rangle = |01\rangle , \\ \widehat{U}_{OR} |10\rangle &= |11\rangle , \quad \widehat{U}_{OR} |11\rangle = |11\rangle , \end{aligned}$$

logo temos

$$\widehat{U}_{OR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Assim podemos facilmente verificar que tanto $\widehat{U}_{AND}^\dagger \widehat{U}_{AND} \neq \mathbb{I}$, quanto $\widehat{U}_{OR}^\dagger \widehat{U}_{OR} \neq \mathbb{I}$, e portanto tais portas clássicas não possuem análogo quântico.

1.3 Correção de Erros e Três Qubits

Assim como já mencionado, o domínio no processamento de um e dois *qubits* já é o suficiente para se realizar qualquer tipo de processamento da informação quântica. Todavia, em sistemas de processamento de informação, o ruído é sempre uma grande questão [3]. Apesar de se almejar sistemas que evitem o ruído, quando isso não é possível tenta-se ao menos evitar os seus efeitos. Nesse sentido, o princípio básico para proteção de uma mensagem é a sua codificação, adicionando-se informação redundante. Assim, mesmo após parte da informação ter sido corrompida pelo ruído, a redundância permite a decodificação de forma que se recupere a mensagem original.

Baseando-se na adição de informação redundante para codificação da informação, seria muito simples utilizar um código, como o chamado *código de repetição*, onde a mensagem a ser enviada é repetida um certo número de vezes. De modo que, se a probabilidade do ruído mudar a mensagem for menor que 50%, já se obtém uma transmissão muito mais confiável. Entretanto, no intuito de evitar os efeitos do ruído para proteger estados quânticos, a opção citada acima torna-se inadequada, devido às importantes diferenças existentes entre a informação clássica e a quântica¹.

1.3.1 O código de três *qubits* para canal de inversão

Para exemplificar uma codificação quântica de correção de erro, suponha a seguinte situação [3]:

Enviando *qubits* através de um canal, sabe-se que estes são invertidos com probabilidade p , e portanto permanecem inalterados com probabilidade $(1 - p)$. Pode-se

¹Como por exemplo:

- A Não-clonagem. Impedindo a utilização do *código de repetição*.
- Perda de informação quântica por medidas. Não permitindo a observação da saída do canal para, então, decidir por um procedimento.

dizer então que com probabilidade p o ruído atua neste canal levando o estado $|\psi\rangle$ para $\sigma_1 |\psi\rangle$, por isso este canal é denominado *canal de inversão de bit*. Um código que proteja os *qubits* dos efeitos de ruído desse canal poderia atuar de forma que, sendo o estado $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, este seria codificado com três *qubits*, como $\alpha |000\rangle + \beta |111\rangle$, onde podemos escrever essa codificação, convenientemente,

$$|0\rangle \longrightarrow |0_L\rangle \equiv |000\rangle, \quad |1\rangle \longrightarrow |1_L\rangle \equiv |111\rangle,$$

onde entende-se que as superposições de estados da base são levadas às superposições correspondentes nos estados codificados. Após essa codificação cada um dos três *qubits* é enviado através do canal. Supondo que uma inversão tenha acontecido com no máximo um *qubit*, existe um procedimento simples de correção de erro, que pode recuperar o estado quântico em dois estágios:

1. Detecção de erro ou diagnóstico de síndrome: Medidas que detectam erro, caso haja algum, são realizadas sobre o estado quântico. O resultado da medida é chamado de *síndrome de erro*. Para o canal de inversão de bit existem quatro síndromes de erro, que correspondem aos quatro operadores de projeção:

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|, && \text{sem erros;} \\ P_1 &\equiv |100\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 011|, && \text{inversão do primeiro } qubit; \\ P_2 &\equiv |010\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 101|, && \text{inversão do segundo } qubit; \\ P_3 &\equiv |001\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 110|, && \text{inversão do terceiro } qubit. \end{aligned}$$

Caso ocorra uma inversão no primeiro *qubit*, o estado corrompido será $\alpha |100\rangle + \beta |011\rangle$, e neste caso $\langle \psi | P_1 | \psi \rangle = 1$, e portanto o resultado da medida, isto é, da *síndrome de erro*, é 1. Vale ressaltar que a síndrome não altera o estado, apenas contém a informação de qual erro ocorreu.

2. Recuperação: O valor da síndrome de erro é agora utilizado para se saber qual o procedimento que deve ser adotado, afim de recuperar o estado inicial. Por exemplo,

se o valor da síndrome foi 1, isto indica que a inversão ocorreu no primeiro *qubit*, agora, portanto, deve-se inverter o primeiro *qubit* novamente para recuperar o estado inicial com exatidão. As quatro possíveis síndromes de erro, e o procedimento de recuperação em cada caso, são: 0 (sem erro) – não se faz nada; 1 – inverter o primeiro *qubit*; 2 – inverter o segundo *qubit*; 3 – inverter o terceiro *qubit*.

É fácil ver que para cada valor da síndrome o estado inicial é recuperado com exatidão, para cada tipo de erro. Entretanto esse procedimento de correção de erro funciona, perfeitamente, para casos como o do exemplo, onde a inversão ocorre no máximo em um dos três *qubits*. A probabilidade de que seja assim é $(2p^3 - 3p^2 + 1)$. Logo a probabilidade de que o erro permaneça sem correção é $(2p^3 - 3p^2)$ exatamente como no caso do código de repetição de erro clássico. Novamente, desde que $p < \frac{1}{2}$, a codificação e a decodificação aumentam a confiança na proteção do estado quântico.

Vemos assim que portas de dois qubits são essenciais para manipulação e processamento, enquanto portas de mais qubits são fundamentais para algoritmos de correção de erro.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Equação de Spin

Para o caso mais geral em $0 + 1$ dimensão, no qual um sistema de dois níveis está sujeito à interações dependentes do tempo, a descrição pode ser feita através de um espinor $\Psi(t)$ com duas componentes dependentes do tempo, sendo a dinâmica descrita pela equação de Schrödinger (em unidades naturais),

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = [F_0 I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}] \Psi(t) , \quad \Psi = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} ,$$

onde, I é a matriz identidade, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli e $\mathbf{F} = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$ é o campo externo.

Vale ressaltar que, a equação pode ser simplificada fazendo $F_0 = 0$. Pois se $\Psi(t)$ é uma solução para $F_0 = 0$, então pode-se obter uma solução para $F_0 \neq 0$ fazendo

$$\Psi'(t) = \exp \left(-i \int_0^t F_0(t') dt' \right) \Psi(t) .$$

Assim a equação pode ser reescrita, sem perda de generalidade, como

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}) \Psi(t) .$$

Muitos problemas podem ser identificados com essa equação, ou mesmo representados por ela. Um caso direto, que envolve a equação de spin, é o de uma partícula de momento angular total $J = 1/2$ inserida em um campo magnético, dependente do tempo, com $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{B}$ (ou campo elétrico onde $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{E}$) sendo μ o momento magnético (ou elétrico) da partícula. Nesse caso, a equação de spin pode ser identificada com a equação de Pauli [4] para uma partícula fixa no espaço.

