Universidade Estadual de Londrina

JEFERSON TAKEO PADOAN SEKI

UMA VISÃO PANORÂMICA DA APRENDIZAGEM EM MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2023

JEFERSON TAKEO PADOAN SEKI

UMA VISÃO PANORÂMICA DA APRENDIZAGEM EM MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Seki, Jeferson Takeo Padoan Seki.
UMA VISÃO PANORÂMICA DA APRENDIZAGEM EM MODELAGEM MATEMÁTICA / Jeferson Takeo Padoan Seki Seki. - Londrina, 2023.
247 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Modelagem Matemática - Tese. 2. Aprendizagem - Tese. 3. Análise de modelos - Tese. 4. Jogos de linguagem - Tese. I. Maria Werle de Almeida, Lourdes . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

JEFERSON TAKEO PADOAN SEKI

UMA VISÃO PANORÂMICA DA APRENDIZAGEM EM MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Profª. Dra. Elizabeth Gomes Souza
Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Londrina, 22 de Agosto de 2023.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por todos os momentos de felicidade, de apoio e paciência nessa jornada. Em especial, aos meus pais Ester e Alceu, vocês são a minha principal inspiração e para quem dedico essa tese. À minha irmã, por toda paciência e apoio nessa jornada. Amo vocês!

À minha vó Maria e ao meu vô Primo (*in memoriam*), exemplos de resiliência e de compaixão.

Aos amigos que a vida, pesquisa e graduação me trouxeram, pelos conselhos, pelo apoio, por me tornarem uma pessoa cada vez melhor. Em especial, agradeço ao Ariel, a Bianca e a Bárbara. Ariel, obrigado por todos os momentos de discussão, de paciência e por ter acreditado junto comigo que um dia esse sonho se tornaria possível; que você trilhe um caminho de muito sucesso e felicidade pelo que você faz ou queira fazer. Bianca, você é a pessoa que divido minhas frustações e alegrias, juntos nós nos transformamos, nos reinventamos e nos tornamos quase a mesma pessoa; que você possa confiar em si mesmo e compreender que você é brilhante quando deixa sua autenticidade te guiar. Bárbara, você é uma grande inspiração de profissional e de pessoa, obrigado por sempre estar disponível quando preciso e me propiciar novas maneiras de ver o mundo, com você posso reconhecer minhas limitações e potencialidades e buscar sempre a minha melhor versão; que você continue trazendo luz por onde passa, iluminando todos à sua volta e inspirando outras pessoas.

À minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, a quem tenho muita admiração por tudo que ela é e representa. Lourdes, agradeço por esses seis anos de orientação, desde o mestrado até o doutorado, por toda atenção e principalmente por ter contribuído tanto na minha formação pessoal e profissional. Sempre guardarei com grande apreço essa experiência.

Ao Rudolph dos Santos Gomes Pereira, a primeira pessoa a acreditar que um dia eu poderia me tornar um professor e um pesquisador da Educação Matemática. Agradeço por todos os ensinamentos, conselhos e por ter feito tanto. Sem você, eu não seria quem sou hoje como profissional e como pessoa. Você é fonte de inspiração. Se um dia eu conseguir deixar para o mundo um pouco do que você representou para mim, minha missão aqui na terra será dada por concluída.

Aos amigos do GRUPEMMAT, pelo apoio, conversas e discussões. Neste grupo, conheci pessoas que para mim são exemplos de profissionais e de seres humanos. Vocês fazem parte dessa jornada.

Aos professores Emerson Tortola, Elizabeth Gomes Souza, Rudolph dos Santos Gomes Pereira e Thiago Pedro Pinto pelas críticas e sugestões, que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

Aos alunos, participantes dessa pesquisa, pela dedicação, pela disposição e por todos os momentos de aprendizagem. Vocês me incentivam a buscar ser cada dia mais um profissional melhor.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Uma das fontes principais da nossa falta de compreensão é que não vemos claramente o uso das nossas palavras. – Falta à nossa gramática uma visão panorâmica. A apresentação panorâmica proporciona ao entendimento justamente o que consiste em 'ver as conexões'. Daí a importância de encontrar e inventar elos intermediários.
O conceito de apresentação panorâmica é de significado fundamental para nós. Ele marca a nossa forma de apresentação, a maneira como vemos as coisas. (Isto é uma 'visão de mundo'?)

Ludwig Wittgenstein

RESUMO

SEKI, Jeferson Takeo Padoan. **Uma visão panorâmica da aprendizagem em modelagem matemática.** 2023. 247 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

O uso difuso do termo aprendizagem na área de pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática torna-se terreno fértil para instauração de aplicações dogmáticas de imagens acerca da aprendizagem e da matemática, gerando dificuldades de compreensão acerca de sua significação e de como ela se dá. Nesse cenário, a presente pesquisa visa estruturar uma visão panorâmica da aprendizagem em atividades de modelagem matemática a partir de uma perspectiva wittgensteiniana. Essa estruturação desdobra-se em três movimentos, que busca ver concatenações acerca dos diversos usos do termo aprendizagem no âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática. No primeiro movimento, descreve-se gramaticalmente os entendimentos de aprendizagem e as inferências sobre a aprendizagem a partir das ações de estudantes em publicações da literatura, o que resultou em uma compreensão constituída por uma tecitura de semelhanças de família entre traços característicos da aprendizagem. No segundo movimento, com a finalidade de trazer elementos para caracterizar diferentes modos de ver a aprendizagem, descreve-se os jogos de linguagem associados à aprendizagem que emergem do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por estudantes diferentes de dois contextos, uma disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e uma disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, de acordo com duas abordagens distintas do fazer modelagem matemática: a análise de modelos e uma abordagem holística, em que os estudantes realizam o processo completo do ciclo de modelagem matemática, respectivamente. No terceiro movimento, o caminho é estabelecer diálogos entre os dois primeiros movimentos, de modo a ver relações internas entre a aprendizagem nos diferentes jogos de linguagem identificados no segundo movimento e os traços característicos identificados na literatura. A visão panorâmica estruturada fornece indicativos para: constituição de modos de ver a aprendizagem em modelagem matemática, que pode se caracterizar de modos diferentes ao utilizar distintas abordagens; uma compreensão da modelagem matemática como atividade linguística, cujas condições de aprendizagem se dão internas à linguagem e aprender pode ser interpretado como aprender a aplicar regras de jogos de linguagem que dão forma e significado ao *fazer* modelagem, evitando-se com isso o emprego de atitude dogmáticas que buscam fundamentos últimos para aprendizagem em um mundo platônico, mental ou ideal.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Aprendizagem; Análise de modelos; Jogos de linguagem; Wittgenstein.

ABSTRACT

SEKI, Jeferson Takeo Padoan. **A perspicuous representation of mathematical modelling learning**. 2023. 247 f. Tesis (Doctoral in Teaching Science and Mathematics Education) – Londrina State University, Londrina, 2023.

The diffuse use of the term learning in the research area of Mathematical Modelling in Mathematics Education becomes fertile ground for the establishment of the dogmatic application of images about learning and mathematics, generating difficulties in understanding its meaning and how it occurs. In this scenario, this research aims to structure a perspicuous representation of learning in mathematical modelling activities from a wittgensteinian perspective. This structuring unfolds into three movements, which seek to see concatenations about the various uses of the term learning. In the first movement, the understandings of learning and modelling are grammatically described, the inferences about learning from the actions of students in literature publications, which resulted in an understanding constituted by a weaving of family similarities between characteristic traits of the learning. In the second movement, with the purpose of bringing elements to characterize different ways of seeing learning, we describe the language games associated with learning that emerge from the development of mathematical modelling activities by students from different contexts, a discipline Introduction to Equations Ordinary Differentials and a discipline Mathematical Modelling in the Perspective of Mathematics Education, according to two distinct approaches to doing mathematical modeling: model analysis and a holistic approach, respectively. In the third movement, the path is to establish dialogues between the first two movements, to see internal relationships between learning in the different language games identified in the second movement and the characteristic traits identified in the literature. The structured perspicuous representation provides indications for: constitution of ways of seeing learning in mathematical modelling, which can be characterized in different ways when using different approaches; an understanding of mathematical modelling as a linguistic activity, whose learning conditions are internal to language and learning can be interpreted as learning to apply language game rules that give form and meaning to modelling, thus avoiding the use of attitude dogmatic that seek ultimate foundations for learning in a platonic, mental or ideal world.

Key-words: Mathematics Education; Mathematical Modelling; Learning; Model analysis; Language games; Wittgenstein.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RFM	Remarks on the foundations of mathematics
LFM	Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics
TLP	Tractatus Logico-Philosophicus
ORO	Observações sobre o Ramo de Ouro de Frazer
DC	Da certeza
Z	Fichas (Zettel)
BT	The Big Typescript. TS 213
IF	Investigações Filosóficas

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO DO TEMA E DEFINIÇÃO DO OBJETIVO

Aprendizagem é um termo amplamente utilizado em discursos científicos, pedagógicos, políticos e econômicos, configurando um tema de interesse em diferentes áreas profissionais e acadêmicas. Nesse cenário, não há uma definição única de aprendizagem, mas diferentes visões, com bases epistemológicas que estruturam teorias e fornecem pontos de vista, maneiras particulares de ver o que é aprendizagem, como aprendemos algo e sobre condições necessárias para que ela aconteça (Illeris, 2013; Moreira, 2018).

Diferentes formas de caracterizar a aprendizagem surgem quando determinados aspectos, sejam eles sociais, cognitivos, volitivos, entre outros, que a caracterizam e a influenciam, são enfatizados em detrimento de outros, com base em diferentes tradições epistemológicas. Greeno, Collins e Resnick (1996) indicam três perspectivas: behaviorista/empirista, em que a aprendizagem é vista como o fortalecimento de associações entre estímulo e resposta; cognitiva/racionalista, em que a aprendizagem é conceitualizada em termos de desenvolvimento de estruturas conceituais e habilidades cognitivas, como por exemplo, resolver problemas; situada/pragmatista/sócio-histórica, na qual a aprendizagem está intrinsicamente relacionada às interações sociais e ferramentas culturais.

Na área de Educação Matemática, essa diversidade de conceituações da aprendizagem também acontece em alguma medida, em diferentes formas de pensar o ensino de matemática, a partir da formulação de currículos educacionais e a proposição de alternativas pedagógicas que fornecem possibilidades para uma discussão em torno das questões: o que queremos que os estudantes aprendam em matemática? Como essa aprendizagem ocorre?

Nessa discussão, a proposição de alternativas pedagógicas para o ensino de matemática depende, dentre outros fatores, do que se entende por matemática em práticas pedagógicas orientadas por essas alternativas. Na literatura da área de Educação Matemática, estudos questionam a existência de uma única matemática, como corpo de conhecimentos de verdades absolutas, universais e independentes das práticas humanas. Esses estudos advogam pela existência de várias matemáticas, estruturadas como diferentes práticas sociais ou sistemas normativos (Knijnik, 2017; Miguel, 2016; Vilela, 2007; entre outros).

Considerando esta possibilidade, o foco da presente pesquisa dirige-se para a aprendizagem da matemática escolar, daquela historicamente estabelecida e organizada no contexto da Educação Escolar[1] com *status* de disciplina (Souza, 2012). Enquanto invenção

[1] De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, Art. 21, a Educação Escolar compõe-se da Educação Básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e

humana, entendemos que a matemática escolar envolve regras convencionadas no interior da forma de vida dos matemáticos, cujos significados não são absolutos e universais, mas se dão em seus usos nas práticas humanas. Gottschalk (2008) salienta que a atividade matemática não possui apenas uso normativo, o que a difere das ciências empíricas, mas possui também uso empírico[2], na medida em que utilizamos as proposições matemáticas para organizar nossas experiências, bem como para descrever, mensurar, prever, explicar, compreender e prescrever fenômenos empíricos.

Esses usos da matemática podem ser explorados e articulados por meio da modelagem matemática na Educação Matemática[3], que possibilita incorporá-los no âmbito escolar com vistas à resolução de problemas oriundos de diversas esferas da vida humana em sociedade. Henry Pollak (1979, p. 240), um dos pioneiros a discutir a modelagem matemática nesse contexto, argumenta que "é muito valioso para o aluno ter experiências com modelagem pois, além de seu grande valor pedagógico, ela é uma possibilidade de aplicações da matemática no mundo real".

> A Educação Matemática é, no mínimo, responsável por ensinar como usar matemática na vida cotidiana e na cidadania, não nos esqueçamos disso. Na verdade, qualquer separação entre ciência e vida cotidiana é uma ilusão. De fato, a vida cotidiana muitas vezes também envolve questões científicas. Então, o que realmente importa na Educação Matemática é aprender e praticar o processo de modelagem matemática. O campo de aplicação específico, seja na vida cotidiana, seja para o exercício da cidadania ou para entender alguma ciência, é menos importante para os estudantes do que a experiência com esse processo de pensamento (Pollak, 2012, p. 2).

Na sala de aula, a modelagem matemática pode ser entendida, conforme Almeida (2018) e Almeida, Silva e Vertuan (2012), como uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de matemática, na qual situações-problema, que não são matemáticas, são abordadas por meio da matemática. De acordo com esse entendimento, o desenvolvimento de atividades desse tipo em práticas pedagógicas envolve a construção e o uso de modelos matemáticos para resolver problemas pertencentes a domínios extramatemáticos. Segundo Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 17), "o modelo matemático, neste caso, é o que 'dá forma' à solução do problema e a modelagem matemática é a atividade de busca por esta solução".

A literatura tem indicado que, no desenvolvimento de atividades de modelagem, a aprendizagem não se restringe a matemática escolar, mas incorpora, por

---

ensino médio, e Educação Superior.

[2] É importante destacar que esse uso empírico não pode ser usado para falsear ou validar as proposições matemáticas.

[3] Ao longo do texto utilizamos modelagem matemática com iniciais minúsculas para nos referirmos as atividades de modelagem matemática e Modelagem Matemática com iniciais maiúsculas para nos referirmos a área de pesquisa.

exemplo, o uso de tecnologias, conhecimentos sobre a situação investigada, o desenvolvimento de competências, entre outros (Almeida, 2018; Blum, 2015, Greefrath, 2011; Niss; Hφjgaard, 2019).

Apesar do termo *aprendizagem* ser frequentemente utilizado nas publicações da área, pouco se tem investigado relativamente à caracterização do que é aprendizagem e como ela se dá em atividades de modelagem matemática. Cruz e Araújo (2017) corroboram com esse argumento, ao constatarem que em trabalhos publicados na IX Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, 85% dos 75 trabalhos publicados na conferência apresentam o uso da palavra *aprendizagem* no corpo do texto, mas apenas 4 destes trabalhos deixam claro a concepção de aprendizagem subjacente. Gomes, Kowalek e Almeida (2022) também destacam, a partir de uma análise de artigos publicados em anais de eventos da área de Modelagem Matemática, que frases como "buscamos na modelagem possibilidades para melhorias na qualidade de aprendizagem dos alunos", "atividades desenvolvidas em contextos reais podem maximizar o desempenho do aluno na aprendizagem", são mencionadas nos artigos, não havendo, entretanto, uma explicitação de como a aprendizagem está sendo entendida ou caracterizada.

O uso do termo aprendizagem na literatura sem a explicitação de como ela é entendida pode obstruir uma visão acerca de sua significação e levar a um esvaziamento epistêmico de sua caracterização, dificultando um esclarecimento qualitativo de elementos que a influenciam e a condicionam no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nos contextos educacionais.

Reconhecem-se, todavia, na literatura, diferentes teorias e perspectivas epistemológicas ou filosóficas utilizadas para discutir o tema aprendizagem. Borssoi (2013), Figueiredo (2013) e Silva (2018) utilizam a *teoria da aprendizagem significativa* de David Ausubel. Braga (2015) recorre a *teoria da atividade* de Engeström. Ferruzzi (2011) discute a aprendizagem de estudantes em atividades de modelagem matemática a partir das interações discursivas, com base na teoria *socio-histórico-cultural*. Braz (2014) investiga a constituição de comunidades de prática locais com base na *teoria da aprendizagem situada*. Brito (2018) apresenta uma compreensão fenomenológica de como estudantes aprendem geometria em atividades de modelagem matemática. Souza (2012) utiliza as ideias de Anna Sfard e de Ludwig Wittgenstein para caracterizar que aprendizagem é constituída em atividades de modelagem.

Apesar das diferentes acepções que esse termo pode tomar nas teorizações articuladas na literatura, o uso dogmático de um modo de ver a aprendizagem em atividades de modelagem matemática pode levar a dificuldades de seu entendimento em práticas pedagógicas. Por exemplo, abordagens que propõem ciclos de modelagem matemática para a identificação da aprendizagem nesse tipo de atividade, podem se ancorar em uma concepção cartesiana do conhecimento sustentada na dualidade entre sujeito e objeto, em que a aprendizagem se fundamenta na capacidade do pensamento de construir e manipular representações matemáticas e, a partir delas, produzir significações (Brito, 2018). Uma outra ideia que pode levar a dificuldades, quando usada de forma dogmática, criticada por Tortola, Seki e Almeida (2022), é a de que apenas o uso empírico da matemática em atividades de modelagem matemática é suficiente para aprender matemática, sustentada em um privilegiamento dos aspectos empíricos ou utilitários do conhecimento matemático em detrimento dos seus aspectos formais, dando a entender que a aprendizagem se reduz em saber aplicar ou usar matemática para estudar situações-problema da realidade.

Do ponto de vista dos escritos do filósofo Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889-1951), a aplicação dogmática de um conceito como, por exemplo, o conceito de aprendizagem, diz respeito ao uso da palavra que se associa a esse conceito. De fato, quando para essa palavra se faz uma busca essencialista dos seus fundamentos últimos, sem a devida atenção aos seus usos nas diversas práticas linguísticas em que este conceito é empregado, pode-se configurar um reducionismo em relação à sua caracterização. Evita-se uma posição dogmática mediante uma descrição gramatical, evidenciando que não há um único significado, mas que diferentes significados podem ser identificados a partir desses usos. Nessa perspectiva, se queremos compreender os significados de uma palavra, devemos olhar para como essa palavra é usada em diferentes *jogos de linguagem*[4] ou mesmo no interior de um mesmo jogo, elaborando analogias e estabelecendo elos intermediários entre esses usos. Busca-se, como sugere Wittgenstein, uma *visão panorâmica*:

> Uma das fontes principais da nossa falta de compreensão é que não *vemos claramente* o uso das nossas palavras. – Falta à nossa gramática uma visão panorâmica. A apresentação panorâmica proporciona ao entendimento justamente o que consiste em 'ver as conexões'. Daí a importância de encontrar e inventar *elos intermediários*.
> O conceito de apresentação panorâmica é de significado fundamental para nós. Ele marca a nossa forma de apresentação, a maneira como vemos as coisas. (Isto é uma 'visão de mundo'?)[5] (Wittgenstein, IF, § 122).

[4] Os jogos de linguagem são entendidos por Wittgenstein, na fase tardia de sua filosofia, como atividades linguísticas guiadas por regras (Wittgenstein, IF, § 23) e servem ao propósito terapêutico como objetos de comparação (Wittgenstein, IF, § 130). Uma caracterização dos jogos de linguagem e de seu papel na terapia filosófica de Wittgenstein pode ser vista no capítulo 2, seção 2.1.

[5] Tradução de Almeida (2009). Segundo esse autor, "a fórmula "apresentação panorâmica" procura traduzir a expressão *Übersichtliche Darstellung*, que poderia também ser vertida como "visão de conjunto", "visão sinóptica", "apresentação perspícua", "apresentação clara", "apresentação ordenada". *Übersichtlich* significa, se tomamos literalmente o adjetivo, uma visão de cima, de quem vê o todo de uma coisa pelo lado de cima ou de uma certa altura, e significa também a apreensão de um todo, ou de um conjunto, pelo alto. Em geral, *Übersichtlich* refere-se a uma coisa ordenada, fácil de manipular ou de entender, como, por exemplo, uma *Übersichtlicher Werkzeugkasten* (uma caixa de ferramentas ordenada, em contraposição a outra bagunçada - *unübersichtlicher*).

A expressão utilizada por Wittgenstein *Übersichtliche Darstellung* tem sido traduzida de diferentes maneiras na literatura, por exemplo, como *apresentação panorâmica*, *visão de conjunto*, *apresentação perspícua*, *visão panorâmica*, entre outros. Após o *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), obra que marca a primeira fase do pensamento de Wittgenstein em que busca um esclarecimento lógico do pensamento expresso linguisticamente, Wittgenstein, em sua volta para atividade filosófica, utiliza a apresentação panorâmica inicialmente para designar um novo método filosófico e, posteriormente a incorpora em seus escritos como um conceito considerado de fundamental importância. Segundo Almeida (2009, p. 209) argumenta que a apresentação panorâmica se torna um conceito fundamental para Wittgenstein porque: "ela demarca a nossa forma de apresentação; [...] demarca a maneira como vemos as coisas; [...] proporciona a compreensão; [...] consiste precisamente em 'ver as concatenações', [...] decorre daí a importância de encontrar 'elos intermediários'[6]".

Em uma nota de tradução do livro *Observações sobre O Ramo de Ouro de Frazer* de Wittgenstein, João José R. L. Almeida comenta que a visão panorâmica consiste em ver concatenações[7] estabelecidas por elos intermediários, que são "analogias sem qualquer peso ontológico. Sua única função é conduzir, dirigir a atenção para uma relação interna qualquer de um objeto, aguçar o olho para detalhes até então imperceptíveis" (Almeida, 2007, p. 223). A visão panorâmica, como aponta Moreno (1995), fornece uma visão do funcionamento do uso das palavras em diversas situações, sejam essas situações efetivas ou até mesmo inusitadas por meio da descrição do uso das palavras, criando analogias de situações de uso e estabelecendo elos intermediários entre esses usos, mediante a *semelhanças e dessemelhanças de família*.

A apresentação de uma visão panorâmica contrasta com o método filosófico tradicional de levantar teses a respeito dos conceitos ao buscar uma solução absoluta para os problemas filosóficos. Wittgenstein encara a filosofia como uma atividade, uma prática de

---

Lembremo-nos de que Wittgenstein já comparou a linguagem a uma caixa de ferramentas (cf. LC, p. 1). A "apresentação panorâmica" deve ser compreendida, portanto, como o estabelecimento de uma ordenação por uma visão de conjunto, tendo em vista uma maior facilidade de manipulação" (Almeida, 2009, p. 205).

[6] Para Almeida (2009, p. 205), "a atividade de "encontrar elos intermediários" serviria para indicar analogias com outras formas de apresentação". No livro *Observações sobre O Ramo de Ouro de Frazer* de Wittgenstein, encontramos um exemplo de um tipo de elo intermediário: "Um elo intermediário hipotético, entretanto, nada deve fazer nesse caso senão dirigir a atenção para a semelhança, para a concatenação, entre os fatos. Como se uma pessoa, quisesse ilustrar // ilustrasse // uma relação interna da forma circular com a elipse, transformasse gradualmente uma elipse num círculo; mas não para afirmar que uma certa elipse factualmente, historicamente, teria se originado de um círculo (hipótese evolutiva), senão somente para aguçar nosso olho para uma concatenação formal" (TS 211, p. 322).

[7] As concatenações podem ser entendidas em Wittgenstein de relações internas de um objeto a partir de seus usos na linguagem. Conforme afirma Almeida (2009, p. 212), "atividade de "ver as concatenações" serviria para mostrar de que maneira formamos nossas convicções com base numa articulação arbitrária entre o empírico e as expressões linguísticas, e que, por esse motivo, tudo aquilo poderia ser visto de outra maneira".

descrição do uso da linguagem, com a finalidade de apresentar diferentes modos de ver. Não há, assim, segundo o autor, "um método em filosofia, o que existe são métodos, por assim dizer, diferentes terapias" (Wittgenstein, IF, § 133). Nessa metáfora, a atividade filosófica tem uma função terapêutica, de cura, das questões que açoitam o pensamento filosófico, que surgem porque somos suscetíveis ao enfeitiçamento pela linguagem. Como diz Wittgenstein, "o filósofo trata uma questão como uma doença" (IF§ 255) e a cura para essa doença é dada por um exame do funcionamento da linguagem, das diversas práticas linguísticas com as quais agimos e pensamos em nossas formas de vida. Os problemas filosóficos "não são solucionados pelo ensino de uma nova experiência, mas pela combinação do que há muito já se conhece. A filosofia é uma luta contra o enfeitiçamento de nosso intelecto pelos meios de nossa linguagem" (Wittgenstein, IF, § 109).