A solução da equação de spin é o cerne de uma grande variedade de problemas. Mesmo no caso mais simples, quando \mathbf{F} é uma constante, não é difícil achar aplicações

que se enquadram nesse problema. Por exemplo, frequentemente, em química as propriedades ópticas provenientes do acoplamento entre dois níveis de uma certa molécula, por um campo elétrico estático E_0 , são estudadas fazendo $\mathbf{F} = (\mu E_0, 0, \Delta_E)$, onde $\Delta_E = (E_0 - E_1)/2$ é a diferença de energia entre o estado fundamental e o excitado. Outra aplicação, intensamente explorada nos modelos de dois níveis estáticos, é o estudo dos efeitos de tunelamento em um duplo poço de potencial [5]. Além disso, existem várias equações equivalentes, ou de certa forma relacionadas, à equação de spin. Dentre elas, a conhecida equação de Euler que surge na teoria do giroscópio [6], ou ainda, se fizermos as componentes F_1 e F_2 serem puramente imaginárias e F_3 constante, pode-se identifica-la como um caso degenerado da equação de Zakarov-Shabat, a qual possui um papel importante na teoria dos sólitons [7]. Para campos externos periódicos, ou quase-periódicos, equações de sistemas de dois níveis têm sido estudadas por muitos autores [5], usando diferentes métodos aproximativos (por exemplo, expansão perturbativa [8]). Porém quando \mathbf{F} não é periódico, ou quase-periódico, as soluções exatas se restringem a determinados campos. No pioneirismo das soluções exatas está o *campo de Rabi*, que possui a forma

$$\mathbf{F} = (B \cos(\Omega t), B \sin(\Omega t), F_3) ,$$

no qual se obteve solução exata utilizando-se das chamadas *coordenadas girantes* [9]. Para \mathbf{F} dado por

$$\mathbf{F} = (F_1, 0, F_3) , F_1 = cte ,$$

soluções exatas para duas diferentes funções F_3 são obtidas na referência [10]. Estas funções são

$$F_3 = c_0 \tanh(t) + c_1 , \quad F_3 = \frac{c_0}{\cosh(t)} + c_1 ,$$

onde $c_{0,1}$ são constantes reais arbitrárias. No artigo da referencia [8], soluções exatas para três funções F_3 , suficientemente complicadas, são obtidas. Uma das mais simples é dada por

$$F_3 = c_0 + \frac{2(c_1^2 - c_0^2)}{Q + c_0} , \quad Q = \begin{cases} c_1 \cosh(\varphi) , & c_1^2 > c_0^2 \\ c_1 \cos(\varphi) , & c_1^2 < c_0^2 \end{cases} ,$$

$$\varphi = 2 \left(t \sqrt{|c_1^2 - c_0^2|} + c_2 \right) ,$$

onde $c_{0,1,2}$ são constantes reais arbitrárias. O artigo da referencia [9] apresenta métodos de geração de soluções exatas a partir de soluções conhecidas, além disso apresenta também uma lista de soluções para vinte e seis famílias de campo externo.

De modo geral, a evolução de sistemas de dois níveis, onde são aplicados campos externos, é descrita pela equação de spin. A implementação experimental de portas lógicas quânticas exige a manipulação de sistemas de dois níveis pela ação de campos externos. Assim, fica evidente que a análise da equação de spin é uma questão de fundamental importância para a computação quântica.

Na subseção 3.1.1, um exemplo simples de implementação será dado com a *porta NOT*, onde o Hamiltoniano do sistema para este caso específico é dado por $H = -\mu\sigma_1 B_x = \sigma_1 F_1$. Com isso, podemos analisar a equação de spin para este sistema. Temos então,

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = \sigma_1 F_1 \Psi(t) ,$$

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = F_1 \sigma_1 \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = F_1 \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} ,$$

separando em duas equações temos

$$i \frac{d}{dt} v_1(t) = F_1 v_2(t) , \quad i \frac{d}{dt} v_2(t) = F_1 v_1(t) .$$

Assim, substituindo $v_2(t)$,

$$i \frac{d}{dt} \left(\frac{i}{F_1} \frac{d}{dt} v_1(t) \right) = F_1 v_1(t) ,$$

reescrevendo,

$$\frac{d^2}{dt^2} v_1(t) = -F_1^2 v_1(t) ,$$

sendo as soluções dadas por

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}_{\pm} = \begin{pmatrix} c_0 \exp \{ \mp i F_1 t \} \\ \pm c_0 \exp \{ \mp i F_1 t \} \end{pmatrix} .$$

Escrevendo a função de estado em termos do operador de evolução temporal, e sabendo que cada uma das duas soluções são autovetores do Hamiltoniano, temos

$$\Psi(t) = \widehat{U}\Psi_0 \quad , \quad \Psi_0 = \Psi(0) \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \exp\{\mp i F_1 t\} \\ \pm c_0 \exp\{\mp i F_1 t\} \end{pmatrix} = \exp\{-i(\pm 1)F_1 t\} \begin{pmatrix} c_0 \\ \pm c_0 \end{pmatrix} \quad ,$$

sendo $\pm 1 = \lambda_{\pm}$ os autovalores correspondentes a atuação de σ_1 . Portanto,

$$\Psi_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}_{\pm} = \exp\{-i\sigma_1 F_1 t\} \begin{pmatrix} c_0 \\ \pm c_0 \end{pmatrix} = \widehat{U}\Psi_{0\pm} \quad ,$$

devido à condição do vetor de estado ser normalizado, para representar o sistema, $|c_0|^2 + |c_0|^2 = 1$, e portanto $|c_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, isto significa que as funções de estado, soluções da equação de spin desse sistema, são

$$\Psi_{0\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad ,$$

autovetores do Hamiltoniano $H = \sigma_1 F_1$ com autovalores $\lambda_{\pm} = \pm 1$.

O princípio geral para a construção de uma porta lógica quântica exige a unitariedade na sua atuação, como já mencionado. Com isso, trabalhos como [11] e [12] propõem construções diferentes para o operador unitário equivalente à *porta NOT* (e.g., trabalhando com um espaço de Hilbert estendido). Porém, optando-se em manter as configurações originais do problema, assim como feito no exemplo acima, a unitariedade da *porta NOT* pode restringir as soluções a casos de superposição. Isto pode ser visto, inclusive utilizando-se de campos experimentalmente mais usuais, em trabalhos como [13].

2.2 Sistemas de Dois e Três Spins Acoplados

As portas lógicas quânticas são a chave para o processamento da informação quântica. Qualquer manipulação que se queira pode ser obtida com portas universais de um e dois *qubits*. Assim como já mencionado, as portas de um *qubit* podem ser implementadas através de partículas de spin meio, confinadas e sob ação de campos externos (e.g., *Quantum Dots*), denotando a importância de soluções exatas para a equação de spin. Semelhantemente, as portas de dois qubits podem ser identificadas com sistemas de quatro níveis. De onde as soluções da equação de dois spins acoplados se revelam extremamente importantes, para análise e manipulação de tais sistemas.

A equação para dois spins acoplados sujeitos a campos externos, atuando individualmente, pode ser escrita como,

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = \left[(\boldsymbol{\Sigma}^1 \cdot \mathbf{F}_1) + (\boldsymbol{\Sigma}^2 \cdot \mathbf{F}_2) + \frac{J}{2} (\boldsymbol{\Sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}^2) \right] \Psi(t) ,$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^1 = \vec{\sigma} \otimes I \ ; \ \boldsymbol{\Sigma}^2 = I \otimes \vec{\sigma} \ , \ \Psi(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} . \quad (2.1)$$

Diferentemente da equação de spin, que foi escrita na sua forma mais geral, esta ainda é uma versão específica da equação, uma vez que o termo de interação é descrito pela *Interação de Heisenberg* (J). A função de interação J é um escalar que pode depender do tempo (explicitamente ou implicitamente por uma dependência dos campos $\mathbf{F}_1(t)$ e $\mathbf{F}_2(t)$). A forma mais geral, para dois spins acoplados, seria considerando todos os nove termos de interação $J_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k$. Entretanto a *Interação de Heisenberg* reproduz satisfatoriamente os sistemas descritos pela física do modelo de Hubbard [14]. Além disso, o comportamento de dois *Quantum Dots* acoplados é adequadamente descrito pela *Interação de Heisenberg* (como mostrado em [15]).

No caso de três spins acoplados há uma peculiaridade no Hamiltoniano do sistema, comparando-se com os dois casos anteriores. Além de um termo adicional, referente

à atuação de um terceiro campo na terceira partícula, o termo de interação, descrito pela *Interação de Heisenberg*, torna-se dependente da configuração geométrica do sistema. Isto é, sendo a *Interação de Heisenberg* uma interação apenas entre partículas diretamente vizinhas, uma configuração geométrica linear apresentaria apenas dois termos de interação, enquanto uma configuração triangular apresentaria três termos – devido à vizinhança da primeira com última partícula. Matematicamente podemos escrever, utilizando a *notação de soma de índices repetidos*,

$$H = \mathbf{F}_i \Sigma^i + \frac{1}{2} (J_{jk} \Gamma^{jk}) \quad , \quad j \neq k \quad , \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.2)$$

de modo que agora

$$\begin{aligned} \Sigma^1 &= \vec{\sigma} \otimes I \otimes I \quad , \quad \Sigma^2 = I \otimes \vec{\sigma} \otimes I \quad , \quad \Sigma^3 = I \otimes I \otimes \vec{\sigma} \quad , \\ \Gamma^{jk} &= \Sigma^j \cdot \Sigma^k \quad , \end{aligned}$$

com $J_{13} = 0$ para o caso linear.

Conhecendo agora o formato geral do Hamiltoniano para sistemas de spins acoplados, podemos, mais facilmente, nos dedicar a encontrar características que sejam padrão da equação de spins, auxiliando na obtenção de suas soluções.

2.3 Redução de Níveis em Sistemas de Spins Acoplados

Algumas relações de comutação são importantes a fim de caracterizar o Hamiltoniano dos sistemas de spins acoplados. Abaixo são apresentadas as relações de comutação envolvendo os termos do Hamiltoniano citado,

$$[\sigma_i \quad , \quad \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad , \quad \{\sigma_i \quad , \quad \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \quad , \quad (2.3)$$

$$[\Sigma_i^m \quad , \quad \Sigma_j^n] = 2i\delta_{mn}\varepsilon_{ijk}\Sigma_k^m \quad . \quad (2.4)$$

Apesar de Γ^{mn} não comutar com Σ^m , nem com Σ^n , pode-se verificar que

$$[\Gamma^{mn} , \Sigma^m + \Sigma^n] = 0 . \quad (2.5)$$

Como consequência, qualquer Γ^{mn} e, diretamente relacionado a isto, quaisquer termos de interação do Hamiltoniano (2.2), comutam com o operador de rotações $\mathcal{R}_{\mathbf{r}}$ em qualquer direção \hat{r}

$$[\Gamma^{mn} , \mathcal{R}_{\mathbf{r}}(\theta)] = 0 ,$$

sendo, $\hat{r}^2 = 1$ e

$$\mathcal{R}_{\mathbf{r}}(\theta) = \exp \left\{ -\frac{i\theta}{2} \hat{r} \cdot \sum_{a=1}^N \vec{\Sigma}^a \right\} = \prod_{a=1}^N \exp \left\{ -\frac{i\theta}{2} \hat{r} \cdot \vec{\Sigma}^a \right\} . \quad (2.6)$$

Dadas as relações, tem-se que no caso de campos paralelos com dependência temporal arbitrária, o Hamiltoniano preserva, não só o momento angular total \mathbf{J}^2 , mas também a projeção do momento angular na direção dos campos. Devido à invariância por rotações (2.6), pode-se aplicar uma rotação trazendo \hat{r} para a direção \hat{z} . Então, sem perda de generalidade, podemos escolher $\hat{r} = (0, 0, 1)$ e j_z será conservado,

$$[\mathbf{J}^2 , H] = [j_z , H] = 0 , \quad \mathbf{J} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \vec{\Sigma}^a , \quad j_z = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \Sigma_3^a . \quad (2.7)$$

Então, usando a base de autovetores de j_z (dispostos em ordem descendente dos autovalores), o Hamiltoniano H assume uma forma bloco diagonal, como mostrado nos dois casos abaixo.

2.3.1 Redução para o Caso de Dois Spins Acoplados

No caso de dois spins acoplados, temos para o Hamiltoniano (2.1), nas condições (2.7),

$$H = F_1 \Sigma_3^1 + F_2 \Sigma_3^2 + \frac{J}{2} \Gamma^{12} , \quad (2.8)$$

com $J = J_{12}$ neste caso, com os campos paralelos sendo do tipo

$$\mathbf{F}_1 = (0, 0, F_1) , \quad \mathbf{F}_2 = (0, 0, F_2) , \quad F_{1,2} = F_{1,2}(t) . \quad (2.9)$$

A projeção do momento angular j_z pode assumir os valores $1, 0, -1$. Então o problema pode ser reduzido para o de um sistema de dois níveis. Isto pode ser visto através dos autovetores de j_z ,

$$\begin{aligned} |j_z = 1\rangle &= |00\rangle, \quad |j_z = -1\rangle = |11\rangle, \\ |j_z = 0\rangle &= \{|10\rangle, |01\rangle\}, \end{aligned}$$

sendo escolhido para o sistema, um espaço de estado dado pelo produto direto dos espaços de estado individuais dos spins, $|m, n\rangle = |m\rangle \otimes |n\rangle$, e $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, podemos então, neste caso, dispor a base j_z em uma ordem coincidente com a base canônica, e conseqüentemente, o Hamiltoniano já apresentará a forma bloco diagonal,

$$H = \begin{pmatrix} h_{j_z=1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{j_z=0} & 0 \\ 0 & 0 & h_{j_z=-1} \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

com

$$h_{j_z=0} = \begin{pmatrix} F_- - \frac{J}{2} & J \\ J & -F_- - \frac{J}{2} \end{pmatrix}, \quad h_{j_z=\pm 1} = \frac{J}{2} \pm F_+,$$

onde $F_{\pm} = F_1 \pm F_2$.