Na área de pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática, o uso do termo aprendizagem torna-se terreno fértil para instauração da aplicação dogmática de imagens acerca da aprendizagem e da matemática, gerando dificuldades de compreensão acerca de sua significação em práticas de uso associadas às atividades de matemática. O dogmatismo surge quando alimentamos nosso pensamento de uma única forma de ver a aprendizagem, em particular, quando se discute as questões: O que é aprendizagem em atividades de modelagem matemática? Como se dá essa aprendizagem? Que condições a tornam possível? Para libertar nosso pensamento do dogmatismo, faz-se necessário uma visão panorâmica a respeito da aprendizagem em atividades de modelagem matemática.

Considerando essa problemática e o interesse em deliberar a respeito do tema aprendizagem na Modelagem Matemática na Educação Matemática, a presente pesquisa tem como objetivo *estruturar uma visão panorâmica da aprendizagem em atividades de modelagem matemática a partir de uma perspectiva wittgensteiniana*. Tal visão consiste em aguçar o olhar para ver relações internas a partir da organização ou da identificação de elos intermediários entre os usos do termo *aprendizagem* na literatura e um olhar para práticas de uso da linguagem, nas quais se pode falar de aprendizagem que, neste caso, consistem em atividades modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

A estruturação dessa visão panorâmica pretendida desdobra-se em três movimentos, a partir de uma atitude terapêutica de inspiração wittgensteiniana assumida como atitude da pesquisa.

No primeiro movimento, é apresentada uma descrição dos usos do termo *aprendizagem* em artigos publicados em periódicos na área de Modelagem Matemática na Educação Matemática, nos últimos cinco anos, em relação aos entendimentos de aprendizagem e suas bases teóricas, das inferências sobre as ações dos estudantes acerca da aprendizagem em atividades de modelagem matemática e das relações entre esses aspectos com os entendimentos de modelagem matemática assumidos no texto. Com este movimento, o que se visa é compreender traços característicos do uso do termo aprendizagem na área de pesquisa em questão constituídos a partir dos modos de uso na literatura. Busca-se, com isso, construir uma *tecitura*, uma rede de semelhanças de família acerca dos diferentes modos de uso do termo aprendizagem e de suas relações com os entendimentos de modelagem matemática evidenciados na literatura.

No segundo movimento, considera-se uma característica da terapia filosófica de Wittgenstein, indicada no parágrafo 116 do *Investigações Filosóficas*:

> Quando os filósofos usam uma palavra – “saber”, “ser”, “objeto”, “eu”, “proposição”, “nome” – e almejam apreender a essência da coisa, devem sempre se perguntar: esta palavra é realmente sempre usada assim na linguagem na qual ter seu torrão natal? – Nós conduzimos as palavras do seu emprego metafísico de volta ao seu emprego cotidiano (Wittgenstein, IF, § 116).

Wittgenstein sugere aos filósofos olhar para os usos ordinários das palavras, isto é, para as práticas em que essas palavras são originalmente aplicadas. Trazendo essa sugestão de Wittgenstein para a campo que circunda nosso tema de pesquisa, o olhar é dirigido para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, que constituem as práticas em que podemos falar de aprendizagem nesse contexto.

Com a finalidade de fornecer uma variação em termos de modos de fazer modelagem matemática em sala de aula e das regras que circundam esse fazer, consideramos dois contextos de pesquisa: as disciplinas Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, do 3º e 4º anos, respectivamente, de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade pública do estado do Paraná. Em cada um desses contextos, respectivamente, abordagens diferentes relativas ao fazer modelagem matemática foram utilizadas, a primeira diz respeito à análise de modelos previamente formulados e, a segunda, se caracteriza por uma abordagem holística[8] da modelagem matemática, na qual os estudantes são convidados a realizar o processo completo da modelagem matemática, desde a inteiração com a situação-problema, construção de modelos

---

[8] Termo utilizado sob inspiração da abordagem holística utilizada na literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática, para designar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, na qual os estudantes trabalham em todas as fases do processo de modelagem, com o auxílio em maior ou menor grau do professor a depender do nível de familiarização. De acordo com Cevikbas, Kaiser e Schukajlow (2021, p. 208), no que tange ao desenvolvimento de competências de modelagem, a abordagem holística “depende de uma escala completa processo de modelagem, com os alunos trabalhando em todas as fases desse processo”.

até a análise dos modelos construídos.

No terceiro movimento, busca-se ver relações internas a partir dos elos intermediários estabelecidos no decorrer do primeiro e segundo movimentos, em relação aos usos do termo aprendizagem na literatura e da aprendizagem de estudantes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática; a aprendizagem mediada por modelos matemáticos; e um entendimento de modelagem matemática em relação às condições de aprendizagem.

2 ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Com base nos escritos filosóficos de Wittgenstein, assume-se uma atitude terapêutica de pesquisa, em que não se busca formular teses, mas *estruturar uma visão panorâmica da aprendizagem em atividades de modelagem matemática a partir de uma perspectiva wittgensteiniana*, de modo a deliberar sobre o tema aprendizagem no âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática, mediante uma descrição gramatical dos usos do termo na literatura e de suas possíveis aplicações em jogos de linguagem emergentes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Nesse capítulo, incialmente aborda-se aspectos associados à perspectiva filosófica, como a terapia filosófica e a visão panorâmica, a aprendizagem e a natureza das proposições matemáticas. Em seguida, apresenta-se as características da estrutura metodológica da presente pesquisa.

2.1 A TERAPIA FILOSÓFICA DE WITTGENSTEIN

Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951) foi um filósofo austríaco, naturalizado britânico, cujos temas filosóficos abordados influenciaram a filosofia analítica, a filosofia da linguagem, a filosofia da matemática, por exemplo. Duas obras são referenciadas como marcos de fases distintas de sua filosofia, *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), publicada em sua juventude, e *Investigações Filosóficas* (1953), obra póstuma do filósofo. Dentre as contribuições de Wittgenstein, podemos destacar sua concepção de filosofia como atividade e não como teoria, questionando a filosofia como uma disciplina acadêmica e redirecionando-a para a prática.

Segundo Moreno (2005), essa concepção de filosofia como atividade se mantém ao longo da vida de Wittgenstein, contudo, com algumas diferenças. Após o *Tractatus*, a atividade filosófica deixa de ser crítica e torna-se terapêutica, incidindo não mais na expressão linguística do pensamento, mas no pensamento expresso linguisticamente (Moreno, 2005). Isso significa que não é mais a linguagem que será criticada com base em um modelo lógico, mas o pensamento é colocado como foco da terapia e tratado por meio de uma descrição dos usos da linguagem.

O termo terapia é empregado por Wittgenstein em um sentido metafórico, uma vez que o filósofo trata os problemas filosóficos como uma *doença* e a prática filosófica inaugurada por Wittgenstein, consiste, como aponta Moreno (2005, p. 229), "essencialmente em um tratamento visando à cura do pensamento dogmático" e a depender do tipo de doença, um determinado tratamento é designado. Diante disso, em contraposição a um método filosófico genérico e essencialista, a terapia filosófica adequa os seus procedimentos ao problema filosófico que o filósofo quer tratar.

Ao buscar apreender a essência de nossos conceitos, algo que seja comum a tudo que chamamos, por exemplo, de *jogos*, Wittgenstein faz uma indicação de como proceder: "não pense, mas olhe!" (Wittgenstein, IF, § 66), estabelecendo, como indica Moreno (2005), uma analogia entre *olhar* e a atividade de descrição de usos da linguagem, em contraste com a analogia entre *pensar* e a atividade de produção de teses. Essa máxima wittgensteiniana é elucidativa para compreender o modo como a atividade filosófica é concebida e praticada por Wittgenstein, principalmente após o *Tractatus*. Para ele, contrapondo-se às tradições filosóficas, a atividade filosófica não deve propor teses, mas "*compreender* algo que já está aberto diante de nossos olhos. Porque, em um certo sentido, é *isto* que parecemos não compreender" (Wittgenstein, IF, § 80).

A terapia incide na cura do pensamento, ao deixar-se guiar por determinadas imagens que conduzem a uma aplicação unilateral de nossos conceitos, isto é, do que Wittgenstein denomina de *dieta unilateral*: "Uma causa principal das doenças filosóficas – dieta unilateral: alimentamos nosso pensar só com uma espécie de exemplos" (Wittgenstein, IF, § 593). O esclarecimento almejado pela terapia não visa uma reforma da linguagem, pela proposição de termos substitutos que pudessem evitar as confusões conceituais, mas trata-se de um esclarecimento das significações dos conceitos, de tal modo que os problemas filosóficos deixem de açoitar o pensamento. Trata-se, portanto, de uma descrição dos usos da linguagem, com a finalidade de chamar a atenção para possíveis confusões criadas pelo pensamento ao se desconectar da linguagem.

Essa descrição busca propiciar uma *visão panorâmica* a respeito do que se pode dizer dos conceitos, por meio da variação das circunstâncias de uso, com a finalidade de mostrar diferentes modos de ver a sua aplicação, permitindo modificar a direção única e inflexível de interpretação proposta pelo ponto de vista dogmático[9].

A *visão panorâmica* consiste em organizar os fatos expressos na linguagem,

---

[9] O uso dogmático de um conceito surge quando generalizamos um uso particular de um conceito, projetando sua gramática para outras situações em que empregamos esse mesmo conceito. Nesse ponto de vista dogmático, todos usos de um conceito são obrigados a 'encaixar-se' em um sistema de regras que regem um uso particular, dirigindo nosso pensamento em uma única direção, um único modo de interpretar os conceitos. Esta é a força de determinadas imagens que quando empregadas dogmaticamente tem a aparência de "não podemos imaginar o contrário" (Moreno, 1995).

de tal modo que possamos enxergar as gramáticas[10] constituídas em nossos usos linguísticos, evitando a aplicação exclusivista de uma determinada imagem gramatical sobreposta a outras tantas possíveis. Possibilita-se tal visão por meio de uma atividade essencialmente descritiva, que cumpre uma função terapêutica, ao indicar modos de ver as coisas, através da proposição de exemplos, analogias e diferentes situações de uso para que possamos eventualmente lançar um olhar diferente e superar a resistência de vontade de querer ver de uma única maneira o funcionamento da linguagem. A descrição gramatical tem para Wittgenstein um papel de persuadir o interlocutor a vencer a sua resistência de vontade, que causa a dificuldade de compreensão (Wittgenstein, BT).

A descrição gramatical incorpora novos aspectos, quando Wittgenstein faz uma analogia entre jogos e linguagem, introduzindo a noção de *jogos de linguagem*, aparentemente em março de 1932 (Almeida, 2020). Os jogos de linguagem podem ser entendidos como atividades guiadas por regras, como exemplifica Wittgenstein: “ordenar, e agir segundo as ordens [...] descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas [...] resolver uma tarefa de cálculo aplicado [...] pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar” (Wittgenstein, IF, § 23). Nessa concepção, a linguagem passa a ser caracterizada pela variedade de jogos de linguagem com os quais agimos em nossas formas de vida. Palavras, ações, objetos empíricos, pensamentos, gestos e interlocutores estão conectados em nossas práticas linguísticas na forma de jogos de linguagem.

Em contraste com uma atitude filosófica que busca estabelecer limites precisos e exatos dos conceitos, Wittgenstein procura mostrar com os jogos de linguagem a vagueza intrínseca aos conceitos, em que o significado de uma palavra não é único e fixo, mas diferentes significados podem ser identificados ao olhar para os diferentes jogos de linguagem em que essa palavra é usada. Por exemplo, se queremos saber o significado da palavra *jogo*, temos que olhar os diferentes usos dessa palavra, vejamos os jogos de tabuleiro, os jogos de cartas, o jogo de bola, os jogos de combate etc. Não há, segundo Wittgenstein, algo comum a todos, mas semelhanças, parentescos que aparecem e outras que desaparecem conforme comparamos dois ou mais jogos entre si, formando “uma complicada rede de semelhanças que se sobrepõem umas às outras e se entrecruzam. Semelhanças em grande e pequena escala”

[10] O termo gramática é entendido por Wittgenstein, segundo Almeida (2009, p. 3), como a organização do material empírico de acordo com um sistema de ligações internas que surgem na cultura voltado para determinados propósitos práticos, que se traduz “como normas de aplicação, como regras, que podem ser representadas para o usuário numa visada geral que facilite a sua descrição”. Para Moreno (2005, p. 279) argumenta que a gramática na filosofia de Wittgenstein pode ser caracterizada como a “cristalização de regras conceituais cuja expressão empírica é realizada pela linguagem, esse mesmo conjunto de regras não envolve, todavia, a linguagem como fenômeno empírico, com suas organizações acústico-articulatórias e fonético-fonológicas”.

(Wittgenstein, IF, § 66). O significado de uma palavra está na maioria dos casos, segundo Wittgenstein (IF, § 43) no seu uso na linguagem. Estes usos guardam semelhanças entre si, assim como guardam semelhanças, em um sentido metafórico, os traços fisionômicos de uma família, semelhanças estas denominadas por Wittgenstein (IF, § 67) de *semelhanças de família*.

Moreno (2005, p. 253) argumenta que os jogos de linguagem constituem os novos sistemas de referência utilizados por Wittgenstein em sua atividade terapêutica, são "usados como critérios arbitrários, dentre outros, que o terapeuta sugere para produzir analogias e ressaltar diferenças entre as significações descritas" e possuem uma função terapêutica, na medida em que são empregados como *objetos de comparação* e devem lançar luz, por semelhança e diferenças, nas relações de nossa linguagem.

Para evitar a aplicação dogmática de determinadas interpretações conceituais de caráter gramatical aplicadas de formas unilaterais e exclusivas, Wittgenstein recorre a exemplificação como um procedimento da *descrição gramatical* considerando, mediante a noção de jogos de linguagem, a multiplicidade de usos de nossas expressões linguísticas. A exemplificação, segundo Moreno (1995):

> Tem por finalidade fornecer uma "visão panorâmica" (*übersehen*) dos usos das palavras, mostrar as "conexões" (*Zusàmmenhänge*) entre jogos de linguagem aparentemente muito afastados entre si. Ao ver que existem proximidades, por semelhanças, entre, por exemplo, jogos de linguagem matemáticos e jogos com conceitos de cores e de sensações, desfazem-se as imagens que nos levam a acreditar na exatidão de certos conceitos, e assim a interpretar sua significação postulando entidades extralinguísticas. A exemplificação não supõe, todavia, que através dos diversos exemplos seja revelada uma propriedade comum a todos eles, que forneceria a ligação rígida usando os diferentes jogos de linguagem. Pelo contrário, com a exemplificação, Wittgenstein cria, por *analogia*, situações em que reconhecemos ainda os mesmos usos das palavras, através de analogias, pois, como diz ele, ao considerar as "'possibilidades' dos fenômenos" podemos refletir melhor sobre o "*modo das asserções*" que fazemos sobre os fenômenos" (Moreno, 1995, p. 114).

Por meio da criação de analogias de situações de uso das palavras e de elos intermediários, Wittgenstein procede em direção a uma *visão panorâmica* acerca dos usos das palavras, que consiste, para Moreno (1995, p. 114), em "ver como funcionam e, também, como funcionariam nossas palavras nas mais diversas situações – mesmo em situações fictícias onde, todavia, ainda reconhecemos usos admissíveis para nossos conceitos, e usos que não mais estamos dispostos a admitir".

Estruturar uma visão panorâmica da aprendizagem em atividades de modelagem matemática envolve ver como a aprendizagem se dá em diferentes jogos de linguagem que permeiam as ações dos estudantes. Isso implica em considerar a aprendizagem de formas associada com as práticas de uso da linguagem, como discutido na próxima subseção.

2.2 Aprendizagem na perspectiva filosófica de Wittgenstein

Na perspectiva wittgensteiniana, o conceito de aprendizagem se constitui nas discussões sobre a relação entre linguagem, pensamento e mundo e, em consequência, está associado ao modo como adquirimos conhecimento e a sua natureza. Em seus escritos tardios, Wittgenstein endereça uma crítica à concepção de linguagem como um espelho do mundo e sugere que essa relação se constitui na dinâmica dos jogos de linguagem. Sob essa ótica, olhar para a aprendizagem implica em olhar para o modo como aprendemos, ou adquirimos conhecimento, em jogos de linguagem e a respeito de que condições tornam possível essa aprendizagem.

Wittgenstein não estava interessado em elaborar uma teoria da aprendizagem. Suas reflexões, de natureza terapêutica, buscavam chamar a atenção para confusões conceituais que surgem ao postular a necessidade de experiências empíricas ou processos mentais como condições da aprendizagem, pressupondo a existência de fundamentos extralinguísticos no mundo mental, ideal ou empírico. Ao trazer de volta a atenção para o papel que a linguagem desempenha na aprendizagem, Wittgenstein nos mostra que aquilo que torna possível a aprendizagem e a significação encontram sua origem nas práticas de uso da linguagem em uma comunidade, que se constituem nos modos de agir comuns e regulares dos seus usuários.

As práticas de uso são, por um lado, governadas por regras, que orientam nossas atividades linguísticas em diferentes jogos de linguagem e formam os critérios de aplicação de expressões linguísticas. Por outro lado, essas mesmas regras são constituídas na regularidade dos modos de agir no interior dessas práticas, agimos de determinadas formas e é isso que forma a justificativa para seguirmos de determinada maneira uma regra, como diz Wittgenstein, "[...] se esgotei as justificativas, cheguei então à rocha dura, e minha pá se entorta. Estou inclinado a dizer então: 'É assim mesmo que ajo'" (Wittgenstein, IF, § 217). As práticas de uso, como aponta Oliveira (2014), ao mesmo tempo que elas formam um sistema de referência, são elas derivadas desse sistema. Isso encerra a busca por fundamentos últimos extralinguísticos que poderiam condicionar os jogos de linguagem e, portanto, a possibilidade de aprendizagem, uma vez que o solo no qual repousam esses jogos é de caráter convencional, formado por modos de agir regulares em práticas de uso. Nesse ponto, Wittgenstein indica que "é o nosso agir que se encontra na base do jogo de linguagem" (Wittgenstein, DC, § 204).

Sob essa ótica, aprender envolve ser iniciado em um jogo de linguagem. Isso significa que aprender pode ser entendido como ser capaz de agir *regularmente* em novas situações de acordo com uma prática de uso de uma comunidade ou forma de vida. Aprender um conceito ou algo de natureza procedimental implica em aprender suas regras e segui-las em um ou mais jogos de linguagem. Isso se dá mediante a um treinamento ou adestramento[11] (*Abrichtung*), como sugere Wittgenstein (Z, § 318), "não consigo descrever como (em geral) aplicar regras, exceto ensinando-te, treinando-te a aplicar regras". É por meio de um treinamento que adquirimos não somente um conjunto de técnicas para o emprego de regras, mas também um sistema de referência segundo o qual agimos e julgamos. O treinamento, para Gottschalk (2013, p. 68), é "um modo de se apresentar regularidades nas mais diferentes áreas do conhecimento. É o fundamento para que se possa seguir uma regra, condição inicial para a atribuição de sentidos aos fatos do mundo, ou seja, para que haja conhecimento".

As regras indicam modos de agir comuns de nossa forma de vida, elas não se referem a nada, apenas orientam nossas ações. Utilizando uma analogia de Wittgenstein (IF, § 85), elas funcionam como placas de orientação tal como as placas de trânsito que não nos obriga a traçar determinado trajeto para percorrer um caminho, mas orientam nossas ações no decorrer desse caminho para não infringirmos as leis de trânsito. Agimos de determinadas maneiras em um jogo de linguagem, porque fomos treinados a agir desta maneira, de acordo como um modo de agir comum entre os sujeitos que fazem parte de uma forma de vida. Em outro jogo de linguagem, uma mesma regra poderia ser seguida de outra maneira.

Duas pessoas que reagem diferente a uma ordem podem estar com a razão, dependendo do jogo de linguagem que estão seguindo a ordem. O que explica o fato de agirmos de determinadas maneiras e não outras perante a uma ordem, ou uma regra, em um jogo de linguagem é porque há *regularidade* nos usos da linguagem e isso não significa uniformidade. Para Wittgenstein (IF, § 199), "seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez, são hábitos (usos, instituições)". No parágrafo 208 do *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein fornece um exemplar de como treinar o aprendiz em relação ao conceito de regularidade:

> Desta maneira, é com o conceito "regularidade" que esclareço o que quer dizer "ordem" e "regra" – Como explicar para alguém o significado de "regular", "uniforme", "igual"? – Para alguém, digamos, que só fala francês, vou explicar essas palavras mediante outras palavras francesas correspondentes. Mas, quem não possui

---

[11] Entre os interpretadores de Wittgenstein no âmbito da filosofia da educação, não há um consenso acerca do uso termo *Abrichtung*[11] nos escritos de Wittgenstein e suas implicações no processo de aprendizagem. Alguns autores que fazem uma leitura social, consideram que o treinamento é o meio pelo qual o aprendiz adquire a competência normativa de uma prática social e passa a fazer parte da comunidade subjacente a essa prática, o que pressupõe uma cortesia estendida pelo professor ao aprendiz (Williams, 1994; Stickney, 2020). Para a leitura individualista, o treinamento pressupõe uma racionalidade *a priori* e inata do ser humano que faz parte de sua história natural e o torna capaz de apreciar padrões estéticos (Luntley, 2017). Uma terceira via de interpretação considera que o treinamento não pressupõe essa racionalidade *a priori*, mas olha para a aprendizagem a partir da constituição da significação dos conceitos, de um ponto de vista pragmático (Gottschalk, 2020; Moreno, 2018).

> ainda esses conceitos, vou ensiná-lo a usar as palavras mediante exemplos e exercícios. – E não vou lhe transmitir menos do que eu mesmo sei.
> Nesta instrução vou lhe mostrar, portanto, as mesmas, cores, os mesmos comprimentos, as mesmas figuras, vou fazê-lo encontrá-las e produzi-las etc. Vou instruí-lo a dar continuidade a ornamentos em série, "uniformemente", seguindo uma ordem. – Além disso, vou instruí-lo a dar continuidade a progressões. E assim, por exemplo, seguindo . .. ... continuar assim: ....
> Mostro-lhe como se faz, ele faz como lhe mostro; e eu influencio mediante manifestações de consentimento, de rejeição, de expectativa, de animação. Deixo-o fazer, ou impeço-o de fazer, etc (Wittgenstein, IF, § 208).

É mostrando os usos da palavra 'regularidade' em diferentes jogos de linguagem que gradualmente, por semelhanças e dessemelhanças de família, sua significação é constituída. Ao seguir esse movimento, esses usos se cristalizam em regras que formam a sua gramática que estabelece os critérios de aplicação dessa palavra. É por meio do treinamento que o aprendiz se conecta com a gramática do conceito aprendido, delimitando, segundo Moreno (2005, p. 281), "o campo da significação conceitual, campo vago, por estar inserido em formas de vida, que dependerá de decisões arbitrárias para tornar exatos e precisos os seus limites". Ao adquirir a gramática relativa aos usos de uma palavra, o aprendiz passa a identificar em que situações (empíricas) faz sentido ou não aplicar essa palavra como um conceito. Essa fase do treinamento, exige, no entanto, uma preparação para o uso da linguagem que ocorre em jogos de linguagem primitivos, como aquele em que uma criança aprende o nome das coisas, por exemplo.

Nessa fase elementar, pode-se ensinar a criança a cor verde, apontando-se com um gesto ostensivo para um objeto, um carro verde, enquanto se pronuncia "isto é verde". É isso uma explicação da cor vermelha ou do nome do carro? Para Wittgenstein, "a definição ostensiva pode, em *cada* caso, ser interpretada de um modo ou de outro" (IF, § 28). Para que a criança entenda o uso da palavra 'verde' como nome de uma cor por definição ostensiva é preciso que o lugar dessa palavra já esteja preparado. Essa preparação para o uso é feita mediante ao que Wittgenstein denomina de ensino ostensivo[12] e faz parte do treinamento, em que se pode mostrar para essa criança vários objetos com a cor verde, até que ela aprenda a associar a palavra verde a um determinado aspecto desses objetos. Ela aprende técnicas, que envolvem sons, ações e objetos construídos no interior de um jogo de linguagem, que orientam como aplicar sons como palavras para, por exemplo, ordenar, chamar, comunicar, pedir, executar tarefas, entre outros. É isto que o indivíduo deve saber para nomear um objeto ou, em outras palavras, colar uma etiqueta em um objeto. Somente após ter aprendido a técnica de

---

[12] Por meio do ensino ostensivo propõe-se a substituição de objetos por nomes, "Isto chama-se verde" e, pela definição ostensiva, podemos identificar objetos pelos seus nomes, através da definição do seu significado "verde é uma cor".

etiquetagem com palavras, o aprendiz pode perguntar pelo sentido e compreender uma definição ostensiva.