Portanto, para o primeiro e o quarto componente, $v_1(t)$ e $v_4(t)$, do espinor $\Psi(t)$, a solução da equação (2.1) é dada por

$$v_1(t) = c_1 \exp \left[-i \int_0^t \left(\frac{J}{2} + F_+ \right) dt' \right], \quad v_4(t) = c_4 \exp \left[-i \int_0^t \left(\frac{J}{2} - F_+ \right) dt' \right],$$

onde $c_{1,4}$ são constantes complexas. Já para as componentes $v_2(t)$ e $v_3(t)$, obtemos a expressão

$$i \frac{d}{dt} \Psi' = \left[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{K}) - \frac{J}{2} \right] \Psi', \quad \Psi' = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

sendo

$$\mathbf{K}(t) = (J(t), 0, F_-(t)). \quad (2.11)$$

Realizando a transformação,

$$\Psi'(t)_{(2 \times 1)} = \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^t J(t') dt' \right] \Psi(t)_{(2 \times 1)} ,$$

conclui-se que as duas componentes do espinor $\Psi_{(4 \times 1)}$ obedecem a equação de uma única partícula de spin $\frac{1}{2}$ sujeita a um campo efetivo $\mathbf{K}(t)$. Isto é, se identifica com um problema de dois níveis. Conseqüentemente o problema de quatro níveis se reduz a encontrar soluções de sistemas de níveis.

Reescrevendo o Hamiltoniano (2.8) em termos de F_{\pm} , e considerando como solução para sistemas de dois níveis $\Psi(t)_{(2 \times 1)} = \hat{u}_t \Psi(0)_{(2 \times 1)}$, com $\hat{u}_t = \hat{u}_t(J, F_-)$ o operador de evolução temporal 2×2 , podemos agora escrever o operador de evolução do sistema de quatro níveis como

$$\hat{U}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, J) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[(\Sigma_3^1 + \Sigma_3^2) \phi_{F_+}(t) + \Sigma_3^1 \Sigma_3^2 \phi_J(t) \right] \right\} M(t) , \quad (2.12)$$

onde

$$\phi_{F_+}(t) = \int_0^t F_+(t') dt' , \quad \phi_J(t) = \int_0^t J(t') dt' , \quad (2.13)$$

e a matriz $M(t)$ dada pelos componentes do operador de evolução para uma única partícula \hat{u}_t ,

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u}_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} .$$

Escrevendo o campo efetivo \mathbf{K} (2.11) como descrito em [9],

$$\mathbf{K} = \frac{\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}]}{1 + \mathbf{q}^2} ,$$

para um vetor real $\mathbf{q}(t)$ apropriado, pode-se obter o operador de evolução temporal em sua forma geral,

$$\hat{u}_t = \frac{1 + \mathbf{q}\mathbf{q}_0 - i\sigma\mathbf{p}}{\sqrt{(1 + \mathbf{q}^2)(1 + \mathbf{q}_0^2)}} ,$$

onde $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 + [\mathbf{q}_0 \times \mathbf{q}]$ e $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$.

2.3.2 Redução para o Caso de Três Spins Acoplados

No caso de três spins acoplados, em uma configuração triangular e sujeito a campos magnéticos apenas na direção \hat{z} , temos

$$H = F_i \Sigma_3^i + \frac{1}{2} (J_{12} \Gamma^{12} + J_{23} \Gamma^{23} + J_{13} \Gamma^{13}) .$$

A base canônica, no espaço de estado escolhido, é composta pelos seguintes vetores,

$$\begin{aligned} |\Theta_1\rangle &= |000\rangle, \quad |\Theta_2\rangle = |100\rangle, \quad |\Theta_3\rangle = |010\rangle, \quad |\Theta_4\rangle = |110\rangle, \\ |\Theta_5\rangle &= |001\rangle, \quad |\Theta_6\rangle = |101\rangle, \quad |\Theta_7\rangle = |011\rangle, \quad |\Theta_8\rangle = |111\rangle, \end{aligned}$$

ou de forma mais explícita,

$$|\Theta_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{8 \times 1}, \quad |\Theta_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{8 \times 1}, \quad \dots, \quad |\Theta_8\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{8 \times 1} .$$

A partir desta, que é a base computacional, pode-se escrever também $\Psi(t)$ como uma combinação linear da base,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\beta=1}^8 v_{\beta}(t) |\Theta_{\beta}\rangle = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_8(t) \end{pmatrix}_{8 \times 1} .$$

O operador total de spin para este sistema é $\mathbf{J} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^1 + \boldsymbol{\Sigma}^2 + \boldsymbol{\Sigma}^3)$. A componente z do operador de momento angular $\mathbf{J}_a = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^a$ satisfaz as seguintes equações de

autovalores,

$$\begin{aligned} J_{1z} |\Theta_{1,2,3,4}\rangle &= \frac{1}{2} |\Theta_{1,2,3,4}\rangle \quad , \quad J_{1z} |\Theta_{5,6,7,8}\rangle = -\frac{1}{2} |\Theta_{5,6,7,8}\rangle \quad , \\ J_{2z} |\Theta_{1,2,5,6}\rangle &= \frac{1}{2} |\Theta_{1,2,5,6}\rangle \quad , \quad J_{2z} |\Theta_{3,4,7,8}\rangle = -\frac{1}{2} |\Theta_{3,4,7,8}\rangle \quad , \\ J_{3z} |\Theta_{1,3,5,7}\rangle &= \frac{1}{2} |\Theta_{1,3,5,7}\rangle \quad , \quad J_{3z} |\Theta_{2,4,6,8}\rangle = -\frac{1}{2} |\Theta_{2,4,6,8}\rangle \quad . \end{aligned}$$

A projeção do momento angular j_z pode assumir os valores $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$. Então o problema, analogamente ao caso de dois spins acoplados, pode ser reduzido ao problema de sistemas de três níveis. Isto pode ser visto através dos autovetores de j_z ,

$$\begin{aligned} |j_z = \frac{3}{2}\rangle &= |000\rangle \quad , \quad |j_z = -\frac{3}{2}\rangle = |111\rangle \quad , \\ |j_z = \frac{1}{2}\rangle &= \{|100\rangle, |010\rangle, |001\rangle\} \quad , \\ |j_z = -\frac{1}{2}\rangle &= \{|011\rangle, |101\rangle, |110\rangle\} \quad . \end{aligned}$$

Neste caso, a matriz de transformação de j_z para a base computacional tem a forma

$$T = T^\dagger = T^{-1} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{3 \times 3} \end{pmatrix}_{8 \times 8} \quad ,$$

e o Hamiltoniano assume a forma,

$$THT = \begin{pmatrix} h_{j_z=\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{j_z=\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{j_z=-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{j_z=-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}_{8 \times 8} \quad , \quad (2.14)$$

sendo,

$$h_{j_z=\pm\frac{3}{2}} = \pm\mathcal{F}_{00} + \frac{1}{2}\mathcal{J}_{00} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
h_{j_z=\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{01} + \frac{1}{2}\mathcal{J}_{11} & J_{23} & J_{13} \\ J_{23} & \mathcal{F}_{10} - \frac{1}{2}\mathcal{J}_{10} & J_{12} \\ J_{13} & J_{12} & -\mathcal{F}_{11} - \frac{1}{2}\mathcal{J}_{01} \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \\
h_{j_z=-\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11} - \frac{1}{2}\mathcal{J}_{01} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & -\mathcal{F}_{10} - \frac{1}{2}\mathcal{J}_{10} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & -\mathcal{F}_{01} + \frac{1}{2}\mathcal{J}_{11} \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad (2.15)
\end{aligned}$$

utilizando a notação,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{mn} &= F_1 + (-1)^m F_2 + (-1)^n F_3, \\
\mathcal{J}_{mn} &= J_{12} + (-1)^m J_{13} + (-1)^n J_{23}.
\end{aligned}$$

Em (2.14), vemos explicitamente que o problema de três spins acoplados se reduz, de modo que soluções exatas podem ser obtidas resolvendo o problema de dois sistemas de três níveis em um Hamiltoniano efetivo dado por $h_{j_z=\pm\frac{1}{2}}$. A fim de expor uma das possíveis soluções, podemos abordar o *caso simétrico*. Neste, além de $\mathbf{F}_i(t) \equiv \mathbf{F}(t)$, temos $J_{jk}(t) \equiv J(t)$, e assim,

$$H = 2F_3 j_z + \frac{1}{2}J (\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13}). \quad (2.16)$$

Como, neste caso, tem-se de (2.15) $h_{j_z=\frac{1}{2}} = h_{j_z=-\frac{1}{2}}$, o problema se reduz ainda à apenas um sistema de três níveis.

Devido à relação (2.5), o operador de evolução \widehat{U}_s para o Hamiltoniano (2.16) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_s &= R_z \exp \left\{ -i \frac{\phi_J(t)}{2} (\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13}) \right\}, \quad R_z = \exp \left\{ -i \phi_{F_3}(t) \sum_{\alpha=1}^3 \Sigma_3^\alpha \right\}, \\
\phi_J(t) &= \int_0^t J(t') dt', \quad \phi_{F_3}(t) = \int_0^t F_3(t') dt'. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

O primeiro termo de \widehat{U}_s pode ser considerado apenas como uma rotação na direção \widehat{z} . Utilizando agora a relação (2.4) e a definição de Γ^{jk} é possível ver que

$$(\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13})^2 = \mathbb{I}_{8 \times 8},$$

como mostrado no Apêndice A, onde alguns comentários adicionais são feitos, devido a relação deste termo com a configuração geométrica do acoplamento de spins. Então, o operador de evolução assume a forma,

$$\hat{U}_s(t) = \prod_{\alpha=1}^3 [\cos(\phi_{F_3}) - i\Sigma_3^\alpha \sin(\phi_{F_3})] \left\{ \cos\left[\frac{3}{2}\phi_J(t)\right] - \frac{i}{3}(\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13}) \sin\left[\frac{3}{2}\phi_J(t)\right] \right\}.$$

Para um sistema de três *Quantum Dots* acoplados, a função de interação pode ser controlada por campos externos (como mostrado em [16]). Então, uma vez que esta função esta fixada, pode-se determinar os campos que fornecem um dado estado. Em especial, pode-se determinar os campos para estados de máximo emaranhamento. Pois a utilização de estados emaranhados, no processamento de informação quântica, é um elemento fundamental para a implementação de algoritmos de correção de erro.

3 ALGUMAS APLICAÇÕES

3.1 Implementação Teórica de Portas Lógicas Quânticas

Devido à *Interação de Heisenberg* fornecer uma boa descrição de *Quantum Dots* acoplados, utilizá-los para a implementação de portas lógicas quânticas torna-se algo mais interessante e viável. Entretanto, tal implementação é baseada na variação controlada, tanto da atuação dos campos nos spins individuais, como da interação dos spins, durante um determinado tempo τ . Para este fim e, mantendo a interação como *Interação de Heisenberg*, algumas condições devem ser respeitadas:

Condição 1 *O tempo τ deve ser grande o suficiente para evitar transições para níveis de energia mais elevados, de modo que a escala de tempo deve ser maior que $\hbar/\Delta E$ quando ΔE é a diferença de energia entre os dois primeiros níveis;*

Condição 2 *O tempo de decoerência do sistema deve ser muito maior que τ .*

No uso de *Quantum Dots* para implementação de algoritmos quânticos deve-se ter o controle individual dos spins, o que pode ser feito pelos campos \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , bem como qualquer interação entre os spins que seja capaz de gerar estados emaranhados a partir de, inicialmente, estados produto. Estas circunstâncias são contempladas pelo Hamiltoniano da equação (2.1).

A seguir será demonstrado, primeiramente uma implementação mais simples, para realização da *porta NOT* e posteriormente para a implementação de uma porta lógica quântica universal, no caso, a *porta XOR*.

3.1.1 A *Porta NOT*

Quanticamente qualquer manipulação do sistema deve ser representada pelo operador de evolução temporal \hat{U} , dado pela equação,

$$\hat{U}(t_b, t_a) = \exp\left(-i \int_{t_a}^{t_b} H dt\right), \quad (\text{lembrando } \hbar = 1)$$

portanto, com a finalidade de implementar a *porta NOT*, deve-se obter o Hamiltoniano tal que,

$$\hat{U}_{NOT} = NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 .$$

Logo, podemos utilizar o Hamiltoniano de um elétron submetido a um campo magnético, que é dado por $H = -\mu\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$, e afim de alcançar tal resultado, fazemos então $\mathbf{B} = B_x \hat{i}$, com B_x independente do tempo, e temos que

$$H = -\mu\sigma_1 B_x ,$$

logo,

$$\hat{U} = \exp(i\mu\sigma_1 B_x \Delta t) .$$

Devido ao fato de que $\sigma_1^2 = \mathbb{I}$, a expressão acima pode ser escrita como

$$\hat{U} = \cos(\mu B_x \Delta t) + i\sigma_1 \sin(\mu B_x \Delta t) ,$$

e, finalmente, para $(\mu B_x \Delta t) = (n + \frac{1}{2})\pi$, temos que

$$\hat{U} = i\sigma_1 ,$$

como i é apenas uma constante de fase, então $\hat{U} = \sigma_1 = \hat{U}_{NOT}$. Isto significa que para um espinor, representando o estado de spin de um elétron que é solução da equação de spin, pode-se implementar a *porta NOT* com atuação do campo $\mathbf{F} = (-\mu B_x, 0, 0)$, durante um intervalo de tempo $\Delta t = (n + 1/2)\pi/\mu B_x$.

3.1.2 Uma Porta Lógica Quântica Universal (*Porta XOR*)

No intuito de se obter o operador de evolução temporal equivalente à atuação da *porta XOR*, iniciaremos com um desenvolvimento preliminar e, posteriormente, chegaremos a um operador cuja implementação respeite as condições 1 e 2.