Elementos do mundo tornam-se parte da linguagem a partir de técnicas preparatórias para o uso da linguagem, como a introdução de paradigmas, gestos ostensivos e amostras. O paradigma, argumenta Moreno (1995, p. 18), "corresponde a uma técnica de uso da linguagem em que são ativados palavras e objetos previamente organizados através de outras técnicas". Por exemplo, várias amostras de cor para a aplicação da palavra "verde", comportamentos de alguém que sente "dor" para a aplicação da palavra "dor", o objeto lajota para a aplicação da palavra "lajota", podem ser escolhidos ou construídos como objetos e serem apresentados como paradigmas para o uso das palavras. Ao serem introduzidos como paradigmas na linguagem, os objetos passam a cumprir a função de regras ou normas para o uso de palavras e, com isso, se tornam instrumentos da linguagem. Ao preparar o lugar para o uso das palavras estabelece-se condições de possibilidade para a significação dos conceitos. Segundo Moreno (2018, p. 45-46), "podemos dizer que é nesta fase inicial que um indivíduo se torna um aprendiz, ou seja, ele ou ela entende e aprende, e torna-se capaz de saber como agir de acordo com as instruções".

Esse primeiro nível do treinamento para o autor é "condição lógica para aprender novas regras, poder fazer comparações com familiaridade, de fato, para ter a experiência do significado – ou seja, de aspectos ou de relações internas" (Moreno, 2018, p. 39). Em um segundo nível do treinamento, o aprendiz domina a gramática do uso da palavra e pode passar a empregá-la em novas situações de uso, até mesmo situações inusitadas, de acordo com as regras aprendidas. Ele forma, por assim dizer, uma gramática interna ao sujeito, não como uma entidade metafísica que habita dentro de nós, mas como caracteriza Gottschalk (2020, p. 5), "um sistema aberto de crenças que desempenha o papel de condições para atribuição de sentido ao que observamos, dizemos e fazemos". Por meio dessa gramática, o aprendiz passa a empregar as palavras como conceitos, estabelecendo relações de sentido e organizando a experiência empírica. Por exemplo, Moreno (2018) argumenta que ao dizermos "branco é mais claro que preto" estamos nos referindo a uma descrição das propriedades das cores 'branco' e 'preto' e estabelecendo uma relação de sentido entre elas, o que pressupõe que saibamos que se trata de cores, que 'branco e preto são cores'. Essa segunda proposição é denominada por Wittgenstein como proposição gramatical, tem uma função normativa, ela funciona como condição para atribuição de sentido à primeira proposição, de caráter empírico.

As proposições gramaticais se constituem a partir de certezas que temos em nossas formas de vida, tais como "os objetos físicos existem", "eu existo", "só eu sinto minhas dores”, entre outras. Essas certezas são condições operatórias dos jogos de linguagem e, portanto, sua assimilação é condição para aprender uma linguagem. Elas não podem ser postas em dúvidas, uma vez que, na perspectiva wittgensteiniana, “o próprio jogo da dúvida já pressupõe a certeza” (Wittgenstein, DC, § 115). No *Da Certeza*, Wittgenstein apresenta uma situação envolvendo um professor e um aluno para exemplificar um caso em que a dúvida ainda não faz sentido.

> Um aluno e um professor. O aluno não deixa que nada seja explicado, pois ele interrompe continuamente (o professor) com dúvidas como, por exemplo, sobre a existência das coisas, sobre o significado das palavras, etc, O professor diz: “Não me interrompas mais e faz o que te digo; as tuas dúvidas ainda não fazem qualquer sentido (Wittgenstein, DC, § 310).

Para aprender a jogar um jogo de linguagem é preciso, antes de tudo, que o estudante aceite algumas certezas, sem colocá-las em dúvida. Por exemplo, aprender conceitos envolvidos na Geometria Euclidiana, pressupõe que os axiomas constituintes dessa geometria sejam aceitos. Em outro parágrafo mais adiante no *Da Certeza*, Wittgenstein diz “[...] as *perguntas* que fazemos e as nossas *dúvidas* apoiam-se em certas proposições que são excluídas da dúvida, como dobradiças sobre as quais aquelas se movem” (Wittgenstein, DC, § 341). Tais proposições são resultado de determinadas crenças que se tornam ‘firmes’ no decorrer das práticas de uso da linguagem, sugere o filósofo:

> A criança aprende a acreditar num monte de coisas. Quer dizer, ela aprende, por exemplo, a agir de acordo com essas crenças. Pouco a pouco, forma-se um sistema de coisas em que se acredita, e, nele, algumas são incrivelmente firmes, outras estão mais ou menos sujeitas a alteração. O que é firme não o é porque seria em si mesmo óbvio ou evidente, mas, sim, porque é fixado pelo que está ao seu redor (Wittgenstein, DC, § 144).

Nossas certezas não são explicitamente aprendidas, mas elas são adquiridas no decurso da aprendizagem de outras coisas, quando, por exemplo, agimos. Nas palavras de Wittgenstein (DC, § 476), “as crianças não aprendem que há livros, que há poltronas, etc., etc., mas sim aprende a ir buscar livros, sentar-se em poltronas, etc,”. Essas certezas são como que ‘engolidas’ pelo aprendiz, elas são adquiridas tacitamente de forma gradual, enquanto fazemos usos das nossas expressões linguísticas, formando nosso sistema de referência, nossa imagem de mundo (*Weltbild*), com o qual organizamos nossa experiência, indagamos, questionamos, afirmamos e investigamos, por exemplo. Assim, as certezas que adquirimos tacitamente ou ‘engolimos’ enquanto agimos de acordo com crenças, formam o solo convencional em que repousa as condições de possibilidade de aprendizagem.

Sob essa perspectiva, a aprendizagem pressupõe a assimilação de um sistema de referência constituído por elementos normativos relativos a determinadas certezas que vão sendo construídas ao aprender a fazer algo. Segundo Wittgenstein (DC, § 45), "conhecemos a natureza do cálculo ao aprender a calcular", não sendo necessário explicitar uma definição da natureza do cálculo para essa aprendizagem. São nossas práticas e modos de agir que, de acordo com Gottschalk (2013, p. 67), "vão formando o substrato do nosso conhecimento sobre o mundo, ou seja, são a base de nossos julgamentos do que consideramos verdadeiro ou falso".

Com a noção de certeza associada à nossas práticas de uso, Wittgenstein dissocia os processos psicológicos e mentais, bem como determinados comportamentos, como condições básicas para a aplicação de regras e, consequentemente, para a aprendizagem, uma vez que essas condições são públicas e se cristalizam na linguagem.

Aprendemos as coisas, antes de tudo, como uma norma e isso significa que passamos a dominar uma maneira de pensar e agir em uma prática de uso. Aprender, para Oliveira (2014), "consiste em passar a agir de acordo com a normatividade que essa certeza reflete". Nesse sentido, ser inserido um jogo de linguagem pressupõe o domínio de um conjunto de técnicas, mediante a um treinamento, cuja condição é a assimilação de um sistema de referências fundada em certezas cristalizadas a partir de nossos modos de agir em práticas de uso.

2.3 A NATUREZA DAS PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA FILOSÓFICA DE WITTGENSTEIN

Questões ontológicas e epistemológicas acerca dos objetos e do conhecimento matemático são centrais na filosofia da matemática e desencadearam, ao longo da história da filosofia, diferentes correntes, como a Logicista, Formalista e Intuicionista, e vertentes filosóficas fundadas no realismo e no idealismo. Wittgenstein não estava interessado em elaborar uma tese filosófica acerca da matemática, tampouco ser rotulado em qualquer uma das correntes já existentes. Para ele, a filosofia deixa a matemática como está (Wittgenstein, IF, § 124). Seu interesse era terapêutico, se dirigia às confusões conceituais sobre os fundamentos da matemática, que surgem da ideia de que as proposições matemáticas descrevem objetos pertencentes a um reino mental, empírico ou ideal, independente da linguagem. Ao matemático cabe apenas descobrir esses objetos.

Para Wittgenstein, o problema se origina ao não considerar que as proposições da linguagem desempenham diferentes funções a depender dos seus usos na linguagem. Em particular na matemática, quando se considera que a verdade e o significado das proposições matemáticas se dão em uma realidade matemática independente de nossas práticas linguísticas. Partindo dessa perspectiva filosófica, busca-se discutir nesta seção: Qual é a natureza das proposições matemáticas? De que modo as proposições se tornam matemáticas? Como as proposições matemáticas se relacionam com as proposições acerca do mundo? Que implicações pedagógicas a perspectiva filosófica de Wittgenstein acerca da matemática tem para a aprendizagem matemática?

A matemática é, segundo Wittgenstein, uma invenção humana (RFM, I, § 168) e, portanto, não descoberta. Com essa afirmação, o filósofo distingue a matemática das ciências naturais e se afasta de imagens realistas e idealistas, uma vez que o trabalho do matemático não consiste em descobrir objetos existentes previamente.

A princípio, uma mesma proposição, ainda que contenha símbolos matemáticos, pode ser empírica ou matemática, a depender do seu uso. Por exemplo, a proposição 25 X 25 = 625, sozinha, não se refere a nada. Como o próprio Wittgenstein indica, "uma proposição matemática só adquire significado a partir do cálculo em que está inserida. O uso que podemos fazer dessa regra depende inteiramente do sistema matemático no qual ela está inserida" (LFM, p. 137). Podemos imaginar, em um determinado contexto, que essa proposição seja utilizada para contar o número de maçãs distribuídas em 25 caixas, com 25 maçãs em cada caixa. Nesse caso, essa proposição é empírica se não possui a força da necessidade e emprega-se uma técnica de contagem de uma determinada prática cotidiana. Por outro lado, a proposição é matemática se há uma definição ou uma prova, que estabelece um uso normativo, 25x25 *deve ser igual* a 625, não sendo passível de refutação ou confirmação por uma experiência empírica, no caso de algumas maçãs dessa caixa serem retiradas ou acrescentadas.

Com a noção de jogos de linguagem, Gerrard (1991, p. 126) sustenta que "significado e verdade podem ser explicados apenas no contexto de uma prática, e a matemática é examinada a partir do seu papel especial que ela desempenha em nossas vidas e sua relação especial com outros jogos de linguagem". As proposições matemáticas desempenham o mesmo papel que as proposições gramaticais da linguagem ordinária, elas são regras que, conforme Moreno (1995, p. 74), são usadas como "critério para selecionar – excluir ou admitir – outras proposições". A necessidade e a evidência dessas proposições, pondera esse autor, "não residem nos conteúdos expressos pelas proposições, mas nos usos que delas fazemos, na função que convencionamos reservar-lhes em nossos discursos" (Moreno, 1995, p. 79).

As proposições matemáticas se distinguem das proposições empíricas, na medida em que não descrevem algo, mas exercem uma função normativa, são regras a serem seguidas. Proposições empíricas podem ser verdadeiras ou falsas à luz de observações empíricas, já as proposições matemáticas são definidas ou provadas, independentemente desse tipo de observação. Estas são aplicadas em um tom de certeza que se expressa em uma atitude (Wittgenstein, DC, § 404) e são vistas como necessárias, 25x25 *deve ser igual* a 625. A força da necessidade aqui se dá por convenção, acordos estabelecidos no interior de uma determinada forma de vida e não por fundamentos extralinguísticos. Esses acordos não dizem respeito somente às definições, como afirma Wittgenstein (IF, § 242), mas também a uma concordância nos juízos e "isto parece abolir a lógica; mas não o faz. – uma coisa é descrever o método de medida, outra coisa é achar e dizer os resultados da medição. Mas o que chamamos "medir é determinado também por uma certa constância dos resultados de medição". De modo similar, o filósofo aponta que "é essencial para o cálculo que todos que calculam corretamente produzam o mesmo padrão de cálculo. E 'calcular corretamente' não significa calcular com um entendimento claro ou sem problemas; significa calcular assim" (RFM, VII, § 31). Calcular assim é, digamos, um determinado modo de aplicar uma regra, que pode ser feito de modo correto ou incorreto de acordo com um critério de correção estabelecido por uma prova matemática. "Cada prova matemática dá ao edifício matemático uma nova perna para se apoiar. (Eu estava pensando nas pernas de uma mesa)" (RFM, VII, § 31).

Uma prova mostra um procedimento, um modo de se operar com regras e estabelecem o papel de uma proposição matemática no interior de um sistema matemático. Se diferencia de um experimento, pois não envolve relações causais entre aspectos empíricos e regras, mas mostra a existência de uma relação interna, que pode ser entendida em Wittgenstein, como "a operação que produz uma estrutura a partir da outra, vista como equivalente à imagem da transição, propriamente dita – de modo que agora a transição segundo essa série de configurações é uma transição *eo ipso* segundo aquelas regras de operação" (RFM, VII, § 31). Por exemplo, suponha que alguém encontre uma solução, por tentativa e erro, para $x^2 + y^2 = 25$, substituindo valores para x e y nessa equação até obter $3^2 + 4^2 = 25$. Esses resultados não provam que são uma solução da equação, isto é, a experimentação não pode ser uma prova para essa proposição matemática. Uma prova matemática estabelece relações internas entre a equação $x^2 + y^2 = 25$ e os pontos de uma circunferência de raio com medida igual a 5, determinando um modo de operar com essas regras e produzindo, com isso, um novo conceito: pode-se ver agora o conjunto solução da equação $x^2 + y^2 = 25$ como o conjunto de pontos que equidistam 5 unidades de medida de um ponto fixo, localizado, por exemplo, na origem de um sistema cartesiano no plano.

Segundo Wittgenstein, ao produzir um conceito, a prova exerce um papel de convencimento e "aquilo de que me convence está expresso na proposição que provou"

(RFM, VII, § 72). A prova neste caso atua como imagem, é um instrumento para produzir convicção, e a proposição matemática, ao ser provada, nos diz "prossiga dessa forma!" (RFM, VII, § 72). É nesse sentido que Wittgenstein sugere ver a matemática como uma "rede de normas", a partir da ideia de que o matemático forma conceitos e "os conceitos nos ajudam a compreender as coisas. Correspondem a uma forma particular de lidar com as situações" (RFM, VII, § 67).

Moreno (1995, p. 57) argumenta que as provas matemáticas introduzem paradigmas em nossa linguagem, "preparações [...] para a construção de descrições específicas dos fatos: com os paradigmas matemáticos entramos em acordo a respeito das formas de descrição sem, entretanto, nada descrever". Essas formas são expressas em proposições matemáticas que, quando aceitas, ao serem aplicadas possuem consequências efetivas nas descrições (Moreno, 1995). Sob essa perspectiva, Gottschalk (2023, p. 13) argumenta que "distanciando-se de um mero jogo [de xadrez, por exemplo], a matemática pode ser vista como jogos de linguagem que eventualmente *organizam* a experiência empírica de determinadas formas, ou seja, parte da matemática pode ter *uso empírico* em determinados circunstâncias".

Matemática não é um mero jogo, digamos de signos, uma vez que não envolvem somente a operação de regras para manipulação de signos. De acordo com Wittgenstein, os jogos de linguagem não têm somente regras, mas tem também uma finalidade (Wittgenstein, IF, § 564). Os jogos de linguagem matemáticos se constituem de regras que orientam nossos modos de agir em diferentes situações, seus conceitos são vazios, eles adquirem significado na sua aplicação, ao serem provados e expressos em proposições matemáticas que organizam a experiência de uma determinada forma e conforme uma determinada finalidade. É, seguindo essas características a respeito da importância do uso empírico que parte da matemática tem, que Wittgenstein argumenta que "quero dizer: é essencial para a matemática que seus signos também sejam empregados no civil" (RFM, V, § 2). Isso não quer dizer que o uso empírico seja o único para a constituição de significados das proposições matemáticas, uma vez que os matemáticos inventam novas formas de descrição, estimulados por diversas finalidades, alguns por necessidades práticas, outros para o próprio desenvolvimento teórico da matemática.

Nas palavras do próprio Wittgenstein (RFM VII, §33), a matemática pode ser entendida como "uma família; mas isso não quer dizer que não devemos nos importar com o que está incorporado a ela". A analogia com uma família sugere que na matemática há diversos jogos de linguagem, alguns mais próximos da matemática pura e outros da matemática aplicada, conectados entre si por semelhanças de família, cujas relações são internas e estabelecidas mediante a regras e o uso de técnicas matemáticas convencionadas, de acordo com diferentes finalidades.

As aplicações da matemática em situações empíricas não são imediatas, mas são, como pondera Gottschalk (2023, p. 15), mediadas "por jogos de linguagem, que precisam ser aprendidos, suas regras são condições para que possamos descrever o mundo empírico com sentido em diferentes contextos de aplicação". A autora mostra que os sentidos dos enunciados matemáticos podem variar em função do seu uso, a partir do seguinte exemplo:

> Nem sempre a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Por exemplo, se um físico quiser medir distâncias subatômicas, provavelmente utilizará uma geometria não euclidiana, como a de Lobachevsky (hiperbólica). Nesta geometria, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º! Enquanto um físico que pretenda fazer cálculos astronômicos poderá utilizar a geometria de Riemann (elíptica ou esférica), onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos (Gottschalk, 2023, p. 15).

Ao conceber a matemática sob essa perspectiva, algumas implicações pedagógicas podem ser tecidas acerca da aprendizagem matemática escolar. Uma vez que as proposições matemáticas são vistas como necessárias a partir de convenções estabelecidas por acordos em uma comunidade no interior de uma forma de vida, a aprendizagem matemática não pode ser reduzida ao processo de abstração, de intuição ou de experimentação, mas envolve a aprendizagem de técnicas convencionadas que formam as condições para a aplicação das regras matemáticas nas mais variadas atividades matemáticas que os estudantes estão envolvidos.

Cabe ao professor, conforme Gottschalk (2023, p. 17) "apresentar aos alunos as diversas técnicas inventadas pelos matemáticos que fundamentam as atividades propostas em sala de aula, treinando-os o suficiente para que, uma vez dominadas, eles sejam capazes de operar com o saber matemático em novos contextos, não previsíveis". É papel do professor também, segundo a autora, persuadir seus alunos a aceitarem os axiomas, postulados e as definições dos termos dos jogos de linguagem da matemática e, uma vez aceitos, faz-se importante a demonstração de enunciados matemáticos, que comportam uma necessidade, como os teoremas matemáticos para a introdução de paradigmas e conceitos na linguagem.

Para além dos usos internos à própria matemática, a aprendizagem da matemática escolar envolve também ser capazes de usar as proposições matemáticas em outros jogos de linguagem, evidenciado o seu papel na atribuição de sentido e na organização de situações externas à matemática. O uso de atividades de modelagem matemática em ambientes escolares podem ser uma possibilidade para abordar esses usos. Sousa e Almeida (2019, p. 1212), argumentam que no desenvolvimento de atividades desse tipo os jogos de linguagem podem atuar como “fio condutor para a constituição de significados e para a articulação destes com as regras normativas que atuam na gramática dos fenômenos investigados, ou seja, que se constituem como condições para constituição de significados para estes fenômenos”. Almeida e Tortola (2022, p. 239) ponderam que esses jogos de linguagem constituídos no âmbito da modelagem matemática, podem ser vistos como maneiras de fazer matemática e pode nos desvencilhar da “imposição de jogos de linguagem frequentemente praticados nas aulas de matemática e em que a partir da apresentação de uma definição se seguem aplicações e usos daquilo que está sendo definido”.

Dessa maneira, no âmbito de atividades de modelagem, de acordo com Souza (2012, p. 142), a aprendizagem matemática se constitui nos jogos de linguagem, “em que os diversos usos regrados da linguagem configuram os usos gramaticais e procedimentais adotados pelos alunos para organizar a situação-problema presente na tarefa de modelagem”. Tortola, Seki e Almeida (2022, p. 15) argumentam que a modelagem matemática pode romper com a dicotomia empírico|gramatical ao sugerir que no seu fazer, “são reconhecidos regras e modos de agir como um jogo de linguagem que, dentre outros, pode promover a aprendizagem da matemática a partir de um modo de ver a matemática”.

Podemos ver, portanto, os jogos de linguagem como uma ferramenta terapêutica para constituição de um modo de ver a aprendizagem em atividades modelagem matemática. Esses jogos mostram os diferentes usos das proposições matemáticas e das proposições de nossa linguagem ordinária, bem como as suas finalidades subjacentes. Esse olhar direciona-se para a aprendizagem em ação, como ela acontece nas práticas de uso, sob o pressuposto que essas práticas envolvem regras que orientam o fazer modelagem matemática em sala de aula e as circunstâncias envolvidas nos ambientes educacionais envolvidos.

2.4 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Na presente pesquisa, a terapia filosófica wittgensteiniana é empregada como uma atitude de pesquisa, que se difere, segundo Miguel (2015), de outras atitudes metódicas cientificistas, de caráter empírico e verificacionista, que recorrem a métodos genéricos para operar de modo idêntico em todas as situações e a todos os tipos de problemas. Para o autor, a atitude terapêutica é sempre situada e diferenciada, cujos procedimentos são constituídos de maneira singular ao tipo de problema que está sendo investigado.

Embora Wittgenstein, em seus escritos filosóficos, não estivesse interessado no âmbito educacional, as pesquisas na Educação e na Educação Matemática, ao utilizarem a terapia filosófica para deliberar sobre temas, como matemática, competências, aprendizagem, entre outros, mostram a proficuidade de uma atitude terapêutica para compreender seus diferentes usos em diferentes contextos teóricos ou empíricos e, assim, evitar atitudes dogmáticas causadas por uma busca incessante por generalização (Gottschalk, 2015; Miguel, 2015; Silveira; Silva; Teixeira júnior, 2018; Souza; Tamayo; Bento, 2022; Vilela, 2007; Oliveira, 2018). Evita-se, com isso, uma atitude de pesquisa que visa abarcar a totalidade de significações possíveis desses conceitos.

Considera-se que assumir uma atitude terapêutica em direção à estruturação de uma visão panorâmica da aprendizagem em atividades de modelagem se caracteriza pela busca em compreender diferentes modos de ver a aprendizagem, recorrendo-se à descrição gramatical de seus usos em diferentes jogos de linguagem, mostrando-se conexões internas por meio de semelhanças e diferenças, de modo evitar a aplicação dogmática de um único modo de vê-la.

Essa descrição não prossegue com procedimentos padronizados, mas um caminho é traçado a partir das peculiaridades da temática investigada. Nesse caminho, algumas ações flexíveis podem ser realizadas, tendo como inspiração possíveis procedimentos terapêuticos utilizados por Wittgenstein em sua atividade filosófica, valendo-se da descrição e exemplificação.

Em primeiro lugar, segundo Moreno (2005), discorre-se sobre possíveis formas típicas de uso das palavras abordadas para Wittgenstein, como a descrição de como usamos efetivamente a palavra correspondente a um conceito em diferentes situações, sejam elas associadas a teorias, um sistema filosófico ou situações cotidianas.

Em segundo lugar, pode-se recorrer a jogos de linguagem primitivos, como aqueles em que se aprende a aplicar as palavras, com o propósito de avaliar as modificações realizadas nos usos dessas palavras a partir de suas aplicações em situações primitivas e no decorrer das aplicações subsequentes em diferentes situações. Wittgenstein (IF, §77) sugere que diante de uma dificuldade em estabelecer limites precisos para uma palavra, "pergunte-se sempre: Como foi que aprendemos o significado desta palavra? A mão de que exemplos; em quais jogos de linguagem? (Então você verá, facilmente, que a palavra deve ter uma família de significados)". Por exemplo, como aprendemos a palavra *tangente*? Em jogos de linguagem matemáticos, essa palavra pode ser usada em enunciados como *reta tangente a uma circunferência* ou como *função tangente* etc. Em outros jogos, essa mesma palavra pode ter outros significados, como quando dizemos *sair pela tangente*.

Um terceiro procedimento possível é a criação de exemplos fictícios, de caráter inusitado, que tem como objetivo, para Moreno (2000, p. 61), “melhor aprender as nuances dos jogos de linguagem, as múltiplas ligações analógicas entre eles, os diferentes aspectos segundo os quais podem os mesmos jogos ser considerados, para evitar, assim, o enclausuramento dos diversos jogos e a generalização de determinados jogos”, em outras palavras, para evitar o dogmatismo. No decorrer do *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein apresenta diversos exemplos fictícios, como ao considerar a expressão “meu livro tem tantas páginas quanto é a solução da equação $x^3 + 2x - 3 = 0$” (IF, § 513), para mostrar um caso em que compreendemos uma proposição, mas não podemos reconhecer seus sentidos, com a finalidade de colocar em questão o uso exclusivista do termo ‘pensar’, feito no *Tractatus*, como aquilo que faz referência a um sentido determinado.