Nomeando o operador de evolução temporal, quando os campos \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são iguais a zero, de $R_t(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, J)$ este pode ser escrito, para o Hamiltoniano da Eq. (2.1) como [17],

$$R_t(\mathbf{0}, \mathbf{0}, J) = \exp\left(i\frac{\phi_J(t)}{2}\right) \cdot \left(\mathbb{I}_{(4 \times 4)} \cos(\phi_J(t)) - i\mathbb{A} \sin(\phi_J(t))\right),$$

$$\mathbb{A}_{(4 \times 4)} = \frac{1}{2}[\mathbb{I}_{(4 \times 4)} + (\boldsymbol{\Sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}^2)],$$

e $\phi_J(t)$ dado em (2.13). A partir da expressão de $R_t(\mathbf{0}, \mathbf{0}, J)$ vemos que, quando $\phi_J = \pi/4$, o operador de evolução temporal atua como uma porta universal, conhecida como “square root of swap” $\widehat{U}_{sw}^{1/2}$. A função de interação J pode ser controlada de muitas formas distintas, uma delas seria através da aplicação de campos elétricos ou magnéticos nos *Quantum Dots*. Então pode-se construir uma *porta* quântica com uma sequência de pulsos, ligando e desligando o campo externo e a *Interação de Heisenberg*. Como exemplo, a *porta XOR* pode ser contruída como [18],

$$\widehat{U}_{XOR} = \exp(i\frac{\pi}{4}\Sigma_3^1) \exp(-i\frac{\pi}{4}\Sigma_3^2) \widehat{U}_{sw}^{1/2} \cdot \exp(i\frac{\pi}{2}\Sigma_3^1) \widehat{U}_{sw}^{1/2}. \quad (3.1)$$

Em contrapartida, a construção de *portas quânticas* através de uma sequência de pulsos não é apropriada, pois a duração de toda a sequência pode ser muito longa, violando a condição 2, ou então os pulsos teriam de ser muito rápidos, violando a condição 1. Por isso, é importante que se tenha um modelo que implemente as *portas* quânticas aplicando apenas um campo adequado, este único pulso é denominado *parallel pulse* [19]. No caso então da *porta XOR*, para se utilizar um *parallel pulse* é necessário encontrar primeiramente um campo que resulte em um operador de evolução temporal do tipo,

$$R_t(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, J) = \widehat{U}_{XOR} = \exp\left[-i\frac{\pi}{4}(\Sigma_3^2 \Sigma_3^1 + \Sigma_3^2 + \Sigma_3^1)\right]. \quad (3.2)$$

A fim de se encontrar um *parallel pulse*, para o caso geral, é necessário que se tenha soluções exatas da equação de spin (2.1) para diferentes tipos de campos externos e interação. Estabelecendo-se então os parâmetros dos campos externos paralelos que podem atuar como uma *porta XOR*, como os campos do tipo (2.9), obtem-se o operador de

evolução (2.12), de modo que para um determinado tempo este assume a forma (3.1). Esta mesma análise aqui apresentada também pode ser efetuada para as 26 famílias diferentes de campos externos apresentado em [9], o que dá uma ampla gama de campos para se escolher, de modo a serem mais apropriados a ajustes e às configurações experimentais. Todo o desenvolvimento depende da capacidade de variar independentemente a diferença F_- e a interação J , mas, como já dito, há várias circunstâncias em que esse requisito pode ser satisfeito.

Como exemplo podemos citar a aplicação do campo efetivo (2.11) $\mathbf{K}(J, 0, F_-)$ periódico, obtendo-se a equivalência do operador R_t com \widehat{U}_{XOR} (tal como na Eq. (3.2)) quando, para o período T ,

$$\phi_J(T) = \phi_{F_+}(T) = \frac{\pi}{2} \text{ mod}(2\pi) .$$

Embora a função de interação J dependa dos campos externos aplicados, quando $F_- \ll F_+$, pode-se fazer $J = J(F_+)$ e considerar o vetor \mathbf{K} como a composição das funções independentes $J(t)$ e $F_-(t)$.

Para se ter uma ideia dos valores envolvidos no período de aplicação dos campos, quando J e F_- são constantes temos

$$T = \frac{2\pi n}{\sqrt{J^2 + F_-^2}} ,$$

de modo que para um típico *Quantum Dot* de GaAs [18], sendo $J = 50 \mu\text{eV}$ e $F_- = 10 \text{ mT}$, obtém-se a *porta* quântica *XOR* em um período de 10 ps.

3.1.3 O Campo Adiabático

A implementação de uma porta lógica quântica é feita com a variação dos campos externos. Contudo, assim como descrito na condição 1 desta seção, essa variação não pode ser tão rápida, para não permitir a excitação para níveis maiores de energia. Este problema pode ser evitado pelo uso de uma variação adiabática dos campos, podendo ser obtida através de uma dependência temporal do tipo $\text{sech}(\omega t)$ [19] com $\omega \ll \Delta E/\hbar$.

Nesta subseção analisaremos o caso onde a função de interação varia adiabaticamente e a diferença dos campos é constante,

$$J(t) = \frac{a}{\cosh(\omega t)} \quad , \quad F_- = c \quad ,$$

com a e c constantes. O operador de evolução para a equação (2.10) com os campos acima, é dado por [20],

$$\hat{u}_t = \frac{1}{|G_2^0|^2 + |G_1^0|^2} \begin{pmatrix} G_1(z) & -G_2^\dagger(z) \\ G_2(z) & G_1^\dagger(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^{0\dagger} & G_2^{0\dagger} \\ -G_2^0 & G_1^0 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.3)$$

onde \dagger indica o complexo conjugado e

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (2c - i\omega) z^{-\nu} (1 - z)^\nu F(\lambda, -\lambda, \gamma; z) \quad , \\ G_2(z) &= 2az^{-\nu+1/2} (1 - z)^{\nu+1/2} F(1 + \lambda, 1 - \lambda, 1 + \gamma; z) \quad , \\ z(t) &= \frac{1}{2} (1 - \tanh(\omega t)) \quad , \quad G_i^0 = G_i\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \\ \nu &= -\frac{ic}{2\omega} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{2} - 2\nu \quad , \quad \lambda = \frac{|a|}{\omega} \quad . \end{aligned}$$

Nesta expressão, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ é a função Gaussiana hipergeométrica [1].

Usando uma variação do tipo $\text{sech}(\theta)$ para criar um pulso da função de interação, este pulso será desligado quando $t \gg 1/\omega$. Neste limite de tempo temos $\lim_{\omega t \rightarrow \infty} z = e^{-2\omega t}$ e $F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$. Se neste limite escolhermos,

$$G_2^0 = aF\left(1 + \lambda, 1 - \lambda, 1 + \gamma; \frac{1}{2}\right) \quad ,$$

o operador de evolução (3.3) assume a forma,

$$\hat{u}_t(\omega t \rightarrow \infty) = \exp(-ic\sigma_3 t) .$$

O caso em que a função de interação é constante e a diferença entre os campos varia adiabaticamente, pode ser visto em [20], e o caso com ambos variando adiabaticamente em [1].

Para ilustrar a diferença entre a atuação de um campo proporcional a uma função degrau (como B_x no exemplo da *porta NOT*) e outro proporcional a uma função sech, a Figura 3.1.3.1 mostra tais atuações em vermelho e azul, respectivamente.

Figura 3.1.3.1 Variação Degrau \times Variação Adiabática



Fonte: o próprio autor.