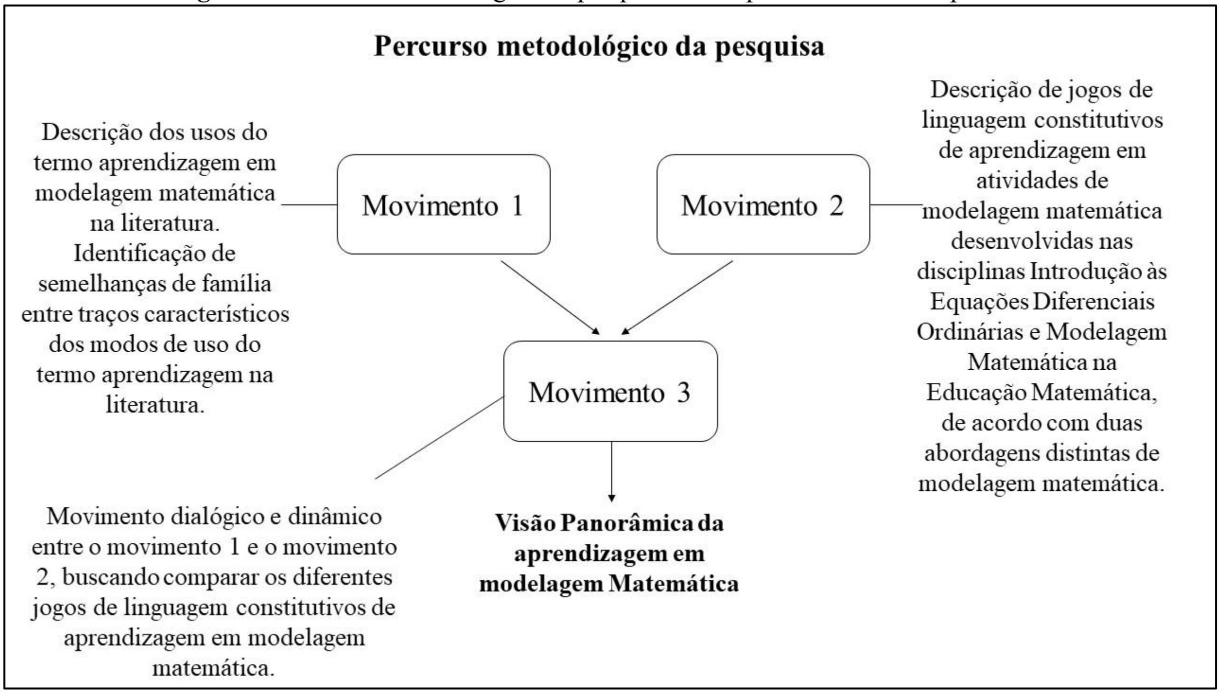
Em quarto lugar, pode-se comparar diversos jogos de linguagem em que a palavra é e pode ser usada. Nesse procedimento, destaca Moreno (2000), que “após haver considerado, com minúcia, os detalhes de cada jogo, o filósofo procura inseri-los no conjunto dos jogos com os quais mantêm ligações de semelhanças, por mais distantes que possam estar entre si”, buscando uma *visão panorâmica* do conjunto dos jogos de linguagem examinados e, com isso:

> ser capaz assim, de libertar-se, pelo menos nos casos em questão, do dogmatismo a que é conduzido pela “dieta unilateral” segundo a qual pensa a linguagem, isto é, libera-se das imagens que forçam o pensamento a uma direção única e persistem como sombras. É o momento da comparação, da apreciação das semelhanças e das diferenças, momento em que as ligações analógicas poderão exercer a cura do pensamento dogmático ao mostrar ao olhar atento as ligações entre os diversos usos das palavras, entre suas aplicações (Moreno, 2000, p. 63).

Os diferentes exemplos e a variação indefinida de situações, aponta Moreno (2005, p. 82), têm por finalidade “introduzir novos pontos de vista, ou novos critérios para a aplicação de nossos conceitos habituais, não para investigar como agiríamos ou como pensaríamos”. Isso não quer dizer que tais formas típicas de uso devam ser empregadas em procedimentos estáticos e rígidos e que se fecham em si mesmos, mas há sempre a possibilidade de estruturar percursos metodológicos diferentes para uma atitude terapêutica. Os próprios jogos de linguagem, como ferramentas terapêuticas, são provisórios e temporais e, portanto, não servem ao propósito de realizar um esclarecimento definitivo.

Diante de tais considerações, o percurso metodológico da presente pesquisa se inspira nesses procedimentos terapêuticos, mas não se organiza de forma definitiva por eles. Opta-se por um percurso que leve em conta as especificidades das situações de uso envolvidas na aprendizagem em atividades de modelagem matemática, sejam elas associadas à literatura ou às práticas pedagógicas, conforme a Figura 1.

Figura 1 - Percurso metodológico da pesquisa e seus procedimentos terapêuticos



Fonte: Os autores.

2.4.1 O percurso metodológico da pesquisa

Assumindo uma atitude terapêutica, o percurso metodológico da pesquisa estrutura-se em três movimentos, detalhados nas próximas subseções.

2.4.1.1 Estrutura metodológica do movimento 1

O movimento 1 se dirige para os usos do termo aprendizagem na área de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Em um primeiro momento, delimita-se a região de inquérito constituída por uma caracterização dos aspectos estruturantes, entendimentos e abordagens dessa área, formando o contexto para o qual olha-se os usos do termo aprendizagem. Em um segundo momento, uma revisão da literatura de artigos submetidos à descrição dos usos do termo aprendizagem na região de inquérito foi realizada, utilizando o método de amostragem intencional conforme Bryman (2012, p. 418), que consiste "em uma seleção estratégica da amostra a ser examinada de modo que ela seja relevante frente às questões de pesquisa definidas".

Na constituição da amostra intencional, faz-se necessário que o pesquisador formule critérios explícitos para a seleção dos materiais relevantes para os propósitos de pesquisa. Na presente pesquisa, recorremos aos seguintes critérios: (1) Uma busca no Portal de Periódicos da CAPES, utilizando a conjunção dos termos "modelagem matemática" E “aprendizagem” no título, de artigos publicados nos últimos cinco anos, com o propósito de selecionar artigos publicados em língua portuguesa; (2) No mesmo portal, buscou-se a conjunção dos termos “*mathematical modelling*” E “*learning*” no título e “*Mathematics Education*” no campo assunto, de artigos publicados nos últimos cinco anos, visando encontrar artigos internacionais publicados em língua inglesa; (3) Foram excluídos da seleção artigos que: apresentam apenas revisões da literatura, mapeamentos, estados da arte e meta-pesquisas; em que o termo aprendizagem é utilizado como adjetivo de outros termos (ambiente de aprendizagem, oportunidades de aprendizagem, módulo de aprendizagem, sala de apoio à aprendizagem; trajetória hipotética de aprendizagem; design de aprendizagem, etc); em que o foco do artigo dirige-se para a aprendizagem de professores em serviço ou formação de professores.

Com esses critérios, foram identificados 21 artigos com o critério 1, 22 artigos com o critério 2, totalizando 43 artigos. Com a aplicação do critério 3, essa quantidade foi reduzida para 22 artigos, identificados no Quadro 1.

Quadro 1 – Artigos identificados no movimento 1

Autores	Título	Revista	ano
Luis Carlos Moura; Deive Barbosa Alves	Modelagem Matemática para a Aprendizagem Significativa Crítica	Rencima	2022
Adriana Helena Borssoi; Karina Alessandra Pessoa da Silva; Elaine Cristina Ferruzzi	Aprendizagem Colaborativa no Contexto de uma Atividade de Modelagem Matemática	Bolema	2021
Jerson Sandro Santos de Souza	Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa: uma Relação Subjacente	JIEEM	2021
Dirceu dos Santos Brito; Lourdes Maria Werle de Almeida	Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria	Revista Actualidades Investigativas en Educació	2021
Yachiko Nascimento Wakiyama; Héctor José García Mendoza	Diagnóstico da aprendizagem por meio da atividade de situações problema discente em modelagem Matemática dos estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Amazonas	Rencima	2021
Silvana Costa Silva; Flaviana dos Santos Silva; Zulma Elizabete de Freitas Madruga	Software Modellus e Modelagem Matemática: um estudo sobre a aprendizagem de função quadrática	Revista Thema	2019
Rogério Fernando Pires; Cássia Silva Costa; Carlos Eduardo Petronilho Boiago	Modelagem matemática para o estudo de função afim: uma possibilidade de aprendizagem a partir da conta de água	INTERMATHS	2020
Silvana Costa Silva; Zulma Elizabete de Freitas Madruga; Flaviana dos Santos Silva	Modelagem Matemática como apoio ao ensino e aprendizagem de função quadrática	Revista de Educação Matemática	2019
Márcia Jussara Hepp Rehfeldt; Italo Gabriel Neide; Wolmir José Böckel; Ana Paula Broilo; Isabel Pisching; Camila Aparecida Heinen; Rosilene Inês König	Modelagem Matemática no Ensino Médio: uma possibilidade de aprendizagem a partir de contas de água	Rencima	2018
Jonnisario Littig; Luciano Lessa Lorenzoni; Oscar Luiz de	A Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e a Teoria da Situação Didática:	Rencima	2019

Teixeira Rezende; Maria Alice Veiga Ferreira de Sousa	identificando aproximações potencializadores da aprendizagem e do desenvolvimento do conhecimento reflexivo		
Elizabeth Gomes Souza; Jonei Cerqueira Barbosa	A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	2019
Samuel Francisco Huf; Dionísio Burak; Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro	Modelagem matemática no ensino e aprendizagem da educação do campo	Revista Educere Et Educare	2021
Samuel Francisco Huf; Dionísio Burak	Modelagem Matemática e relações com abordagens no processo de ensino e aprendizagem no contexto do tema imposto	REVEMAT	2018
Guillermo Ramírez-Montes; Ana Henriques; Susana Carreira	Undergraduate Students' Learning of Linear Algebra Through Mathematical Modelling Routes	Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education	2021
Binyan Xu; Xiaoli Lu; Xinrong Yang; Jiansheng Bao	Mathematicians', mathematics educators', and mathematics teachers' professional conceptions of the school learning of mathematical modelling in China	ZDM	2022
H Khusna; N Y Heryaningsih	The influence of mathematics learning using SAVI approach on junior high school students' mathematical modelling ability	Journal of Physics: Conference Series	2018
James Lowe; Merilyn Carter; Tom Cooper	Mathematical modelling in the junior secondary years: An approach incorporating mathematical technology (Two paper folding activities are used to demonstrate how mathematical modelling and technology can support mathematics learning.)	Australian mathematics teacher	2018
Ricardo Cantoral; Angélica Moreno-Durazo; Mario Caballero-Pérez	Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning	ZDM	2018
Adi Nur Cahyono; Yohanes Leonardus Sukestiyarno; Mohammad Asikin; Miftahudin; Muhammadi Ghozian Kafi Ahsan; Matthias Ludwig	learning mathematical modelling with augmented reality mobile math trails program: how can it work?	Journal on Mathematics Education	2020
Luis Javier López-Reyes; Auria Lucia Jiménez-Gutiérrez; Diana Costilla-López	The Effects of Blended Learning on the Performance of Engineering Students in Mathematical Modeling	Education Sciences	2022
S. Supriadi	Pre-service elementary teachers: analysis of the disposition of mathematical modeling in ethno mathematics learning	Ilkogretim Online - Elementary Education Online	2020
E. Taranto; G. Colajanni; A. Gobbi; M. Picchi; A. Raffaele	Fostering students' modelling and problem-solving skills through Operations Research, digital technologies and collaborative learning	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	2022

Fonte: Os autores.

A descrição dos usos do termo *aprendizagem* na amostra intencional selecionada se guia pelas seguintes questões: Como a aprendizagem é entendida na literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática?; O que se pode inferir das ações dos estudantes relativamente à aprendizagem em atividades de modelagem matemática?; Que relações podem ser estabelecidas entre os entendimentos de modelagem matemática, os entendimentos de aprendizagem e as inferências das ações dos estudantes acerca da aprendizagem em atividades de modelagem matemática nos textos selecionados?

Na primeira questão 'Como a aprendizagem é entendida na literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática?' busca-se descrever os entendimentos de aprendizagem a partir das definições e pontos de vista teóricos utilizados pelos autores em relação ao termo aprendizagem.

No segunda questão 'O que se pode inferir das ações dos estudantes relativamente à aprendizagem em atividades de modelagem matemática?' descreve-se os usos do termo aprendizagem em relação ao conteúdo da aprendizagem e as condições, as abordagens, os meios que levam à aprendizagem em atividades de modelagem matemática, com base em inferências produzidas nos textos a partir das ações dos estudantes nesse tipo de atividade.

Na terceira questão 'Que relações podem ser estabelecidas entre os entendimentos de modelagem matemática, os entendimentos de aprendizagem e as inferências das ações dos estudantes acerca da aprendizagem em atividades de modelagem matemática nos textos selecionados?' busca-se ver relações internas entre os entendimentos de modelagem matemática na Educação Matemática e os outros dois tópicos anteriores de discussão, considerando os traços característicos identificados no decorrer da descrição dos usos, com a finalidade de construir uma tecitura acerca de traços característicos da aprendizagem, que consiste em uma rede de semelhanças de família entre os diferentes modos de uso da aprendizagem na literatura.

2.4.1.2 Estrutura metodológica do movimento 2

O movimento 2 consiste em um olhar para jogos de linguagem em que o conceito de aprendizagem pode ser utilizado, em particular, para aqueles que emergem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em dois contextos no âmbito de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná: a disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, no segundo semestre de 2021; a disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, no primeiro semestre de 2022.

Nos dois contextos, a pesquisa empírica pode ser caracterizada como uma pesquisa de intervenção, na qual o pesquisador atuou como observador participante no planejamento e acompanhamento do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e na aplicação de questionários, em parceria com a professora regente das disciplinas. Ao inserir-se no lócus de pesquisa para a coleta de informações empíricas, as intervenções do pesquisador seguiram um movimento dialético, como caracterizado por Campos e Araújo (2015), em que o pesquisador atuou ora no papel de pesquisador, ora no papel de professor no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Diante dessa caracterização, optamos por denominar o pesquisador como professor-pesquisador e a professora da disciplina como professora-regente.

O primeiro contexto de pesquisa, a disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, foi ofertada no 2º semestre do 2021, 02 de agosto de 2021 a 13 de dezembro de 2021, para alunos do 3º ano do curso, com carga horária de 60 horas distribuídas em quatro aulas semanais, duas na segunda-feira e duas na sexta-feira, período noturno. Devido ao cenário da pandemia de COVID-19, foi necessário transpor as aulas presenciais para a modalidade remota via as plataformas virtuais Google Meet, Google Classroom e WhatsApp.

Na pesquisa empírica realizada nesse contexto, dezoito estudantes matriculados na disciplina participaram da pesquisa. Os alunos foram organizados em quatro grupos para o desenvolvimento de três atividades, cujas temáticas foram: *Salto de Paraquedas*, *Copo térmico para cerveja – funciona?* e *Bungee Rocket*. As duas primeiras voltadas para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem e a terceira envolvendo o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem. Uma característica importante dessas atividades é que os modelos matemáticos foram construídos e apresentados pelo professor-pesquisador aos alunos, junto com os enunciados das atividades, conforme uma abordagem caracterizada na literatura como análise de modelos (Javaroni; Soares, 2012; Soares, 2012, 2015; Soares; Borba, 2011). Para cada atividade, um conjunto de questões orientadoras foi proposta aos estudantes, cujas respostas deveriam integrar o relatório da atividade entregue por cada grupo.

No Quadro 2, são apresentadas as datas de desenvolvimento das atividades nas aulas disponibilizadas pela professora-regente da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.

Quadro 2: Cronograma de desenvolvimento das atividades na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Data	Atividade	Ações
27/08/2021	Salto de paraquedas	Apresentação pelo professor-pesquisador da situação-problema aos alunos.
30/08/2021	Salto de paraquedas	Organização dos alunos em grupos. Desenvolvimento da atividade pelos grupos em salas do Google Meet.
20/09/2021	Copo térmico para cerveja – funciona?	Apresentação pelo professor-pesquisador da situação-problema aos alunos. Desenvolvimento da atividade pelos grupos em salas do Google Meet.
24/09/2021	Copo térmico para cerveja – funciona?	Desenvolvimento da atividade pelos grupos em salas do Google Meet.
29/11/2021	Bungee Rocket	Apresentação pelo professor-pesquisador da situação-problema aos alunos. Desenvolvimento da atividade pelos grupos em salas do Google Meet.
03/12/2021	Bungee Rocket	Desenvolvimento da atividade pelos grupos em salas do Google Meet.

Fonte: Os autores.

O desenvolvimento dessas atividades se deu em reuniões dos estudantes com o professor-pesquisador e a professora-regente via Google Meet em aulas síncronas e assíncronas disponibilizadas pela professora-regente; em encontros fora do horário da aula, também via Google Meet; em discussões em grupos no WhatsApp e em entregas de relatórios na plataforma Google Classroom.

O segundo contexto de pesquisa, a disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, foi ofertada no 2º semestre de 2021 e 1º semestre de 2022, para alunos do 4º ano do curso, com carga horária total de 75 horas distribuídas em 2 horas-aula semanais nas quartas-feiras. A pesquisa empírica nessa disciplina foi realizada no período de 09 de março de 2022 a 27 de abril de 2022. Nesse período, ainda em cenário pandêmico, mas com o início de uma flexibilização do isolamento social, as aulas ocorreram de modo semipresencial, via Google Meet e com o uso do Google Classroom e o WhatsApp.

Na pesquisa empírica realizada nesse contexto, vinte estudantes matriculados na disciplina, diferentes dos estudantes matriculados no primeiro contexto, participaram da pesquisa, que foram organizados em quatro grupos e desenvolveram duas atividades de modelagem matemática com temáticas propostas pelo professor-pesquisador e quatro atividades com temáticas escolhidas pelos estudantes, uma atividade por cada grupo. As temáticas propostas pelo professor-pesquisador nas duas primeiras atividades foram as mesmas estudadas nas atividades com foco na análise de modelos na disciplina Introdução às Equações

Diferenciais Ordinárias, *Salto de paraquedas* e *Copo térmico para cerveja: funciona?* com a diferença de que na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática os modelos matemáticos e os problemas foram construídos e formulados pelos estudantes. As temáticas escolhidas pelos estudantes foram: *Inflação e Cesta Básica: até quando o brasileiro aguenta?*; *Problema dos Notebooks: uma análise do custo-benefício*; *Qual a relação entre massa e quantidade de sementes para abóboras comuns e gigantes do tipo cucurbita máxima, popularmente conhecidas como morangas?*; *Análise da taxa de frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR*. No Quadro 3, são apresentados o cronograma do desenvolvimento das atividades, a modalidade da aula e as ações realizadas em cada aula regular da disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática

Quadro 3: Cronograma de desenvolvimento das atividades na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática

Data	Atividades	Modalidade da aula	Ações
09/03/2022	Atividade Salto de Paraquedas	Remota Síncrona	Apresentação da situação-problema e formulação do problema em conjunto com os alunos.
16/03/2022	Atividade Salto de Paraquedas	Presencial	Alunos reunidos em grupos trabalharam no desenvolvimento da atividade.
23/03/2022	Atividade Copo Térmico para cerveja: funciona?	Presencial	Apresentação da situação-problema e formulação do problema em conjunto com os alunos.
30/03/2022	Atividade Copo Térmico para cerveja: funciona?	Remota Síncrona	Alunos reunidos em grupos trabalharam no desenvolvimento da atividade
06/04/2022	Atividade Copo Térmico para cerveja: funciona? Escolha do tema para a atividade final.	Presencial	Apresentação feita pelos grupos do desenvolvimento da atividade Copo Térmico para cerveja: funciona? Escolha do tema da atividade final.
13/04/2022	Atividades com temas escolhidos pelos estudantes	Presencial (opcional)	Alunos reunidos em grupos trabalharam no desenvolvimento das atividades com tema escolhido pelos estudantes
20/04/2022	Atividades com temas escolhidos pelos estudantes	Presencial	Apresentação prévia de cada grupo da atividade final.
27/04/2022	Atividades com temas escolhidos pelos estudantes	Presencial	Apresentação da atividade final de cada grupo.

Fonte: Os autores.

O desenvolvimento dessas atividades se deu nas aulas regulares da disciplina de forma presencial e remota via Google Meet, em reuniões externas às aulas regulares dos estudantes com o professor-pesquisador e a professora-regente via Google Meet; em discussões em grupos no WhatsApp e em entregas de relatórios na plataforma Google Classroom.

Os dados foram coletados nos dois contextos de pesquisa por meio dos seguintes instrumentos:

- Registros escritos produzidos pelos participantes na produção de um relatório escrito entregue no final do desenvolvimento de cada atividade; em conversas de WhatsApp nos grupos e individuais com o professor-pesquisador; em reuniões no Google Meet a partir de fotos de registros escritos do caderno e de registros feitos por meios digitais; em registros escritos produzidos durante o desenvolvimento das atividades nas aulas presenciais.
- Gravações de vídeo das reuniões via Google Meet realizadas pelos grupos e entre os grupos e o pesquisador durante o desenvolvimento das atividades.
- Gravações de áudio das discussões realizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento das atividades nas aulas presenciais.
- Questionário aplicado ao final do desenvolvimento das atividades em cada contexto de pesquisa.

Para assegurar a anonimidade dos participantes da pesquisa, foram atribuídos códigos para os contextos de pesquisa, as atividades, os alunos, os grupos de trabalho e os instrumentos de coleta de dados (Quadro 4).

Quadro 4: Codificação dos dados empíricos

- Contextos de pesquisa:
  - C1: Disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática.
  - C2: Disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática.
- Alunos:
  - No contexto C1, os alunos foram codificados da seguinte maneira:
    Ai, com $i \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq i \leq 18$
  - No contexto C2, os alunos foram codificados da seguinte maneira:
    Ej, com j$\in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq j \leq 20$
- Grupos:
  - Da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática:
    G1: A1, A2, A3, A4;
    G2: A5, A6, A7, A8;
    G3: A9, A10, A11, A12;
    G4: A13, A14, A15, A16, A17; A18.

- Da disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática:
  GM1: E1, E2, E3, E4, E5, E6.
  GM2: E7, E8, E9, E10.
  GM3: E11, E12, E13, E14.
  GM4: E15, E16, E17, E18, E19, E20.
- Atividades:
  - As atividades desenvolvidas no contexto C1 foram codificadas de acordo com o seguinte código:
    $$AM_k, \text{ com } k \in \mathbb{N}, \text{ tal que } 1 \leq k \leq 3.$$
  - As atividades desenvolvidas no contexto C2 foram codificadas de acordo com o seguinte código:
    $$MM_l, \text{ com } l \in \mathbb{N}, \text{ tal que } 1 \leq l \leq 6.$$
- Instrumento de coleta de dados:
  - Registros escritos: RE.
  - Questionários: Q_p, com $p \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq p \leq 3$.
  - Conversas via WhatsApp: W.
  - Gravações de áudio: D.
  - Gravações de vídeo: V.
- Para se referir-se a algum dado coletado no decorrer do desenvolvimento das atividades ou por meio dos questionários, foi usada a seguinte estrutura para codificação:

Contexto de pesquisa _ Instrumento de coleta de dados _ Atividade desenvolvida _ Grupo de alunos _ Aluno

Fonte: Os autores.

Organizamos uma síntese dos códigos atribuídos às atividades desenvolvidas conforme o contexto de pesquisa, a temática e os grupos de estudantes no Quadro 5.

Quadro 5: Quadro síntese das atividades desenvolvidas

Contexto de pesquisa	Código da atividade	Temática	Grupo
C1	AM_1	Salto de paraquedas	G1, G2, G3, G4
C1	AM_2	Copo térmico para cerveja: funciona?	G1, G2, G3, G4
C1	AM_3	Bungee rocket	G1, G2, G3, G4
C2	MM_1	Salto de paraquedas	GM1, GM2, GM3, GM4
C2	MM_2	Copo térmico para cerveja: funciona?	GM1, GM2, GM3, GM4
C2	MM_3	Inflação e Cesta Básica: até quando o brasileiro aguenta?	GM1
C2	MM_4	Problema dos Notebooks: uma análise do custo-benefício	GM2
C2	MM_5	Qual a relação entre massa e quantidade de sementes para abóboras comuns e gigantes do tipo *cucurbita máxima*, popularmente conhecidas como morangas?	GM3
C2	MM_6	Análise da taxa de frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR	GM4

Fonte: Os autores.

Em cada um desses contextos, as atividades desenvolvidas assumem encaminhamentos e objetivos diferentes do professor e dos estudantes, o que fornece à essa pesquisa um conjunto variado de jogos de linguagem, a partir das ações, regras e outros elementos envolvidos nas atividades linguísticas com as quais os alunos se envolvem quando desenvolvem tais atividades. Evita-se com isso uma atitude generalista de pesquisa, em outras palavras, de generalizar considerações a respeito da aprendizagem a partir de casos particulares. Na presente pesquisa, de acordo com a atitude terapêutica assumida, tais casos particulares funcionam muito mais como objetos de comparação, para que possamos lançar luz sobre as relações estabelecidas nos diversos usos do termo aprendizagem em atividades de modelagem matemática. Como diz Wittgenstein:

> Nossos jogos de linguagem claros e simples não são estudos preparatórios para uma regulamentação futura da linguagem, - não são, por assim dizer, aproximações preliminares, sem levar em conta o atrito e a resistência do ar. Os jogos de linguagem estão aí muito mais como objetos de comparação, os quais, por semelhança e dissemelhança, devem lançar luz nas relações de nossa linguagem (Wittgenstein, IF, § 130).

Nessa perspectiva, o segundo movimento considera as funções que a linguagem desempenha no processo de aprendizagem de estudantes em atividades de modelagem matemática. Para isso recorre-se ao modo que Wittgenstein concebe a linguagem, após o *Tractatus*, não apenas como um conjunto de palavras ou proposições, mas de forma interligada com as ações e as diversas atividades em nos envolvemos nas mais variadas práticas linguísticas de nossas formas de vida.

2.4.1.3 Estrutura metodológica do movimento 3

O movimento 3 é intrinsecamente dialógico, em que se busca *ver conexões*, a partir de semelhanças e dissemelhanças de família, entre os jogos de linguagem constituídos nos usos do termo aprendizagem na literatura (movimento 1) e no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, em duas disciplinas diferentes (movimento 2). Com isso, pretende-se ver relações internas a partir de elos intermediários estabelecidos nessas comparações de jogos de linguagem.

A partir de uma rede de semelhanças de família, consideramos nesse movimento um aspecto que merece atenção na presente pesquisa, devido aos seus diferentes usos e abordagens no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática: o papel do modelo matemático no processo de aprendizagem dos estudantes. Dirige-se atenção à compreensão de como abordagens diferentes do modelo matemático, em que, por um lado, os estudantes analisam modelos matemáticos prontos e, por outro lado, constroem e analisam modelos matemáticos, repercutem nos usos que os estudantes fazem da linguagem e, com isso, medeiam o processo de aprendizagem nessas atividades.

Outro aspecto explorado diz respeito às repercussões da visão panorâmica estruturada para o próprio conceito de modelagem matemática, de modo a evitar uma posição dogmática e levar em consideração as funções que os usos da linguagem desempenham no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Não se espera como resultado uma nova teorização acerca da aprendizagem em atividades de modelagem matemática, mas aguçar o olhar para ver conexões, a partir de aspectos até então não percebidos ou não levados em consideração na literatura. É justamente a partir dessas conexões ou elos intermediários entre diferentes aspectos do processo de aprendizagem em atividades de modelagem matemática que pode se ter uma visão panorâmica da aprendizagem em atividades de modelagem matemática.

3 MOVIMENTO 1: UMA DESCRIÇÃO GRAMATICAL DA APRENDIZAGEM NA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nesse capítulo, busca-se situar a região de inquérito, na qual incide o foco da presente pesquisa, trazendo ao texto uma breve caracterização da Modelagem Matemática enquanto área de pesquisa da Educação Matemática. A partir dessa delimitação, descreve-se os usos do termo aprendizagem na literatura, indicando possíveis traços característicos entre eles.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A modelagem matemática, enquanto atividade humana, pode ser entendida como uma forma de resolver problemas, com origem em situações da realidade[13], por meio da construção e análise de modelos matemáticos (Martins; Almeida, 2021). Esse entendimento tem raízes na prática profissional de modelagem matemática e é empregado como um método científico da Matemática Aplicada (Bassanezi, 2002; Meyer, 2020; Pollak, 2012, 2015). O processo de modelagem matemática nesse contexto pode ser definido da seguinte forma, de acordo com Pollak (2012):

> A situação real geralmente tem tantas facetas que você não pode levar tudo em consideração, então você decide quais aspectos são mais importantes e os mantém. Neste ponto, você tem uma versão idealizada da situação do mundo real, que pode ser traduzida em termos matemáticos. O que você tem agora? Um modelo matemático da questão idealizada. Você então aplica seus instintos e conhecimentos matemáticos ao modelo e obtém *insights*, exemplos, aproximações, teoremas e algoritmos interessantes. Você traduz tudo isso de volta para a situação do mundo real e espera ter uma teoria para a questão idealizada. Mas você precisa verificar: os resultados são práticos, as respostas razoáveis, as consequências aceitáveis? Se sim, ótimo! Se não, dê outra olhada nas escolhas que você fez no início e tente novamente (Pollak, 2012, p. 1).

No âmbito Educação Matemática, há um deslocamento ou uma ampliação da finalidade subjacente de resolver problemas de diferentes esferas sociais e políticas para finalidades educacionais, em que os personagens principais são professores e estudantes, envolvidos no ensino e na aprendizagem de matemática. Nessa transição, ainda que muitas características da prática profissional de modelagem matemática sejam preservadas, diferentes entendimentos e perspectivas da Modelagem Matemática na Educação Matemática passam a ser consideradas, levando em consideração as diferentes bases epistemológicas e finalidades

[13] Ainda que o próprio conceito da realidade seja polissêmico, consideramos que, na Modelagem Matemática, ela pode ser considerada como uma realidade objetiva, um domínio extra matemático composto por outras disciplinas e campos de prática (Niss; Blum, 2020) ou ainda como uma realidade subjetiva, constituída a partir de percepções e idealizações do sujeito sobre a realidade objetiva que usa a matemática para lidar com problemas dessa realidade (Almeida, 2018; Cifuentes; Negrelli, 2012; Veleda; Almeida, 2010).

associadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em práticas pedagógicas que são vinculadas na literatura (Blum, 2015; Galbraith, 2012; Kaiser; Sriraman, 2006; Martins; Almeida, 2021).

No cenário nacional, uma diversidade de entendimentos da Modelagem Matemática na Educação Matemática é difundida, como: ambiente de aprendizagem (Barbosa, 2001); alternativa pedagógica (Almeida; Silva; Vertuan, 2012); metodologia de ensino (Burak, 2010); método de ensino de matemática (Biembengut, 2016). Esses entendimentos, afirma Biembengut (2009), se revelam na constituição de diferentes grupos de pesquisa desde as primeiras experiências e cursos de formação continuada promovidos em 1979.

No cenário internacional, uma sistematização das diferentes perspectivas de modelagem matemática é realizada por Kaiser e Sriraman (2006), que caracterizam seis perspectivas de acordo com seus objetivos centrais: *perspectiva realística ou modelagem aplicada*, com objetivos pragmáticos e utilitários, isto é, de resolver problemas de situações da realidade, compreender essas situações e promover o desenvolvimento de competências de modelagem matemática; *modelagem contextual*, com objetivos psicológicos e relacionados à disciplina, geralmente envolvendo a resolução de problemas de palavras; *modelagem educacional*, subdividida em modelagem didática, voltada para estruturação e promoção do processo de aprendizagem, e a modelagem conceitual, com objetivo relacionado à introdução e desenvolvimento de conceitos; *modelagem sociocrítica*, com o objetivo de compreensão crítica do mundo ao redor e do papel da matemática na sociedade; *modelagem epistemológica ou teórica*, com objetivos orientados por teorias, visando a promoção e o desenvolvimento de teorias; *modelagem cognitiva*, caracterizada como uma metaperspectiva, pois possui objetivos de pesquisa, como a análise de processos cognitivos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, e objetivos psicológicos de promover o pensamento matemático pelo uso de modelos ou com ênfase em processos mentais na modelagem matemática, tais como a abstração e a generalização.

Essas perspectivas foram revisitadas posteriormente por Galbraith (2012) que, utilizando dois termos originalmente elaborados por Julie (2002), propõe dois gêneros de modelagem matemática: *modelagem como conteúdo* e *modelagem como veículo*, que designam dois objetivos gerais do uso da modelagem matemática em práticas pedagógicas. Como veículo, a modelagem matemática tem como propósito a introdução de conteúdos e prioridades curriculares, ou seja, trata-se de ensinar matemática por meio da modelagem matemática. Como conteúdo, o objetivo incide em capacitar estudantes para aprender e aplicar habilidades e competências de modelagem matemática para resolver problemas relevantes do mundo, em outras palavras, consiste em aprender a fazer modelagem matemática.

Blum (2015) amplia as seis perspectivas de modelagem matemática apresentadas por Kaiser e Sriraman (2006), com uma singela diferença em relação ao conceito de perspectiva, considerando-a como um par (objetivo | exemplos adequados):

> (pragmático | autêntico) → “modelagem aplicada” [...]
> (formativo | cognitivamente rico) → “modelagem educacional” [...]
> (cultural com uma intenção emancipatória | autêntico) → “modelagem sociocrítica” [...]
> (cultural em relação à matemática | epistemologicamente rico) → “modelagem epistemológica” [...]
> (psicológico com intenção de motivar os estudantes | motivacional) → “modelagem pedagógica” [...]
> (psicológico | matematicamente rico) → “modelagem conceitual” (Blum, 2015, p. 82-83).

A pluralidade inerente às perspectivas, às finalidades e aos entendimentos de modelagem matemática ressoa nas estruturas propostas para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Blum (2015) pontua que para cada perspectiva, existe um determinado modelo da estrutura do processo de modelagem matemática que se adequa especificamente à sua finalidade, geralmente denominado de ciclos de modelagem matemática. O autor indica que uma maneira mais adequada de conceituar o termo perspectiva é como uma tripla (objetivo | exemplos | ciclos).

Na literatura, encontramos uma variedade de ciclos de modelagem matemática[14], em que, de um ciclo para outro, alguns aspectos considerados relevantes por determinados autores são acrescentados e outros são desconsiderados (Perrenet; Zwaneveld, 2012; Doerr; Ärlebäck; Misfeldt, 2017). Um ciclo de modelagem, de acordo com Borromeo Ferri (2018), não é apenas um modelo teórico que caracteriza o processo envolvido no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, mas servem a multipropósitos, como instrumento de pesquisa, de aprendizagem para estudantes e instrumento de diagnóstico para professores.

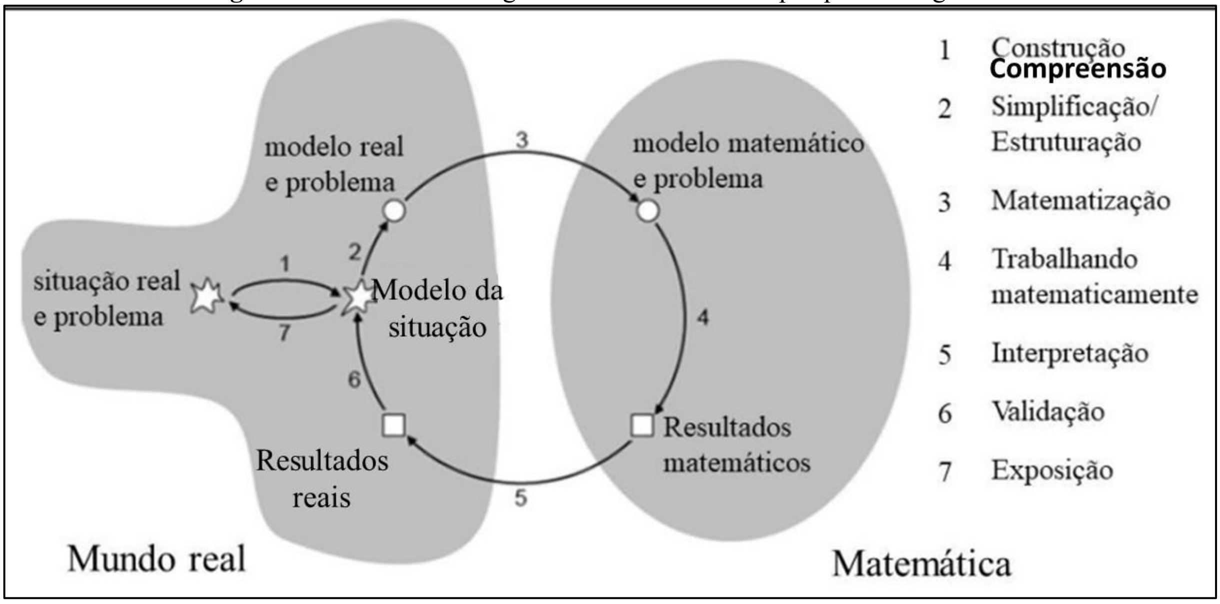
Apesar da variedade de ciclos de modelagem existentes na literatura, Doerr, Ärlebäck e Misfeldt (2017, p. 75) argumentam que eles se assemelham ao captarem, em algum sentido, a ideia de que “um modelo matemático é uma versão simplificada de algum aspecto da situação da realidade que é formalizado na matemática com o propósito de resolver uma situação-problema”.

A título de ilustração, considera-se na Figura 2 o ciclo de modelagem

[14] Discussões sobre os ciclos de modelagem matemática em diferentes perspectivas de modelagem matemática podem ser encontradas em Perrenet e Zwaneveld (2012), Doerr, Ärlebäck e Misfeldt (2017).

matemática de Blum e Leiß (2007), amplamente citado na literatura internacional e que, eventualmente, é adaptado por outros autores para atender finalidades específicas.

Figura 2 - Ciclo de Modelagem Matemática em uma perspectiva cognitiva



Fonte: traduzido de Blum e Leiß (2007, p. 225).

Este ciclo foi originalmente proposto para retratar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em uma perspectiva cognitiva, visando abarcar as ações cognitivas do indivíduo modelador que intermedeiam as passagens de uma fase a outra do processo de modelagem matemática. As ações cognitivas *construção/compreensão*, *simplificação/estruturação*, *matematização*, *trabalhando matematicamente*, *interpretação*, *validação* e *exposição* possibilitam que, a partir de uma situação-problema da realidade, o modelador construa um modelo da situação, formule um problema e construa um modelo matemático, gerando resultados matemáticos que devem ser validados e interpretados em resultados reais, que são posteriormente comunicados.

No ambiente escolar, a incorporação de atividades de modelagem matemática pode ser orientada por essas perspectivas e entendimentos de modelagem matemática, a depender do objetivo específico do professor e da justificativa apresentada. Blum (2015) apresenta quatro justificativas de acordo com as perspectivas de modelagem matemática:

> 1. Justificativa "pragmática": Para entender e dominar situações do mundo real, aplicações adequadas e exemplos de modelagem devem ser explicitamente tratados; não podemos esperar nenhuma transferência de atividades intramatemáticas.
> 2. Justificativa "formativa": As competências podem ser desenvolvidas também pelo envolvimento em atividades de modelagem; em particular, a competência de modelagem só pode ser desenvolvida dessa maneira, e a competência de argumentação pode ser desenvolvida por "provas relacionadas à realidade"
> 3. Justificativa "cultural": as relações com o mundo extramatemático são indispensáveis para uma imagem adequada da matemática como uma ciência em um

> contexto abrangente.
> 4. Justificativa “psicológica”: exemplos do mundo real podem contribuir para aumentar o interesse dos alunos pela matemática, motivar ou estruturar o conteúdo matemático, entendê-lo melhor e retê-lo por mais tempo.

Tais justificativas expressam de maneira geral, conforme Niss e Blum (2020), duas razões gerais para o uso da modelagem matemática no ambiente escolar: *a matemática para o bem da modelagem*, em que a matemática é um meio para desenvolver no estudante a competência de modelagem matemática, isto é, a aprendizagem matemática desempenha um papel importante na compreensão de situações da realidade e na resolução de problemas originados nessas situações; *modelagem para o bem da matemática*, em que a modelagem matemática é um meio para aprendizagem de matemática, seja promovendo motivação para seu estudo, atribuição de significados, compreensão e apreensão de conceitos, resultados, métodos e teorias matemáticas, seja como meio para desenvolver competências matemáticas.

Pode-se dizer que ao considerar as diferentes perspectivas, entendimentos, finalidades, ciclos e justificativas que configuram a Modelagem Matemática na Educação Matemática, diferentes formas de ver a aprendizagem podem ser caracterizados na literatura.

3.2 Usos do termo aprendizagem na Modelagem Matemática: uma descrição gramatical a partir da revisão sistemática

Os vinte e dois artigos selecionados no levantamento realizado no portal periódicos da CAPES constituem o *corpus* em que os usos do termo aprendizagem são descritos nessa seção. Essa descrição foi feita considerando as seguintes questões:

1. Como a aprendizagem é entendida na literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática?
2. O que se pode inferir das ações dos estudantes relativamente à aprendizagem em atividades de modelagem matemática?
3. Que relações podem ser estabelecidas entre os entendimentos de modelagem matemática, os entendimentos de aprendizagem e as inferências das ações dos estudantes acerca da aprendizagem em atividades de modelagem matemática nos textos selecionados?

Entende-se que a questão 1 dirige-se para o modo como a aprendizagem é entendida na literatura. A questão 2 tem como foco os conteúdos da aprendizagem, as condições, as abordagens, os meios que levam à aprendizagem em atividades de modelagem matemática, a partir de inferências das ações dos estudantes nessas atividades. Por fim, com a questão 3 busca-se uma tecitura constituída por relações entre as descrições norteadas pelas questões 1 e 2 e os entendimentos de modelagem matemática dos textos.

Ao olhar para os usos do termo *aprendizagem* nos textos selecionados, busca-se identificar *traços característicos* em relação ao modo como a aprendizagem em atividades de modelagem matemática pode ser caracterizada a partir da revisão da literatura, tal como os traços fisionômicos de uma família, como cor dos olhos, o modo de andar, cor da pele, seguindo a analogia que Wittgenstein (IF, § 66-67) faz para elucidar a noção de semelhanças de família.

Isso não quer dizer que todos os usos identificados revelam ter o mesmo traço característico, mas que alguns traços aparecem e outros desaparecem, na medida em que se compara os usos do termo *aprendizagem.* Além disso, é possível identificar mais de um traço característico em um mesmo uso.

3.2.1 Como a aprendizagem é entendida na literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática?

Nessa subseção, a descrição dos usos dirige-se à questão 1, a partir de excertos dos textos que apresentam definições da aprendizagem e que indicam as bases teóricas utilizadas. Tais excertos foram comparados entre si, de modo a ver conexões entre os diferentes entendimentos e identificar traços característicos acerca de como a aprendizagem é entendida na literatura.

Um primeiro traço característico identificado é que a *aprendizagem tem natureza cognitiva*. Revela-se nos usos do termo aprendizagem expressos nos entendimentos de aprendizagem baseados na teoria da aprendizagem significativa (Moura; Alves, 2022; Souza, 2021; Huf; Burak, 2018), como desenvolvimento de competências e habilidades (Brito; Almeida, 2021; Wakiyama; Mendoza, 2021; Ramírez-Montes; Henriques; Carreira, 2021; Khusna; Heryaningsih, 2018, Cahyono *et al.*, 2020), como desenvolvimento cognitivo em níveis ou etapas (Silva; Silva; Madruga, 2019; López-Reyes, Jiménez-Gutiérrez; Costilla-López, 2022) e como reconhecimento de um objeto matemático em suas diferentes representações semióticas (Pires, Costa; Boiago, 2020, p. 85).

Moura e Alves (2022), Souza (2021) e Huf e Burak (2018) apresentam um entendimento de aprendizagem que se constituí a partir da teoria da aprendizagem significativa, definida como “o processo por meio do qual uma nova informação interage com conceitos ou proposições já estabelecidos na estrutura cognitiva do aprendiz” (Souza, 2021, p. 245). Essa interação deve ocorrer de maneira não-arbitrária e não-literal entre uma nova informação e as ideias já estabelecidas na estrutura cognitiva do aprendiz.

Brito e Almeida (2021), Wakiyama e Mendoza (2021), Ramírez-Montes; Henriques e Carreira (2021), Khusna e Heryaningsih (2018), Cahyono *et al*. (2020) sugerem um modo de ver a aprendizagem como um processo que promove o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias para resolver uma situação-problema da realidade, como: habilidades da aprendizagem de geometria, requeridas para lidar com um uma classe de problemas (Brito; Almeida, 2021), formação de conceitos e habilidades com base na teoria da atividade de Leontiev e da formação por etapas das ações mentais de Galperin (Wakiyama; Mendoza, 2021), competências de modelagem matemática associadas às fases do ciclo de modelagem (Cahyono *et al*., 2020; Ramírez-Montes; Henriques; Carreira, 2021), estilos de aprendizagem na abordagem SAVI (acrônimo de somático, auditivo, visual e intelectual) no desenvolvimento de competências de modelagem (Khusna; Heryaningsih, 2018).

Em relação à aprendizagem como desenvolvimento cognitivo em níveis ou etapas, com base em teorias cognitivas, os textos indicam que aprender envolve um processo de desenvolvimento do domínio cognitivo, em níveis cada vez mais altos. Silva, Silva e Madruga (2019) utilizam a teoria do construcionismo contextualizado elaborado por José Armando Valente. Nessa teoria, a aprendizagem é definida como "apropriar-se da informação segundo os conhecimentos que o aprendiz já possui e que estão sendo continuamente construídos" (Valente, 2005, p. 83-84) e se dá de forma cíclica e contínua na medida em que o estudante utiliza ferramentas computacionais para resolver um problema, seguindo as fases do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição. López-Reyes, Jiménez-Gutiérrez e Costilla-López (2022) utilizam a taxonomia de Bloom como uma forma de avaliar as competências, conhecimentos e técnicas que são adquiridos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Essa taxonomia propõe uma classificação de seis níveis cognitivos: conhecimento, compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação. O conhecimento é o nível básico e a avaliação é o nível mais alto do domínio cognitivo.

O entendimento de Pires, Costa e Boiago (2020) se baseia na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Essa teoria busca estudar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática e parte do pressuposto de que as representações são essenciais para a atividade cognitiva. Segundo os autores, "a aprendizagem efetiva das propriedades de um objeto ocorre justamente na passagem de um registro para outro, pois as diferentes representações contêm peculiaridades distintas sobre um mesmo objeto" (Pires, Costa; Boiago, 2020, p. 85), de modo que o estudante possa reconhecer um objeto matemático em suas diferentes representações semióticas.

Um segundo traço característico é que a *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas*, identificado em entendimentos de aprendizagem que indicam a necessidade de interações entre os indivíduos, enquanto trabalham de forma colaborativa (Borssoi; Silva; Ferruzzi, 2021; Taranto *et al.*, 2022); entre indivíduos e ferramentas computacionais (Silva; Silva; Madruga, 2019), entre aluno, professor e saber em um certo meio (Littig *et al.*, 2018).

A interação entre indivíduos, enquanto trabalham em situações de colaboração, é entendida como uma condição para aprendizagem nas pesquisas de Borssoi, Silva e Ferruzzi (2021) e Taranto *et al.* (2022) que utilizam o construto da aprendizagem colaborativa.

> Aprendizagem colaborativa é um constructo que se origina de diferentes abordagens conhecidas na literatura como: grupos de aprendizagem, comunidades de aprendizagem, aprendizagem por pares, aprendizagem cooperativa, entre outras. Dentre os aspectos comuns que tais abordagens preservam destaca-se o trabalho em pequenos grupos (Borssoi; Silva; Ferruzzi, 2021, p. 944).

> A aprendizagem colaborativa é um modo de aprendizagem que ocorre quando conhecimentos, habilidades e atitudes são adquiridos por meio de interações em grupo [...] O processo de colaboração e interação possibilita a aplicação e transferência de conhecimento por meio do compartilhamento de experiências entre os membros do grupo (Taranto *et al*., 2022, p. 4).

Em Silva, Silva e Madruga (2019), recorrendo ao entendimento de aprendizagem de Valente (2005), quadro teórico utilizado pelos autores, vemos que aprender se dá na construção de conhecimento, no processamento da informação obtida na interação do sujeito com as pessoas e as ferramentas computacionais, "o que implica em uma atribuição de significados, de modo que a informação passe a ter sentido àquele aprendiz" (Valente, 2005, p. 83) e possa, assim, construir conhecimento.