4 CONCLUSÃO

As soluções exatas da equação de spin se mostram extremamente úteis na solução de problemas de dois níveis, além de ser de grande importância para a computação quântica, aplicada na manipulação dos *qubits*. Ademais, no estudo de sistemas de dois e três spins acoplados (sistemas de quatro e oito níveis, respectivamente), vislumbramos a possibilidade de redução de níveis para solução dos mesmos. Problemas de dois spins acoplados, sendo reduzidos a soluções de dois níveis em um campo efetivo (que possui soluções exatas), levam a manipulação de dois qubits, e conseqüentemente a construção e a implementação teórica de portas lógicas quânticas universais. Sabendo-se que a partir de portas lógicas quânticas universais, de um e dois qubits, pode-se realizar qualquer tipo de processamento da informação quântica, obtemos a implementação dos algoritmos quânticos.

Por fim, no intuito de gerar uma sólida base teórica para implementação da computação quântica, devido as dificuldades práticas de manipulação, processamento e transmissão da informação, podemos obter algoritmos de correção de erro, a partir de sistemas de três spins acoplados. Sendo estes, reduzidos a problemas de (dois sistemas) três níveis. Onde, para o *caso simétrico*, vimos que o resultado pode ser usado para estabelecer as condições de campo que permitem a obtenção do estado de máximo emaranhamento (vindo de um produto de estados iniciais), determinando assim a melhor configuração de campo para implementação de algoritmos de correção de erro.

Todo o desenvolvimento é realizado tomando-se em conta condições experimentais realistas.

A Relação de Identidade da Configuração Triangular

Devido a configuração triangular, o operador de evolução para três spins acoplados possui um termo de interação com $(\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13})$. A expansão do operador em termos de *seno* e *coseno* é possível graças a relação $(\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13})^2 = \mathbb{I}_{8 \times 8}$, assim com será demonstrando.

$$(\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13})^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (M_{\Gamma})_{\alpha\beta} \quad ,$$

$$M_{\Gamma} = \begin{pmatrix} (\Gamma^{12})^2 & \Gamma^{12}\Gamma^{23} & \Gamma^{12}\Gamma^{13} \\ \Gamma^{23}\Gamma^{12} & (\Gamma^{23})^2 & \Gamma^{23}\Gamma^{13} \\ \Gamma^{13}\Gamma^{12} & \Gamma^{13}\Gamma^{23} & (\Gamma^{13})^2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} .$$

Da definição de Γ e das relação de comutação e anti-comutação das matrizes de Pauli (2.3), calculando individualmente os elementos da matriz M_{Γ} , temos,

$$\begin{aligned} (\Gamma^{12})^2 &= (\boldsymbol{\Sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}^2)^2 = \left[\sum_{\alpha=1}^3 (\sigma_{\alpha} \otimes \sigma_{\alpha} \otimes I) \right]^2 = [(\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes I) + (\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes I) + (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes I)]^2 = \\ &= (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes I)^2 + (\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes I)^2 + (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes I)^2 + \\ &+ (\sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes I) + (\sigma_1\sigma_3 \otimes \sigma_1\sigma_3 \otimes I) + (\sigma_2\sigma_3 \otimes \sigma_2\sigma_3 \otimes I) + \\ &+ (\sigma_2\sigma_1 \otimes \sigma_2\sigma_1 \otimes I) + (\sigma_3\sigma_1 \otimes \sigma_3\sigma_1 \otimes I) + (\sigma_3\sigma_2 \otimes \sigma_3\sigma_2 \otimes I) \\ &= 3(I \otimes I \otimes I) + (i\sigma_3 \otimes i\sigma_3 \otimes I) + (-i\sigma_3 \otimes -i\sigma_3 \otimes I) - 2(\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes I) + \\ &- 2(\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes I) \\ &= 3\mathbb{I} - 2\Gamma^{12} . \end{aligned}$$

Semelhantemente para os outros dois elementos quadráticos, segue,

$$(\Gamma^{13})^2 = (\boldsymbol{\Sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}^3)^2 = \left[\sum_{\alpha=1}^3 (\sigma_{\alpha} \otimes I \otimes \sigma_{\alpha}) \right]^2 = [(\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1) + (\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_2) + (\sigma_3 \otimes I \otimes \sigma_3)]^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1)^2 + (\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_2)^2 + (\sigma_3 \otimes I \otimes \sigma_3)^2 + \\
&+ (\sigma_1\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_1\sigma_2) + (\sigma_1\sigma_3 \otimes I \otimes \sigma_1\sigma_3) + (\sigma_2\sigma_3 \otimes I \otimes \sigma_2\sigma_3) + \\
&+ (\sigma_2\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_2\sigma_1) + (\sigma_3\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_3\sigma_1) + (\sigma_3\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_3\sigma_2) \\
&= 3(I \otimes I \otimes I) - 2(\sigma_3 \otimes I \otimes \sigma_3) - 2(\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_2) - 2(\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1) \\
&= 3\mathbb{I} - 2\Gamma^{13} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma^{23})^2 &= (\Sigma^2 \cdot \Sigma^3)^2 = \left[\sum_{\alpha=1}^3 (I \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha) \right]^2 = [(I \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1) + (I \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2) + (I \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3)]^2 = \\
&= (I \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1)^2 + (I \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2)^2 + (I \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3)^2 + \\
&+ (I \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2) + (I \otimes \sigma_1\sigma_3 \otimes \sigma_1\sigma_3) + (I \otimes \sigma_2\sigma_3 \otimes \sigma_2\sigma_3) + \\
&+ (I \otimes \sigma_2\sigma_1 \otimes \sigma_2\sigma_1) + (I \otimes \sigma_3\sigma_1 \otimes \sigma_3\sigma_1) + (I \otimes \sigma_3\sigma_2 \otimes \sigma_3\sigma_2) \\
&= 3(I \otimes I \otimes I) - 2(I \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3) - 2(I \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2) - 2(I \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1) \\
&= 3\mathbb{I} - 2\Gamma^{23} .
\end{aligned}$$

Calculados os elementos quadráticos, seguimos com os demais de dois em dois, resultando em relações de anti-comutação,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{12}\Gamma^{23} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes I) (I \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_\beta) = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \sigma_\beta \otimes \sigma_\beta) = \\
&= (\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_1 \otimes \sigma_1) + (\sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_1 \otimes \sigma_1) + (\sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \\
&+ (\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_2) + (\sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_2 \otimes \sigma_2) + (\sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_2 \otimes \sigma_2) + \\
&+ (\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_3 \otimes \sigma_3) + (\sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_3 \otimes \sigma_3) + (\sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_3 \otimes \sigma_3) . \\
\Gamma^{23}\Gamma^{12} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (I \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_\beta) (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes I) = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta) = \\
&= (\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_1 \otimes \sigma_1) + (\sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_1) + (\sigma_3 \otimes \sigma_1\sigma_3 \otimes \sigma_1) + \\
&+ (\sigma_1 \otimes \sigma_2\sigma_1 \otimes \sigma_2) + (\sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_2 \otimes \sigma_2) + (\sigma_3 \otimes \sigma_2\sigma_3 \otimes \sigma_2) + \\
&+ (\sigma_1 \otimes \sigma_3\sigma_1 \otimes \sigma_3) + (\sigma_2 \otimes \sigma_3\sigma_2 \otimes \sigma_3) + (\sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_3 \otimes \sigma_3) .
\end{aligned}$$

Somando os dois últimos resultados, e das relações (2.3) temos,

$$\begin{aligned}\Gamma^{12}\Gamma^{23} + \Gamma^{23}\Gamma^{12} &= 2(\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1) + 2(\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_2) + 2(\sigma_3 \otimes I \otimes \sigma_3) + \\ &+ (\sigma_1 \otimes \{\sigma_2, \sigma_1\} \otimes \sigma_2) + (\sigma_1 \otimes \{\sigma_1, \sigma_3\} \otimes \sigma_3) + 0 \\ &= 2\Gamma^{13} .\end{aligned}$$

Análogamente, para os próximos elemetos,

$$\begin{aligned}\Gamma^{12}\Gamma^{13} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes I) (\sigma_\beta \otimes I \otimes \sigma_\beta) = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\alpha \sigma_\beta \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta) = \\ &= (\sigma_1 \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1) + (\sigma_1 \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2) + (\sigma_1 \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3) + \\ &+ (\sigma_2 \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1) + (\sigma_2 \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2) + (\sigma_2 \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) + \\ &+ (\sigma_3 \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1) + (\sigma_3 \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2) + (\sigma_3 \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3) . \\ \Gamma^{13}\Gamma^{12} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\beta \otimes I \otimes \sigma_\beta) (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes I) = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\beta \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta) = \\ &= (\sigma_1 \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1) + (\sigma_2 \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2) + (\sigma_3 \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3) + \\ &+ (\sigma_1 \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1) + (\sigma_2 \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2) + (\sigma_3 \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) + \\ &+ (\sigma_1 \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1) + (\sigma_2 \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2) + (\sigma_3 \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3) .\end{aligned}$$

Somando os dois últimos resultados,

$$\Gamma^{12}\Gamma^{13} + \Gamma^{13}\Gamma^{12} = 2(I \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1) + 2(I \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2) + 2(I \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3) = 2\Gamma^{23} .$$

Finalmente, para os dois últimos elementos,

$$\begin{aligned}\Gamma^{13}\Gamma^{23} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\beta \otimes I \otimes \sigma_\beta) (I \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha) = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\beta \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \sigma_\alpha) = \\ &= (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \sigma_1) + (\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \sigma_2) + (\sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \sigma_3) + \\ &+ (\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \sigma_1) + (\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \sigma_2) + (\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \sigma_3) + \\ &+ (\sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \sigma_1) + (\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \sigma_2) + (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \sigma_3) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{23}\Gamma^{13} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (I \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha)(\sigma_\beta \otimes I \otimes \sigma_\beta) = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\sigma_\beta \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha\sigma_\beta) = \\
&= (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_1) + (\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_1) + (\sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_1) + \\
&+ (\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2) + (\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_2) + (\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_2) + \\
&+ (\sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_3) + (\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_3) + (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_3) .
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento de somar os dois últimos resultados, temos,

$$\Gamma^{13}\Gamma^{23} + \Gamma^{23}\Gamma^{13} = 2(\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1) + 2(\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_2) + 2(\sigma_3 \otimes I \otimes \sigma_3) = 2\Gamma^{12} .$$

Portanto,

$$(\Gamma^{12} + \Gamma^{23} + \Gamma^{13})^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (M_\Gamma)_{\alpha\beta} = 9\mathbb{I}_{8 \times 8} , \quad (4.1)$$

como queríamos demonstrar.

A relação (4.1) é de grande importância para implementação do operador de evolução temporal. Visto que a configuração linear não possui o termo Γ^{13} , e por isso, como $(\Gamma^{12} + \Gamma^{23})^2 \neq \mathbb{I}$, a exponencial não pode ser expandida em termos de *seno* e *coosseno*, prejudicando a implementação do operador.

Bibliography

- [1] Baldiotti, M. C., Bagrov, V. G., and Gitman, D.M. **Four-level systems and a universal quantum gate**. *Annals of Physics*. v. 16, p. 274 (2007).
- [2] Loss, D., and DiVincenzo, D.P. **Quantum computation with quantum dots**. *Physical Review A*, v. 57, p.120-126, 01 (1998).
- [3] NIELSEN, M. A., and CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. Edição 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [4] Pauli, W. **Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons**. *Zeit. Phys.* 43, 601 (1927).
- [5] Grifoni, M., and Hanggi P. **Driven quantum tunneling**. *Phys. Rep.* 304, 229 (1998).
- [6] Feynman, R. P., Vernon, F. L., and Hellwarth, R. W. **Geometrical Representation of the Schrödinger Equation for Solving Maser Problems**. *J. Applied Physics* 28, 49 (1957).
- [7] Novikov, S., *et al.* **Theory of Solitons**. (Consultants Bureau, New York, London 1984).

- [8] Barata, J.C., and Cortez, D.A. **Time evolution of two-level systems driven by periodic fields.** Phys Lett. A 301, 350 (2002).
- [9] Baldiotti, M. C., *et al.* **Spins Equation and its Solutions.** Ann. Phys. (Leipzig) 14, 764 (2005).
- [10] Blümel, R., Buchleitner, A., Graham, R., Sirko, L., Smilansky, U., and Walther, H. **Dynamical localization in the microwave interaction of Rydberg atoms: The influence of noise.** Phys. Rev. A 44, 4521 (1991).
- [11] Gisin, N., and Popescu, S. **Phys. Rev. Lett.** 83, 432 (1999).
- [12] Buzek, V., Hillery M., and Werner, R.F. **Phys. Rev. A** 60, R2626 (1999).
- [13] Angelo, R.M., and Wreszinski, W. F. **Quantum NOT Operation and Integrability in Two-Level Systems.** Quant-Ph/0502102v1 (2005).
- [14] Ashcroft, N. W., and Mermin, N. D. **Solid State Physics.** Saunders, Philadelphia, 1976.
- [15] Burkard, G., Loss, D., and DiVincenzo, D.P. **Coupled quantum dots as a quantum gate.** Phys. Rev. B 59, 1829 (1999).
- [16] Baldiotti, M.C., *et al.* **Two interacting spins in external fields and application to quantum computation.** Phys. Part. Nucl. Lett. 6, 559 (2009).
- [17] Baldiotti, M. C., *et al.* **Two interacting spins in external fields and application to quantum computation.** Annals of Physics. v. 14, p. 764 (2005).

- [18] Burkard, G., Loss, D., and DiVincenzo, D.P. **Coupled quantum dots as quantum gates**. Physical Review B, v. 59, p. 2070–2078 (1999).

- [19] Burkard, G., Loss, D., DiVincenzo, D. P., and Smolin, J. A. **Physical optimization of quantum error correction circuits**. Physical Review B, v. 60, p. 11404-11416 (1999).

- [20] Baldiotti, M. C., *et al.* **Two and Four-level systems in mag. fields restricted in time**. Braz. J. Phys. 41:71-77 (2011).