Littig *et al.* (2018), com base na Teoria da Situação Didática (TSD), explicita o entendimento de aprendizagem de Guy Brousseau, que analisa situações caracterizadas nas interações entre aluno, professor e saber em um certo meio (*milieu*). De acordo com Brousseau, "o aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como faz a sociedade humana. Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem" (Brousseau, 1996, p. 49). Este meio é denominado como situação a-didática, que permite compreender a interação entre o ambiente escolar e o espaço maior da vida e está associado às ações mais amplas em que não são explicitadas intenções didáticas quando alunos resolvem um problema.

López-Reyes, Jiménez-Gutiérrez e Costilla-López (2022) recorrem a teoria sociocultural do desenvolvimento cognitivo de Vygotsky, cuja premissa, segundo os autores, é "que as funções mentais superiores, como aplicação e análise, são socialmente construídas e transmitidas culturalmente" (López-Reyes; Jiménez-Gutiérrez; Costilla-López, 2022, p. 4). O desenvolvimento dessas funções mentais superiores é mediado pelas interações sociais que ocorrem na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), caracterizada como a distância entre o Nível de Desenvolvimento Real, que se constitui naquilo que o indivíduo já sabe e consegue resolver problemas sozinho, e o Nível de Desenvolvimento Potencial, em que o indivíduo precisa de ajuda externa, geralmente de alguém mais experiente e com um nível de conhecimento maior, para realizar tarefas e resolver problemas. A construção do conhecimento ocorre na medida em que a interação social permite que aquilo que está no Nível de Desenvolvimento Potencial passe a fazer partir do Nível de Desenvolvimento Real.

Um terceiro traço característico identificado é que *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*. Os estudos que apresentam esse traço nos entendimentos de aprendizagem, consideram que a cultura como uma condição favorável para aprendizagem matemática (Supriadi, 2020), o conhecimento matemático é socialmente construído e a aprendizagem no ambiente escolar depende de uma prática de referência (Cantoral; Moreno-Durazo; Caballero-Pérez, 2018), aprendizagem matemática é de natureza exclusivamente discursiva (Souza; Barbosa, 2019) e aprendizagem como apreensão/aquisição de um modo linguístico (Brito; Almeida, 2021).

Supriadi (2020) analisou a disposição de modelagem matemática dos sundaneses, um grupo étnico da Indonésia, tendo como pano de fundo a cultura como condição para aprendizagem matemática. Nesse estudo, a aprendizagem matemática pode ser favorecida se os alunos forem ativos na conexão entre cultura local e a compreensão matemática, na medida em que "os conceitos matemáticos aprendidos são atividades diárias dos alunos, que podem ser usadas na resolução de problemas" (Supriadi, 2020, p. 1407). Esse entendimento de aprendizagem é fundamentado na etnomatemática.

Outro estudo que considera a importância da conexão entre cultura, práticas sociais e aprendizagem é de Cantoral, Moreno-Durazo e Caballero-Pérez (2018), que com base na socioepistemologia, enfatiza que o conhecimento matemático é construído socialmente, considerado como "parte essencial de uma cultura; um elemento 'vivo', criado 'fora' da sala de aula, mas recriado 'dentro' dela" (Cantoral; Moreno-Durazo; Caballero-Pérez, 2018, p. 79). A aprendizagem está associada a noção de práticas de referência, práticas sociais em que se faz uso de noções, ideias, conceitos, ações e atividades em outras áreas da atividade humana, que são estruturantes do trabalho matemático e cujos mecanismos epistemológicos são bases para recriação em ambientes escolares.

Souza e Barbosa (2019) argumentam que a aprendizagem tem natureza exclusivamente discursiva, a partir das ideias da filosofia tardia de Ludwig Wittgenstein e de Anna Sfard sobre a aprendizagem matemática. Os autores sugerem que a "aprendizagem matemática que se constitui no contexto escolar pode se caracterizar por uma *delimitação discursiva*, ou seja, pela identificação de quais circunstâncias (*quando)* as regras do tipo *como* são consideradas legítimas" (Souza; Barbosa, 2019, p. 46). As *regras como* são as regras procedimentais, elas orientam a elaboração de enunciados que podem ser identificados como sendo legítimos. Já as *regras quando* indicam "sob que circunstâncias espaciais, temporais ou contextuais, ou seja, sob quais critérios a adoção das regras do tipo *como* será considerada legítima" (Souza; Barbosa, 2019, p. 45). A aprendizagem matemática se constitui, portanto, na elaboração de enunciados legítimos, cuja legitimidade no contexto escolar é geralmente feita a partir do discurso docente.

Brito e Almeida (2021) consideram que as práticas educativas são elas mesmas condições para aprendizagem. Nesse sentido, aprender envolve a apreensão/aquisição de um modo linguístico característico de uma prática educativa. No caso da aprendizagem geométrica em práticas de modelagem, ela é entendida pelos autores como sendo a "apreensão/aquisição de um modo linguístico de expressar e tornar objetiva uma compreensão acerca do espaço" (Brito; Almeida, 2021, p. 8).

Ao comparar os diversos usos do termo aprendizagem, a partir dos entendimentos e bases teóricas presentes nos textos, três traços característicos que circundam o conceito de aprendizagem na literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática foram identificados: (i) *aprendizagem tem natureza cognitiva*, (ii) *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas;* (iii) *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*.

3.2.2 O que se pode inferir das ações dos estudantes relativamente à aprendizagem em atividades de modelagem matemática?

Nessa subseção, descreve-se os usos do termo aprendizagem na literatura, que possuem o caráter de inferências, assertivas[15] produzidas com base em resultados teóricos e dados empíricos do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em ambientes

[15] No decorrer da descrição, a cada traço característico identificado trazemos alguns excertos dos textos que evidenciam esse traço, não esgotando todos os excertos que foram considerados para essa identificação.

escolares, concepções e crenças reveladas por participantes de pesquisa. A partir da identificação de excertos que revelam as inferências produzidas acerca da aprendizagem, estes foram comparados entre si, visando estabelecer conexões, que deram origem à traços característicos quanto ao conteúdo da aprendizagem e as condições, as abordagens, os meios que levam à aprendizagem em atividades de modelagem matemática.

Um primeiro traço característico identificado nos usos indica que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em ambientes escolares *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos*, por meio de condições que favorecem a aprendizagem significativa (Moura; Alves, 2022; Souza, 2021), uso de diferentes registros de representação semiótica de um objeto matemático (Pires; Costa; Boiago, 2020), interrelações entre matemática e diferentes áreas do conhecimento (Silva; Madruga; Silva, 2019; Rehfeldt *et al*., 2018; Littig *et al*, 2019; Huf; Burak; Pinheiro, 2021; Lowe; Carter; Cooper, 2018; Xu *et al*., 2022), avanço dos estudantes em diferentes níveis do domínio cognitivo (López-Reyes, Jiménez-Gutiérrez; Costilla-López, 2022), produções discursivas dos estudantes (Souza; Barbosa, 2019), mediante a um modo linguístico-visual (Brito; Almeida, 2021).

> Uma boa prática em atividades que utilizam a Modelagem Matemática fornece evidências de que os estudantes conseguem correlacionar seus conhecimentos, em uma conversação entre os *subsunçores*, para estruturar um aprendizado significativo (Moura; Alves, 2022, p. 12). [*Condições que favorecem a aprendizagem significativa*]
>
> Pode-se afirmar que [...] o ambiente de aprendizagem, suscitado pela modelagem matemática, é capaz de favorecer o relacionamento não-arbitrário e não-literal dos conteúdos matemáticos, abordados nessas atividades, a ideias específicas e relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aluno. [...] Um bom desempenho em atividades de modelagem matemática fornece uma forte evidência de que o aluno está aprendendo significativamente os conteúdos matemáticos em questão (Souza, 2021, p. 246-247). [*Condições que favorecem a aprendizagem significativa*]
>
> Ao desenvolver as atividades de Modelagem Matemática, estabeleceu-se o uso de diferentes registros de representação, bem como a execução de sucessivas conversões entre eles. [...] As conversões efetuadas foram muito importantes para que pudéssemos perceber a variedade de representações de um objeto. Nesse sentido, não poderíamos compreender nosso objeto de estudo, função afim, sem antes ter clareza de que ele poderia ser representado de várias maneiras (Pires; Costa; Boiago, 2020, p. 98). [*Uso de diferentes registros de representação semiótica de um objeto matemático*]
>
> Observamos que utilizar a TSD [Teoria das Situações Didáticas] associada ao ambiente de aprendizagem propiciado pela modelagem matemática sob a perspectiva sociocrítica pode potencializar a aprendizagem de conteúdos matemáticos [...]. Acreditamos nessa inferência, pois a modelagem trata de situações sociais amplas e a investigação delas fazem emergir diversos conteúdos matemáticos que os alunos já dominam e novos conteúdos (Littig *et al*., 2019, p. 11). [*Interrelações entre matemática e diferentes áreas do conhecimento*]
>
> No grupo de perspectiva epistemológica, MM1 refutou a ideia de que a modelagem pode ser ensinada. Ele enfatizou que a modelagem pode ser praticada e que o que é obtido é uma forma de consciência, ou seja, a consciência de “descobrir problemas da

> vida cotidiana" e "aprendizado autodirigido de meios matemáticos e o padrão matemático de resolução de problemas". MM4 enfatizou que a aprendizagem e o ensino da modelagem devem ser sincronizados com o ensino e aprendizagem do conhecimento matemático; MM4 também afirmou que esse processo poderia promover o reconhecimento e a experiência dos alunos em relação ao desenvolvimento da matemática. O ME3 enfatizou a importância de desenvolver as "verdadeiras visões matemáticas" dos alunos por meio da modelagem, usando o termo "visão matemática" para significar "estabelecer fortes conexões entre a matemática e o mundo real" (Xu *et al*., 2022, p.686). [*Interrelações entre matemática e diferentes áreas do conhecimento*]

> Isso significa conhecer os parâmetros e variáveis relevantes e sua análise dimensional, entender o significado de cada termo na EDO, aplicar métodos para obter a solução analítica e sua correspondente análise de erro, e interpretando a solução. Implementação de abordagens, como b-learning, pode apoiar os alunos enquanto eles experimentam esses processos cognitivos complexos e melhorar a compreensão e uso de conceitos matemáticos (López-Reyes; Jiménez-Gutiérrez; Costilla-López, 2022, p. 3). [*Avanço dos estudantes em diferentes níveis do domínio cognitivo*]

> Nesta direção, podemos destacar que apesar do tema em tarefas de modelagem ser um tema não matemático, a produção discursiva elaborada corresponderá a estruturação matemática formulada sobre a situação-problema. É a transcrição do problema real em problema matemático que enviesará os usos atribuídos às palavras matemáticas dessa estruturação. Tais usos por sua vez, possivelmente corresponderão aos usos mobilizados em aulas de matemática vivenciados pelos alunos (Souza; Barbosa, 2019, p. 62). [*Produções discursivas dos estudantes*]

> Em vista dessas considerações, parece razoável supor que a estrutura *generalização/metáfora* é a expressão de como a aprendizagem do conceito de centroide se dá na prática de modelagem, isto é, expressa o modo pelo qual os estudantes aprendem a extrair informações acerca do espaço e investigar o centro médio de uma população tendo em vista um resultado desejado de acessibilidade (Brito; Almeida, 2021, p. 24). [*Mediante a um modo linguístico-visual*]

Um segundo traço característico em relação aos usos que remetem as inferências produzidas pelos autores sobre a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é o de que *os estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas*, uma vez que se faz necessário utilizar conhecimentos de outras áreas, aproximando o estudante com situações advindas do seu cotidiano ou estudadas por essas áreas. Dentre as áreas envolvidas, destaca-se a Física (Silva; Madruga; Silva, 2019), o cotidiano de estudantes de uma escola do campo (Huf; Burak; Pinheiro, 2021), o tema imposto (Huf; Burak, 2018) e outras situações (Borssoi; Silva; Ferruzzi, 2021).

> As três fases da Modelagem propiciaram aos alunos a aprendizagem não somente em Matemática, mas em outra área - a Física -, pois foi necessário empreender conhecimentos dessa área para que o processo evoluísse. Nessa direção, destaca-se também uma diferenciação no relacionamento entre professor e aluno, visto que as interações entre eles geraram novas aprendizagens (Silva; Madruga; Silva, 2019, p. 114). [*Conhecimentos da Física*]

> [...] A partir da sistematização os conhecimentos trazidos do cotidiano, não só matemático, mas inerente às diversas áreas do saber, avança e se aprimora. Na atividade realizada os estudantes exploraram a variedade das espécies frutíferas cultivadas na região, a importância do consumo de frutas orgânicas para uma alimentação saudável, os tipos de solo e adubação necessária para cada tipo, técnicas

> de plantio, dentre outros (Huf; Burak; Pinheiro, 2021, p. 472). [*Cotidiano de estudantes de uma escola do campo*]

> Durante as discussões pudemos perceber que elas não se centraram somente em aspectos matemáticos, mas evidenciaram uma visão de pensamento complexo na perspectiva de Edgar Morin. As interações entre os envolvidos possibilitaram um entendimento e conhecimento do todo, oportunizando a ligação entre as áreas do conhecimento, no entendimento de que tudo é ligado e indissociável. Essa indissociabilidade é a responsável pela ampliação do saber (Huf; Burak, 2018, p. 166-167). [*Tema imposto*]

> [...] entendemos que, em aulas de Matemática, seu desenvolvimento possibilita a compreensão do fenômeno em estudo, ao mesmo tempo em que se aprende matemática. Essa aprendizagem, de certa forma, ocorre com a participação entre pares – professor e alunos e alunos e alunos (Borssoi; Silva; Ferruzzi, 2021, p. 939). [*Diversas situações*]

O terceiro traço característico identificado é que *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática*, o que implica em saber fazer modelagem por meio de desenvolvimento de competências que se associam a esse fazer. Wakiyama e Mendoza (2021) constroem um EBOCA (Esquema da Base de Orientação Completa da Ação) para a formação de habilidades de modelagem matemática, com base nas fases do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática; Pires, Costa e Boiago (2020) e Rehfeldt *et al.* (2018) destacam que a modelagem matemática promove não somente a aprendizagem matemática, mas também o aprender fazer modelagem matemática e a aplicar matemática em diferentes áreas do conhecimento; Xu *et al.* (2022) argumentam que na concepção de alguns professores de matemática e modeladores profissionais, os alunos devem aprender as fases envolvidas no fazer modelagem matemática; Ramírez-Montes, Henriques e Carreira (2021) argumentam que o desenvolvimento de competências de modelagem matemática se dá por meio das rotas utilizadas pelos estudantes enquanto percorrem o ciclo de modelagem matemática; Cahyono *et al.* (2020) considera que o uso de um programa que combina trilhas matemáticas e realidade aumentada pode promover o desenvolvimento de competências de modelagem matemática.

> O EBOCA [Esquema da Base de Orientação Completa da Ação] de modelagem está constituído de operações que retratam as fases de modelação sob a perspectiva da contradição, na busca do desconhecido na intenção de solucionar o problema discente. A forma com que está esquematizado é uma representação didática de orientação externa tipo III, dispondo de critérios para monitorar as ações, para orientação interna a fim de alcançar habilidades de formular problema discente, construir núcleo conceitual e procedimental, solucionar o problema discente e analisar a solução oriundas de situações problemas em modelagem matemática (Wakiyama; Mendoza, 2021, p. 12). [*Por meio de um EBOCA*]

> [...] A Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece e ao mesmo tempo aprende a arte de modelar, matematicamente (Pires; Costa; Boiago, 2020, p. 81). [*Aprender fazer modelagem matemática e a aplicar matemática em diferentes*

> *áreas do conhecimento*]
>
> De acordo com a interpretação das respostas da terceira e última questão, pode-se verificar que a atividade foi de grande importância para os alunos, em função de tê-los preparado para aplicar a matemática em diversas áreas e situações do cotidiano (Rehfeldt *et al*., 2018, p. 116). [*Aprender fazer modelagem matemática e a aplicar matemática em diferentes áreas do conhecimento*]
>
> No grupo com a perspectiva educacional aplicada, o MM3 considerou a modelagem uma habilidade que os alunos devem aprender com o propósito de servir e desenvolver seu país. Assim, ele enfatizou que os alunos devem aprender as etapas do procedimento de modelagem com o objetivo de resolver problemas do mundo real. O MT2 enfatizou que, em vez de simplesmente empregar modelos existentes, a aprendizagem de modelagem deve abranger o processo desde o desenvolvimento inicial do modelo até seu uso na resolução de problemas do mundo real. Da mesma forma, ME4 comparou o aprendizado do procedimento de modelagem com a programação, enfatizando as etapas, bem como a incerteza dessas etapas. Além disso, ME4 enfatizou a aprendizagem do pensamento de modelagem, que se referia a 'não apenas usar meios matemáticos para resolver problemas do mundo real, mas também como […] e quando usá-los' (Xu *et al*., 2022, p. 686). [*Aprender as fases envolvidas no fazer modelagem matemática*]
>
> Competências de modelagem mais fortes foram evidentes nos grupos que realizaram rotas de modelagem não linear, pois esses grupos refletiram sobre os procedimentos matemáticos usados para desenvolver o modelo e usaram adequadamente seus conhecimentos de SLE [Sistemas de Equações Lineares], matriz aumentada e conjunto de soluções em $\mathbb{R}_n$. Essas competências não foram reveladas pela maioria dos grupos que realizaram percursos lineares, o que reflete suas dificuldades em criar modelos reais, principalmente associadas a uma compreensão limitada do contexto, resultando em uma interpretação inadequada das informações fornecidas (Ramírez-Montes; Henriques; Carreira, 2021, p. 19). [*Por meio de rotas de modelagem matemática*]
>
> Este programa educacional contribui para a melhoria das habilidades de modelagem matemática. O uso da tecnologia RA [Realidade Aumentada] ajuda os alunos no processo de modelagem matemática, especialmente no estágio de compreensão de problemas do mundo real e na construção de modelos reais, bem como na criação de modelos matemáticos a partir de modelos do mundo real. Além disso, experimentos de campo também mostraram que havia uma relação entre as técnicas instrumentadas no programa e a modelagem matemática construída durante o processo de instrumentação (Cahyono *et al*., 2020, p. 189). [*Por meio de trilhas matemáticas e realidade aumentada*]

Um quarto traço característico indica que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões*, por meio da desmitificação da imagem de uma matemática neutra, da compreensão do papel da matemática nos debates sociais e na compreensão do mundo, da valorização da matemática, do desenvolvimento do conhecimento reflexivo, da criatividade e da capacidade de tomada de decisões ao resolver problemas de esferas sociais, políticas e econômicas (Moura; Alves, 2022; Souza, 2021; Silva; Silva; Madruga, 2019; Pires; Costa; Boiago, 2020; Silva; Madruga; Silva, 2019; Rehfeldt *et al*., 2018; Littig *et al*., 2019). Essas inferências geralmente se fundamentam na perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática na Educação Matemática e em pressupostos da Educação Matemática Crítica.

> Quando falamos em uma Modelagem Matemática voltada para aspectos sociocríticos em sala de aula, nos referimos a uma abordagem de acordo com a Educação Matemática Crítica, cujo ponto de encontro está na aprendizagem dos conceitos matemáticos vinculados ao cotidiano do estudante. As atividades metodológicas devem conduzi-los a uma participação crítica na sociedade, com oportunidade de interação social, tanto na procura quanto na análise e validação de um modelo advindo de uma questão-problema, resultando em reflexões sobre o erro ou a necessidade de reformulações (Moura; Alves, 2022, p. 14). [*Desenvolvimento da criticidade*]
>
> Os modelos matemáticos, construídos em atividades de modelagem em sala de aula, proporcionam um novo olhar sobre os conceitos matemáticos. Ao mesmo tempo em que o aluno se envolve com questões formais de determinado conteúdo, ele vivencia uma aplicação. Os conteúdos matemáticos adquirem significados. Embora possam ser simples, tais modelos são produtos de um processo de investigação, de criatividade, de tomada de decisões (Souza, 2021, p. 244). [*Imagem de matemática, criatividade e da capacidade de tomada de decisões*]
>
> Houve contribuição na formulação de conjecturas, quando os alunos, no grupo G2 – futebol, sistematizaram que era preciso aumentar a força empregada pelo atleta para que a velocidade do corpo/objeto aumentasse; dessa forma aumenta também a altura máxima atingida e o alcance dele. Nesse sentido, houve um despertar para o senso crítico nos alunos, senão em todos, mas em boa parte, pois argumentaram sobre fatores que interferiam no processo investigativo (Silva; Silva; Madruga, 2019, p. 808). [*Desenvolvimento da criticidade*]
>
> Por meio dos resultados alcançados, os alunos estabeleceram relações entre o consumo real e o valor a ser pago na conta de água, concluindo que são cobradas altas tarifas nas diversas faixas de consumo e, para o consumo de até $10m^3$, é estipulado um valor fixo a pagar, o que não é coerente com uma pessoa que atingiu um consumo menor no período de um mês. Essas discussões estão pautadas pelas vertentes da Educação Matemática Crítica, que postula que a Matemática é uma ferramenta que promove a compreensão de mundo e possibilita ao seu usuário o desenvolvimento do senso crítico e do poder de argumentação (Pires; Costa; Boiago, 2020, p 99). [*Desenvolvimento da criticidade e compreensão do mundo*]
>
> A modelagem matemática, sob a perspectiva sociocrítica, se sustenta num ambiente de problematização e investigação e as intencionalidades matemáticas do professor podem não estar bem definidas. [...] Portanto, a aprendizagem é reconhecida pela capacidade do aluno de se envolver em discussões matemáticas, técnicas e reflexivas na busca da solução para o problema (Littig *et al.*, 2019, p. 10). [*Desenvolvimento do conhecimento reflexivo*]
>
> A TSD também tem potencial para contribuir com o desenvolvimento do conhecimento reflexivo em uma atividade de modelagem. O conhecimento reflexivo é observado quando o aluno analisa e avalia os modelos matemáticos com potencial para resolver situações reais. Nesse sentido a Teoria da situação Didática potencializa esse desenvolvimento na etapa de validação quando o aluno busca convencer os sujeitos do meio didático da veracidade dos modelos e elementos matemáticos (Littig *et al.*, 2019, p. 12). [*Desenvolvimento do conhecimento reflexivo*]

O quinto traço característico é que *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*. De acordo com os textos, os estudantes geralmente trabalham em grupo, o que promove a aprendizagem colaborativa (Borssoi; Silva; Ferruzzi, 2021), o compartilhamento e socialização de conhecimentos (Silva; Madruga; Silva, 2019), a confiança dos estudantes para explorar suas dificuldades e opiniões (Rehfeldt *et al.*, 2018), percepção de que o conhecimento resulta da interação (Huf; Burak; Pinheiro, 2021), o desenvolvimento de habilidades técnicas transversais, como falar em público, bem como o desenvolvimento da fluência tecnomatemática (Taranto; et al., 2022).

> De forma geral, no desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática que investigamos, evidenciamos que os envolvidos se retroalimentam e as palavras de um acionam novas ideias e respostas no outro que, juntos, chegam à solução da situação de forma síncrona. Assim, enquanto os alunos realizam seus procedimentos em grupo, falam a respeito do que fazem, questionando e, diversas vezes, esclarecendo o que estão realizando e suas falas, além de conduzirem a realização da atividade, a orientam, tendo em vista que, ao 'se ouvir', o aluno tem a oportunidade de observar um procedimento impreciso ou incorreto e corrigi-lo, realizando uma interação consigo mesmo (Borssoi; Silva; Ferruzzi, 2021, p. 955). [*Aprendizagem colaborativa*]

> O trabalho em grupo foi primordial, uma vez que oportunizou a partilha de conhecimento e socialização do que estava sendo aprendido. Essa aprendizagem partiu de uma temática familiar aos alunos: esportes olímpicos, que possibilitou relacionar um conteúdo matemático a um contexto real. (Silva; Madruga; Silva, 2019, p. 114). [*Compartilhamento e socialização de conhecimentos*]

> [....] um dos aspectos observados foi que o trabalho em grupo trouxe maior confiança aos alunos na hora de exporem suas dificuldades e opiniões (Rehfeldt *et al.*, 2018, p. 116). [*Confiança dos estudantes para explorar suas dificuldades e opiniões, por meio do trabalho em grupo*]

> No início do trabalho em grupos os estudantes mostraram dificuldade, pois estavam habituados a apenas copiar de quem conseguia fazer primeiro. No decorrer da atividade percebem que o conhecimento resulta da interação e dificilmente é apenas um aluno que se destaca, pois todos trabalham, em conjunto, no mesmo objetivo (Huf; Burak; Pinheiro, 2021, p. 469). [*Percepção de que o conhecimento resulta da interação*]

> Os alunos foram incentivados a pensar criticamente para aplicar seus conhecimentos e habilidades aos desafios do mundo real, seguindo as dicas do que foi ensinado durante as palestras. Além disso, desenvolveram habilidades técnicas e transversais, como falar em público (Taranto *et al.*, 2022, p. 37). [*Habilidades técnicas e transversais, como falar em público, bem como o desenvolvimento da fluência tecnomatemática*]

> Uma evidência de fluência tecnomatemática surge do processo de expressão e resolução de problemas através do uso da tecnologia. Este processo pode ser caracterizado pela capacidade de combinar conhecimentos e habilidades básicas matemáticas e tecnológicas. Estes estão constantemente interligados para desenvolver o pensamento tecnomatemático (no sentido de novas formas de conhecer e compreender) e uma comunicação eficaz através de um discurso tecnomatemático (Taranto *et al.*, 2022, p. 37-38). [*Habilidades técnicas e transversais, como falar em público, bem como o desenvolvimento da fluência tecnomatemática*]

Um sexto traço característico é que *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares*, gerando uma mudança de atitude em relação à dinâmica de sala de aula, na qual o estudante se torna sujeito ativo na sua construção de conhecimento e corresponsável pela aprendizagem (Souza, 2021; Silva; Silva; Madruga, 2019; Huf; Burak; Pinheiro, 2021; Huf; Burak, 2018; Taranto *et al.*, 2022).

> Em atividades de modelagem, o aprendiz deixa de ser um mero espectador para assumir a condição de sujeito ativo no processo de construção dos seus conhecimentos matemáticos. Daí o principal valor pedagógico dessa proposta de ensino (Souza, 2021, p. 244). [*Estudante se torna sujeito ativo na sua construção de conhecimento*]
>
> Em se tratando da Modelagem Matemática, essa possibilitou aos alunos não somente aprender o conteúdo Função Quadrática, mas a se posicionar de maneira diferente nas situações investigativas, deixando de atuar em sala de aula como simples expectadores e tornando-se indivíduos ativos e pensantes (Silva; Silva; Madruga, 2019, p. 808). [*Estudante se torna sujeito ativo na sua construção de conhecimento*]
>
> Promove os estudantes de objetos a sujeitos da construção do conhecimento ao imprimir uma dinâmica diferente à aula, por meio da qual o professor incentiva e estimula a busca de soluções próprias e promove a mobilização do conhecimento construído. Isso evidencia que o desenvolvimento de atividades de modelagem propicia uma ruptura com a organização curricular de forma linear (Huf; Burak; Pinheiro, 2021, p. 471). [*Mudança da dinâmica da sala de aula*]
>
> Com a Modelagem Matemática as nossas aulas se tornaram mais dinâmicas, os estudantes puderam conjeturar e propor hipóteses para as resoluções, não se centrando apenas em seguir modelos pré-estabelecidos e fornecidos pelo professor. Estudantes e professor, em conjunto, construíram conhecimentos e construíram à formalização matemática, como no caso, a elaboração de uma expressão matemática que pudesse ser aplicada em questões que envolvem acréscimo percentual de um valor (Huf; Burak, 2018, p. 173). [*Mudança da dinâmica da sala de aula*]
>
> O processo de ensino e aprendizagem caracteriza-se por uma aprendizagem autônoma e autocontrolada, ou seja, os alunos decidem as suas próprias formas de abordar o problema e não há intervenção dos experimentadores ou do professor da sala de aula (Taranto *et al.*, 2022, p. 37). [*Estudantes são corresponsáveis pela aprendizagem*]

O sétimo traço característico não se refere especificamente ao conteúdo da aprendizagem, mas ao meio em que diferentes conteúdos são aprendidos, considerando-se que *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática*, promovidos pelo desenvolvimento destas atividades, devido ao uso recursos tecnológicos (Cahyono *et al*., 2020; Silva; Silva; Madruga, 2019), do contexto da situação-problema ser de interesse dos estudantes (Pires; Costa; Boiago, 2020; Rehfeldt *et al*., 2018; Huf; Burak; Pinheiro, 2021; Silva; Madruga; Silva, 2019), ao levar em conta a influência de culturas na disposição de modelagem matemática (Supriadi, 2020), ao vivenciar a pesquisa operacional (Taranto *et al*., 2022).

> [...] Isso não significa que o recurso do papel e lápis impossibilite obter resultados satisfatórios, mas o software concede um feedback imediato e o usuário pode fazer inferências a respeito do modelo, assim que é executado, de maneira dinâmica, muito próximo da realidade. A facilidade desperta mais interesse e motivação nos alunos pelo aprendizado (Silva; Silva; Madruga,

2019, p. 808). [*Uso recursos tecnológicos*]

Os resultados mostram ainda que, em geral, a motivação dos alunos para se envolver nesta atividade é mais determinada por eles próprios. [...] Os alunos consideram as atividades que seguem como interessantes ou agradáveis [...] e significativas ou valiosas [...]. O resultado da entrevista mostra que os alunos se envolvem em atividades para seu próprio prazer ou satisfação, e seu envolvimento é voluntário. Com base na entrevista, os alunos relataram que o uso de dispositivos móveis com recurso RA Realidade Aumentada] para atividades de aprendizagem de matemática ao ar livre tornou-se uma atração e aprenderam como aplicar a matemática no mundo real com a ajuda do aplicativo móvel. Esses achados sugerem, portanto, que o programa tem sido bem-sucedido em oferecer atividades que podem motivar intrinsecamente os alunos a se envolverem na aprendizagem matemática. Os alunos ficaram satisfeitos em fazer trilhas matemáticas em sua escola (Cahyono, *et al.*, 2020, p. 186-187). [*Uso recursos tecnológicos*]

A Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece [...] (Pires; Costa; Boiago, 2020, p. 81). [*Contexto da situação-problema ser de interesse dos estudantes*]

Analisando as respostas dos alunos, é possível verificar que esta atividade estimulou o interesse deles em aprender a matemática e também possibilitou o compartilhamento de conhecimentos matemáticos entre eles. Além disso, essa prática representou algo desafiador, pois os instigava a resolver os problemas, deixando-os com a expectativa de sempre ter algo novo a dizer (Rehfeldt *et al*., 2018, p. 116). [*Contexto da situação-problema ser de interesse dos estudantes*]

A percepção do estudante E14 que a turma se empenhou mais, evidencia que quando os estudantes trabalham a partir do seu interesse eles são mais motivados para desenvolver as atividades. [...] Para os estudantes, as aulas de matemática, mediadas pela metodologia da Modelagem Matemática na escola do campo, tornam-se mais interessantes e atrativas, quando comparada a aulas de forma tradicional. Muitos afirmam não gostar da Matemática, mas que com Modelagem Matemática identificam-se mais com esta área do conhecimento, por ver a utilização no contexto da vida do campo e se sentirem participantes das tomadas de decisões como autores do processo de aprendizagem desde a escolha do tema (Huf; Burak; Pinheiro, 2021, p. 468). [*Contexto da situação-problema ser de interesse dos estudantes*]

A sensação de confiança na aprendizagem da matemática aumenta com o uso da cultura de forma que ela influencia o desempenho da aprendizagem e está de acordo com as descobertas (Supriadi, 2020, p. 1419). [*Influência de culturas na disposição de modelagem matemática*]

A partir dos estudos de caso e das análises quantitativas realizadas, conclui-se que a implementação de um caminho de modelagem como o ROAR pode ser abordada com sucesso por alunos comuns do ensino médio. Os alunos experimentaram bons resultados de aprendizagem que refletem todos os objetivos associados à modelagem, variando de objetivos psicológicos, como motivação (por exemplo, lembre-se de que todos os membros dos três grupos examinados preferiram pular o intervalo para continuar trabalhando no Problema 4.4) para meta- aspectos como a promoção de atitudes de trabalho

> para objetivos pedagógicos, ou seja, melhorar a compreensão do mundo que nos rodeia. Tudo isso apoia nossa posição de que é apropriado incluir PO [Pesquisa Operacional] e seus tipos de problemas em aulas regulares de matemática, claramente não todos os dias, mas regularmente (Taranto *et al.*, 2022, p. 38). [*Vivenciar a pesquisa operacional*]

Nessa seção, compara-se os diferentes usos do termo aprendizagem no que diz respeito aos conteúdos e aos meios da aprendizagem em atividades de modelagem matemática. Sete traços característicos foram identificados, que sugerem que em atividades de modelagem matemática: (i) *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos*; (ii) os *estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas*; (iii) *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática*; (iv) *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões;* (v) *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*; (vi) *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares*; (vii) *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática.*

3.2.3 Em busca de uma tecitura para a aprendizagem em modelagem matemática

Nessa subseção, busca-se ver relações entre os entendimentos de modelagem matemática, os entendimentos de aprendizagem e as inferências produzidas acerca da aprendizagem a partir das ações dos estudantes em atividades de modelagem.

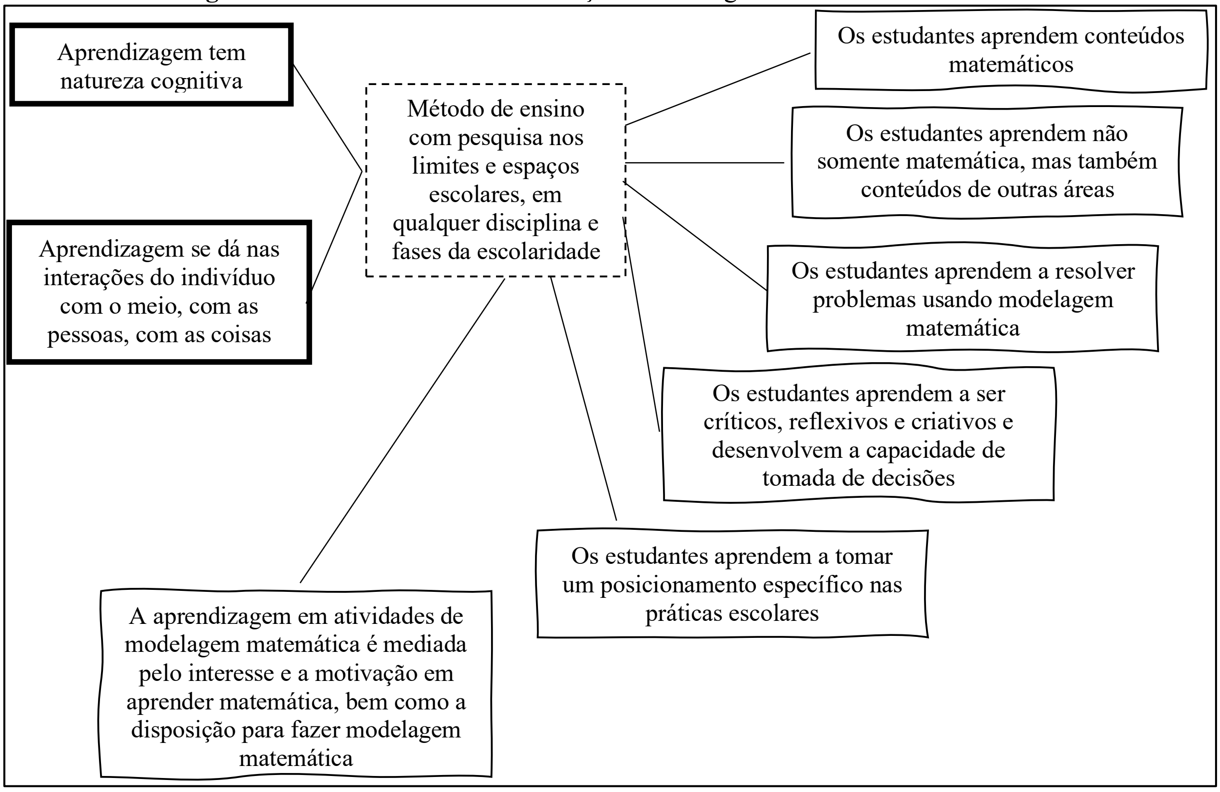
Ao olhar para os usos do termo aprendizagem, pode-se ver uma complicada rede de semelhanças de família formada por traços característicos que perpassam os entendimentos de aprendizagem, os entendimentos de modelagem matemática na Educação Matemática e as inferências sobre a aprendizagem em atividades de modelagem matemática. Não há um único fio condutor que unifica todos os traços característicos identificados, mas uma espécie de "tecitura" é formada a partir de vários traços que nos permite compreender o conceito de aprendizagem na Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Moura e Alves (2022), Wakiyama e Mendoza (2021), Silva, Silva e Madruga (2019), Pires, Costa e Boiago (2020), Silva, Madruga e Silva (2019) e Rehfeldt *et al.* (2018) assumem o entendimento de Maria Salet Biembengut, em que a autora denomina sua concepção de modelagem na Educação como modelação, definida como um "método de ensino com pesquisa nos limites e espaços escolares, em qualquer disciplina e fase da escolaridade" (Biembengut, 2016, p. 171).

Nesses estudos, percebe-se uma predominância do traço característico *aprendizagem tem natureza cognitiva* nos entendimentos de aprendizagem, com base em teorias cognitivas, como a aprendizagem significativa (Moura; Alves, 2022), formação por etapas das ações mentais de Galperin (Wakiyama; Mendoza, 2021), construcionismo contextualizado (Silva; Silva; Madruga, 2019), teoria dos registros de representação semiótica (Pires; Costa; Boiago, 2020). Destes estudos, apenas Silva, Silva e Madruga (2019) apresentam adicionalmente outro traço característico, *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas* referente ao entendimento de aprendizagem.

No que tange às inferências das ações dos estudantes relativamente à aprendizagem, percebe-se os seguintes traços característicos nos estudos elencados nesse entendimento de modelagem matemática: *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos* (Moura; Alves, 2022; Pires; Costa; Boiago, 2020; Silva; Madruga; Silva, 2019; Rehfeldt *et al.*, 2018); *os estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas* (Silva; Madruga; Silva, 2019); *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática* (Wakiyama; Mendoza, 2021; Pires; Costa; Boiago, 2020); *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões* (Moura; Alves, 2022; Silva; Silva; Madruga, 2019; Pires; Costa; Boiago, 2020; Rehfeldt *et al.*, 2018); *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares* (Silva; Silva; Madruga, 2019); *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática* (Silva; Silva; Madruga, 2019; Pires; Costa; Boiago, 2020; Rehfeldt *et al.*, 2018). Dessa maneira, relativamente a esse entendimento de modelagem matemática, as conexões estabelecidas são apresentadas na Figura 3.

Figura 3 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem como método de ensino

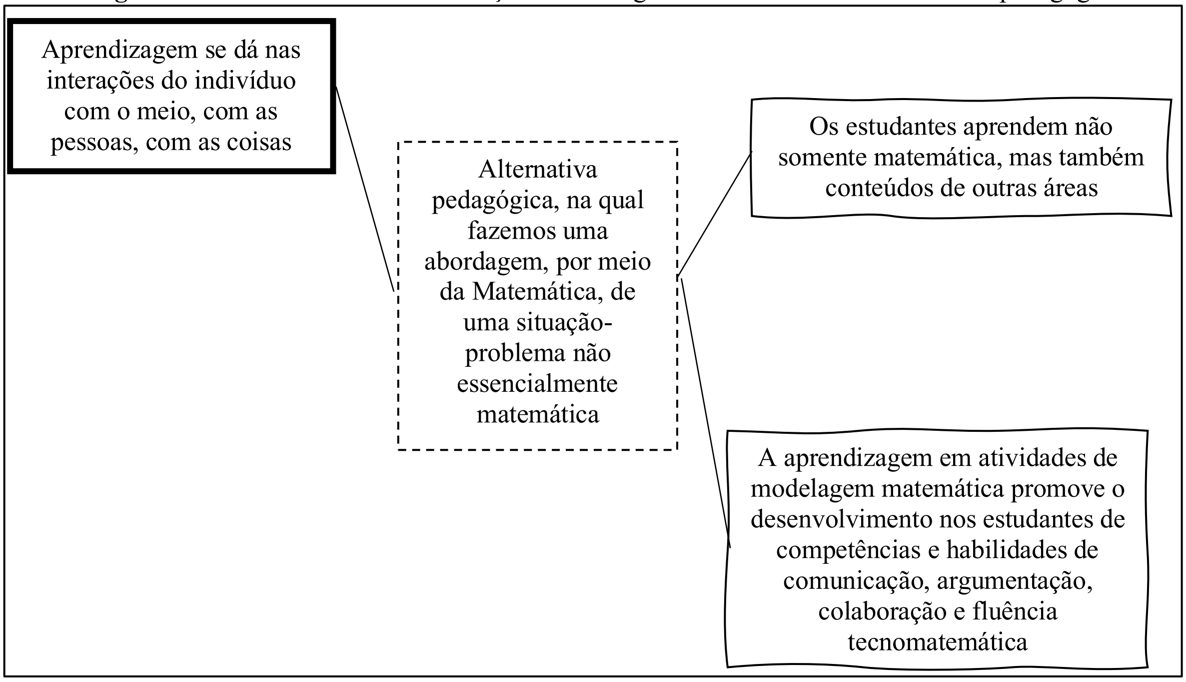


Fonte: Os autores.

Borssoi, Silva e Ferruzzi (2021) apresentam o entendimento de modelagem matemática proposto por Lourdes Maria Werle de Almeida, como uma "alternativa pedagógica, na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática" (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 17).

Nesse estudo, identifica-se o traço característico *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas* e os seguintes traços característicos das inferências produzidas: *os estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas; a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*, tendo como aporte teórico o construto da aprendizagem colaborativa, como mostra a Figura 4.

Figura 4 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como alternativa pedagógica



Fonte: Os autores.

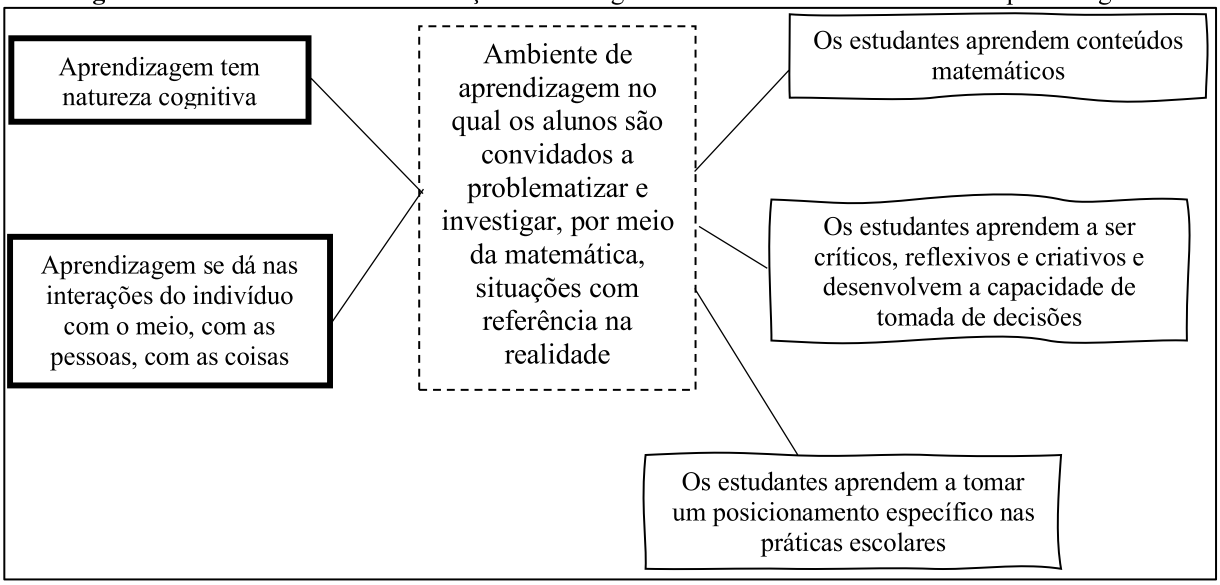
Littig *et al.* (2019) e Souza (2021) assume o entendimento de Jonei Cerqueira Barbosa como um "ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade" (Barbosa, 2004, p. 3). Esse ambiente estrutura-se pela problematização e investigação. Segundo Barbosa (2004, p. 3) "o primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas".

Os entendimentos de aprendizagem nesses textos revelam que *a aprendizagem tem natureza cognitiva* (Souza, 2021) e *se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas* (Littig *et al.*, 2019), ao recorrerem à teoria da aprendizagem significativa e a teoria das situações didáticas para explicitar as relações entre professor, aluno e saber, respectivamente.

Em relação às inferências das ações dos estudantes acerca da aprendizagem, pode-se notar, segundo esses estudos, que: *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos* (Souza, 2021; Littig *et al.*, 2019); *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares* (Souza, 2021); *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões* (Souza, 2021; Littig et al, 2019).

As conexões entre esse entendimento de modelagem matemática e os traços característicos relativos aos entendimentos de aprendizagem e às inferências são apresentadas na Figura 5.

Figura 5 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como ambiente de aprendizagem



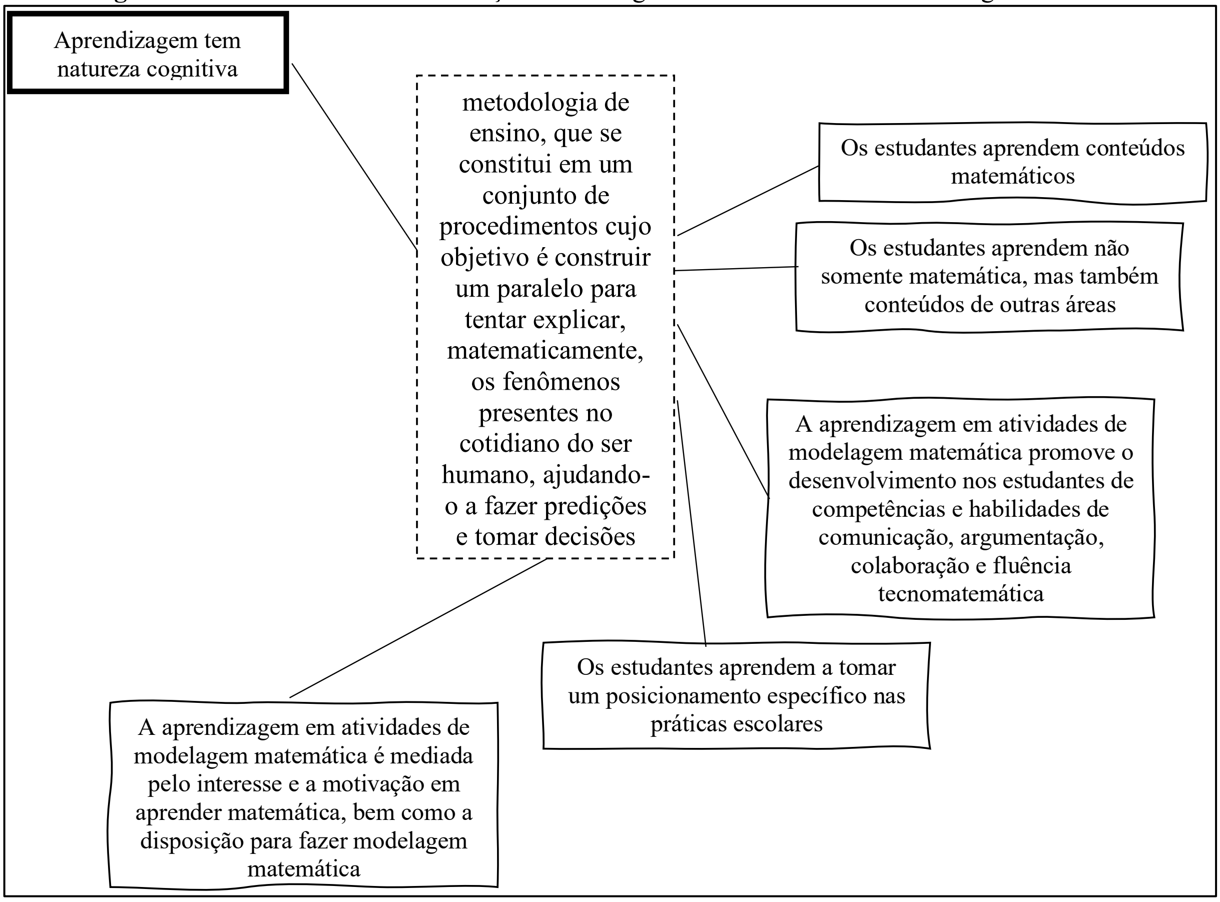
Fonte: Os autores.

Huf, Burak e Pinheiro (2021) e Huf e Burak (2018) recorrem ao entendimento de modelagem matemática de Dionísio Burak, como metodologia de ensino, que "constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões" (Burak, 1992, p.62). Esse entendimento parte de duas premissas: 1) o interesse do grupo de pessoas envolvidas; 2) os dados são coletados onde se dá o interesse do grupo de pessoas envolvidas (Burak, 2010).

Em relação ao entendimento de aprendizagem, Huf e Burak (2018) apresentam o traço característico *aprendizagem tem natureza cognitiva*, com base na teoria da aprendizagem significativa. Huf, Burak e Pinheiro (2021) não apresentam um entendimento de aprendizagem.

Para esses autores, é possível inferir das ações dos estudantes em atividades de modelagem que: *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos* (Huf; Burak; Pinheiro, 2021); *os estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas* (Huf; Burak; Pinheiro, 2021; Huf; Burak, 2018); *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática.* (Huf; Burak; Pinheiro, 2021); *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática* (Huf; Burak; Pinheiro, 2021); *os estudantes aprendem tomar um* *posicionamento específico nas práticas escolares* (Huf; Burak, 2018) (Figura 6).

Figura 6 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como metodologia de ensino

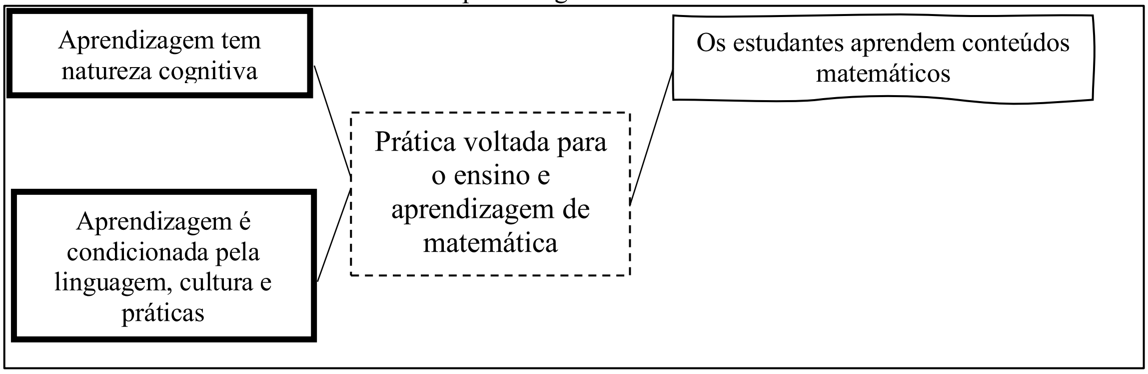


Fonte: Os autores

Brito e Almeida (2021) apresentam um entendimento próprio de modelagem matemática na Educação Matemática, a partir de Bassanezi (2002). Para os autores, a modelagem matemática é uma prática voltada para o ensino e aprendizagem de matemática. O termo prática é usado pelos autores, não para designar uma possível diferenciação de teoria e prática, uma vez que teoria e prática se retroalimentam.

O entendimento de aprendizagem desse texto revela que a *aprendizagem tem natureza cognitiva*, ao construírem um quadro teórico estruturado no desenvolvimento de habilidades de aprendizagem de Geometria, e que a *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas* ao ponderarem que a aprendizagem de Geometria pode ser considerada como apreensão/aquisição de um modo linguístico. Dessa maneira, infere-se que *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos* em modelagem (Figura 7).

Figura 7 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como prática voltada para o ensino e aprendizagem de matemática

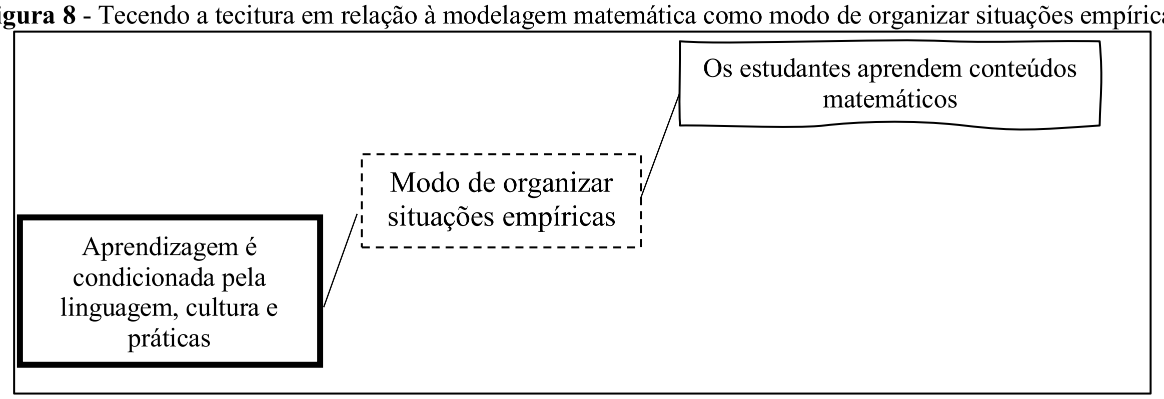


Fonte: Os autores.

Souza e Barbosa (2019), não recorrem a um entendimento de modelagem matemática já consolidado na literatura, entendendo-a no "âmbito escolar como um *modo de apresentar* situações empíricas e *de lidar* com elas. Centralizamos essas duas características pelo uso único da palavra *organização* de situações empíricas" (Souza; Barbosa, 2019, p. 49), assumindo como pressuposto que os enunciados matemáticos são normativos e podem ser usados para organizar situações empíricas, a partir da filosofia tardia de Wittgenstein e dos pensamentos de Anna Sfard.

O entendimento de aprendizagem desse estudo assume o traço característico de a que *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*, uma vez que a aprendizagem possui natureza exclusivamente discursiva. Na modelagem matemática os *estudantes aprendem conteúdos matemáticos,* por meio da produção discursiva dos alunos e do uso das regras como e quando (Figura 8).

Figura 8 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como modo de organizar situações empíricas

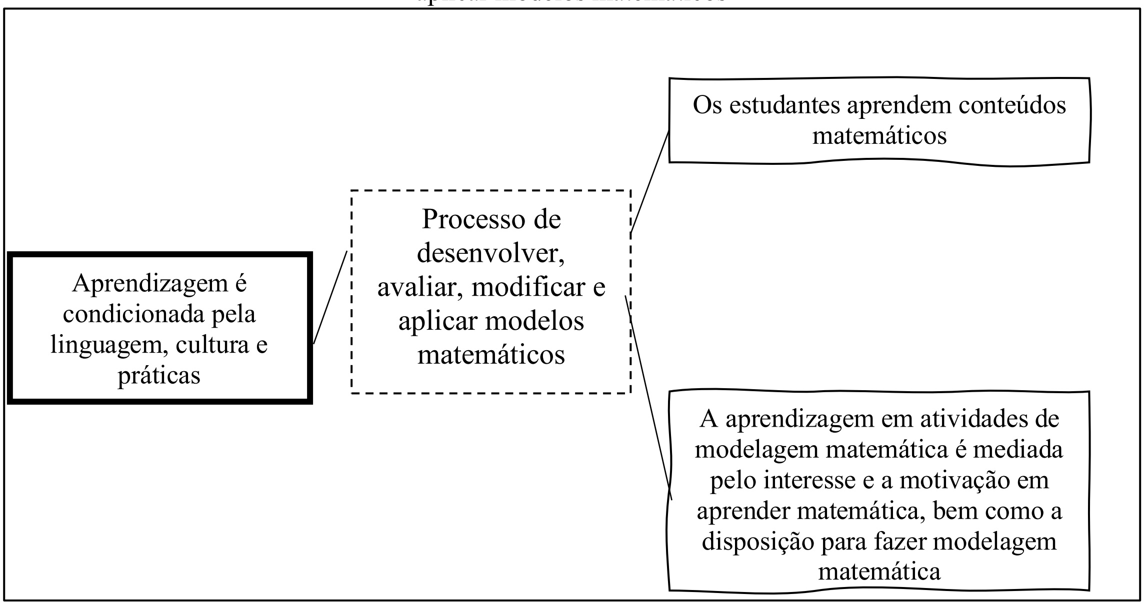


Fonte: Os autores.

Lowe, Carter e Cooper (2018) e Supriadi (2020) apresentam um entendimento de modelagem matemática a partir da noção de modelo matemático e seu papel na sociedade. Segundo Lowe, Carter e Cooper (2018, p. 5), "modelagem matemática é o processo de desenvolver, avaliar, modificar e aplicar modelos matemáticos". Para Supriadi (2020, p. 1409), modelagem matemática "é um local de técnicas, equipamentos e equações que podem ser adaptadas para disciplinas exigentes. Em epidemiologia, os modelos matemáticos geralmente definem interações entre pessoas ou populações e outras pessoas, populações ou ambientes".

Esses estudos indicam no entendimento de aprendizagem que a *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas* (Supriadi, 2020) e que: *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos* em modelagem matemática, por meio de interrelações entre matemática e diferentes áreas do conhecimento (Lowe; Carter; Cooper, 2018); *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática.* (Supriadi, 2020) (Figura 9).

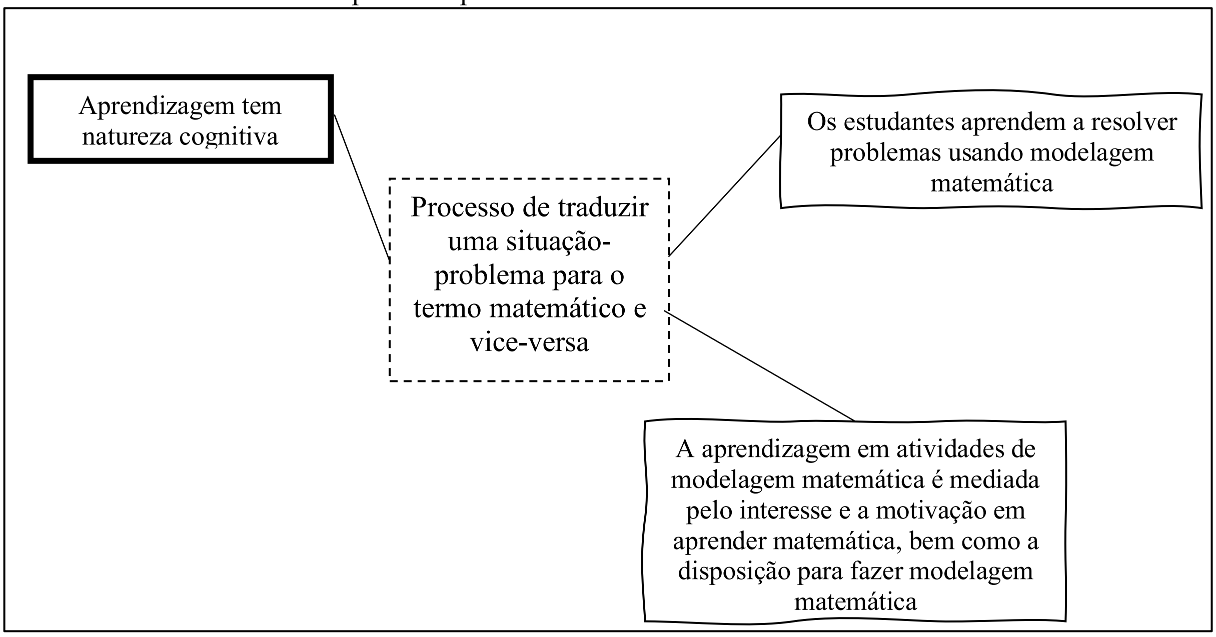
Figura 9 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem como processo de desenvolver, avaliar, modificar e aplicar modelos matemáticos



Fonte: Os autores.

Cahyono *et al.* (2020, p. 181-182) define modelagem matemática como um processo "de traduzir uma situação-problema para o termo matemático e vice-versa". Esse processo é identificado por meio de um ciclo que requer competências de modelagem matemática. O entendimento de aprendizagem é identificado como tendo *natureza cognitiva*, ao conceituar aprendizagem em termos de desenvolvimento de competências e habilidades. Revela-se nas inferências que *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é* *mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática*, de tal forma que o interesse pode influenciar no desenvolvimento de competências de modelagem matemática. Nesse sentido, infere-se que *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática* (Figura 10).

Figura 10 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como processo de traduzir uma situação-problema para o termo matemático e vice-versa

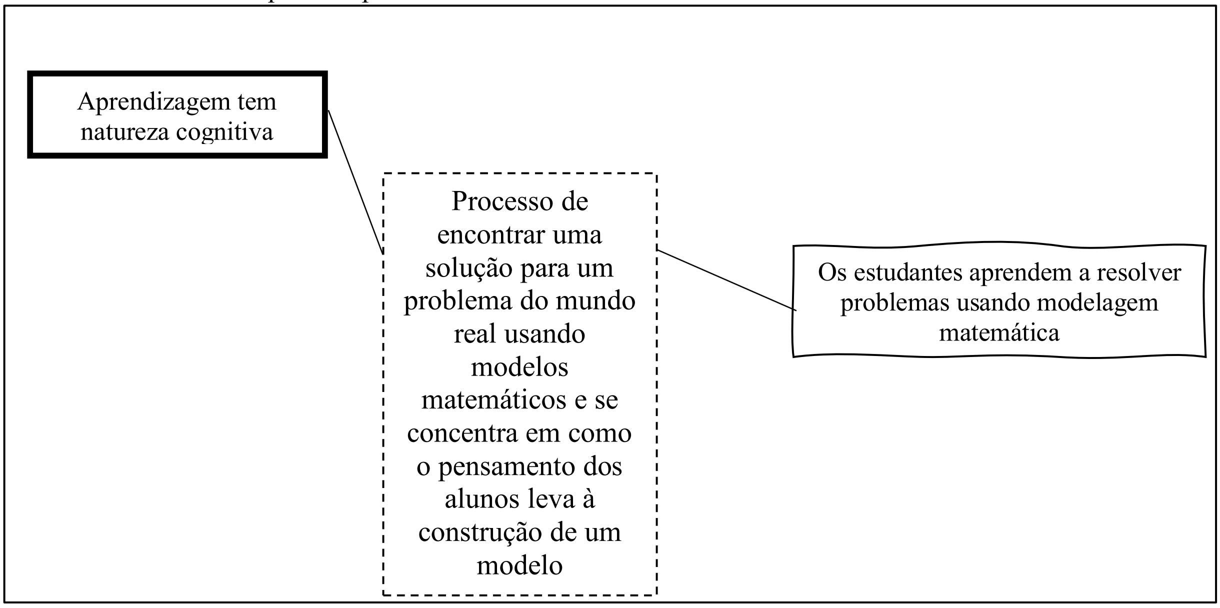


Fonte: Os autores.

Ramírez-Montes, Henriques e Carreira (2021, p.1) considera a modelagem matemática em uma perspectiva cognitiva, como “processo de encontrar uma solução para um problema do mundo real usando modelos matemáticos e se concentra em como o pensamento dos alunos leva à construção de um modelo [...] como uma forma de encontrar respostas para questões da vida real”.

O entendimento de aprendizagem nesse texto indica que a *aprendizagem tem natureza cognitiva* e se articula com a ideia de que diferentes rotas podem ser usadas para percorrer o ciclo de modelagem a depender dos estilos de pensamento matemático dos estudantes e de suas experiências prévias. Em modelagem matemática, segundo esse texto, *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática* e os ciclos de modelagem matemática são uma forma de diagnosticar essas competências (Figura 11).

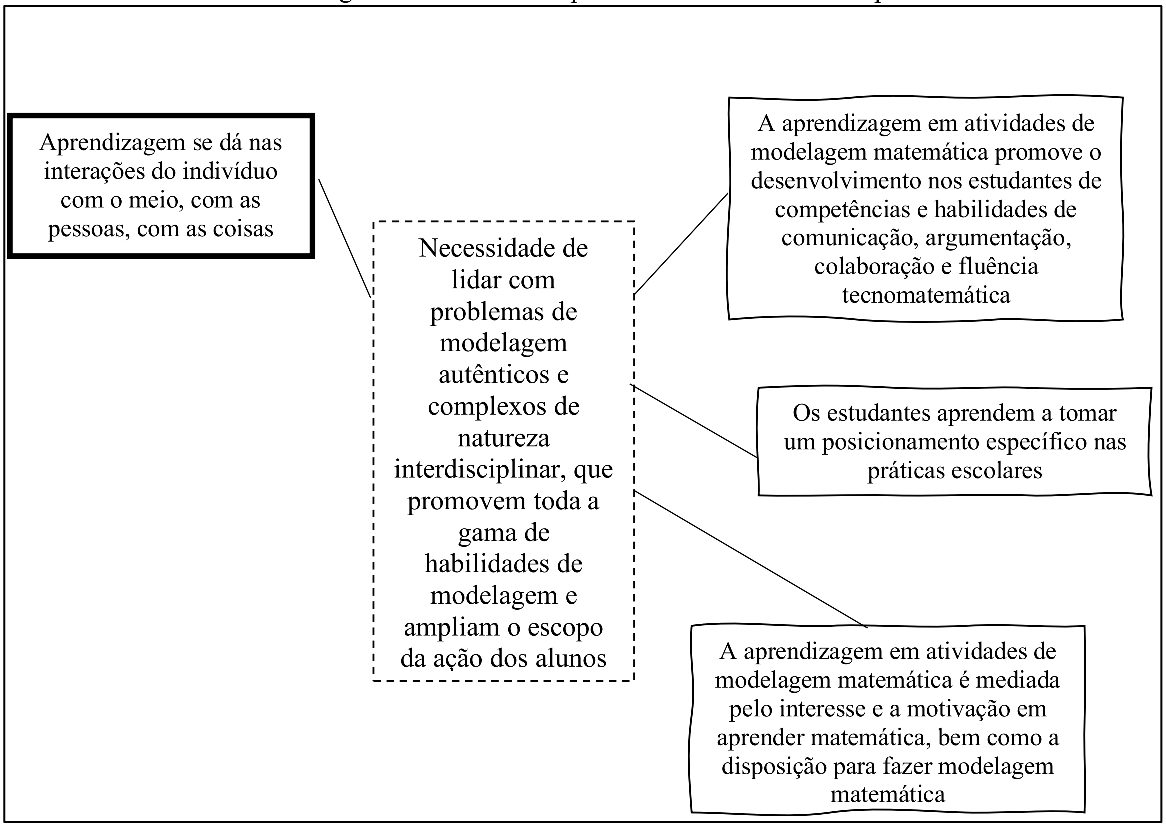
Figura 11 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como processo de encontrar uma solução para um problema do mundo real usando modelos matemáticos



Fonte: Os autores.

Taranto *et al.* (2022, p. 3) entendem a modelagem matemática na perspectiva realística ou da modelagem aplicada, que considera a “necessidade de lidar com problemas de modelagem autênticos e complexos de natureza interdisciplinar, que promovem toda a gama de habilidades de modelagem e ampliam o escopo da ação dos alunos”. O entendimento de aprendizagem desse estudo sugere que *a aprendizagem s*e *dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas* ao tomar como base teórica a aprendizagem colaborativa. Nas inferências das ações dos estudantes, identifica-se que: *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares*; *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*; *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática* (Figura 12).

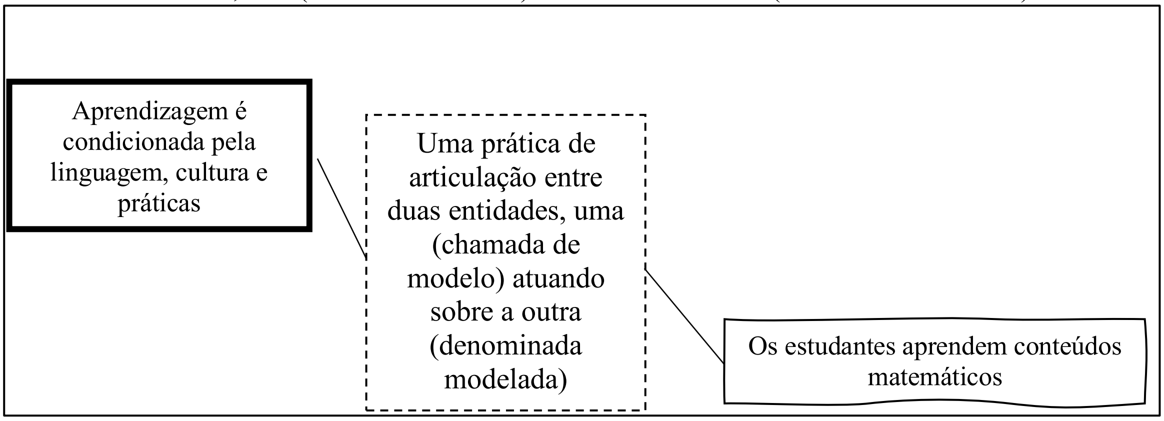
Figura 12 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como necessidade de lidar com problemas de modelagem autênticos e complexos de natureza interdisciplinar



Fonte: Os autores.

Distanciando-se de conceituações de modelagem matemática na literatura que separam matemática e realidade em dois mundos ou domínios, Cantoral, Moreno-Durazo e Caballero-Pérez (2018) entendem a modelagem matemática em uma perspectiva socioepistemológica, como “uma prática de articulação entre duas entidades, uma (chamada de modelo) atuando sobre a outra (denominada modelada). A intervenção no modelado é diversa e, portanto, pode ocorrer previsão, diagnóstico ou avaliação”. Esse texto discute essa perspectiva em relação ao uso da noção de variação em práticas da medicina e escolares, tomando a modelagem matemática como “uma forma de atividade humana associada à explicação e intervenção em fenômenos de mudança” (Cantoral; Moreno-Durazo; Caballero-Pérez, 2018, p. 87), evitando focar se o fenômeno fazia parte da realidade e o que pode ser definido como modelo matemático, mas considerando que a matemática é uma construção social presente na cultura do povo. O entendimento de aprendizagem, nesse estudo, revela que *a aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*. Além disso, mostra-se nas inferências, que *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos* (Figura 13).

Figura 13 - Tecendo a tecitura em relação à modelagem matemática como uma prática de articulação entre duas entidades, uma (chamada de modelo) atuando sobre a outra (denominada modelada)



Fonte: Os autores.

Se observamos os fios dessa tecitura, observamos que seis entendimentos de modelagem matemática apresentam o traço característico *aprendizagem tem natureza cognitiva*, quatro revelam que a *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas* e quatro indicam que a *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*, conforme a Figura 14.

Essas conexões sugerem que há uma predominância de uma perspectiva cognitiva nos entendimentos de aprendizagem identificados na literatura, cujo foco da atenção se dirige à cognição do indivíduo, aos seus estilos de aprendizagem, no modo como constrói conhecimento e atribui significados à objetos do mundo. No âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática, essa perspectiva (Kaiser; Sriraman, 2006) se evidencia nos textos de modo relacionado ao desenvolvimento de competências e habilidades e aos processos cognitivos requeridos aos alunos para desenvolver atividades de modelagem matemática, tendo os ciclos de modelagem matemático como suporte teórico (Borromeo Ferri, 2018, Perrenet; Zwaneveld, 2012; Doerr; Ärlebäck; Misfeldt, 2017) para os pesquisadores e professores realizarem inferências sobre a aprendizagem dos estudantes.

Os entendimentos de modelagem matemática que estão relacionados ao traço característico *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas* nos fornece um modo de ver a aprendizagem com foco nas interações entre os estudantes e entre estudantes e professor e nas interações do estudante com o meio (*milieu*), com base em lentes teóricas estruturadas no construto da aprendizagem colaborativa, no pressuposto de interação social na Zona de Desenvolvimento Proximal e nas teorias da Didática da Matemática. Essas interações não excluem a ideia de que a aprendizagem tem natureza cognitiva, pelo contrário, são elas entendidas como condições para que o indivíduo internalize conceitos matemáticos e objetos do mundo em sua estrutura cognitiva.

Dos entendimentos de aprendizagem que indicam que a *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*, um outro ponto de vista sobre a aprendizagem é considerado. Não é apenas a cognição do indivíduo considerada como foco das pesquisas sobre a aprendizagem dos estudantes em atividades de modelagem matemática, mas as condições externas são colocadas no centro da atenção: os usos que os estudantes fazem das linguagens, a cultura envolvida na sua forma de vida e os aspectos envolvidos nas práticas educativas.

Os pontos de vista dogmáticos surgem quando apenas um desses aspectos é considerado, por exemplo, ao ponderar que a aprendizagem tem natureza *exclusivamente* cognitiva, não levando em consideração as práticas sociais, culturais e linguísticas que o sujeito da aprendizagem está envolvido. Aprender, nesse ponto de vista dogmático, é um processo que, quando associado a atividades de modelagem matemática, pode ser interpretado como: internalização de objetos matemáticos de uma realidade objetiva, descobrindo-os a partir das interações entre sujeito e objeto, que sugere uma imagem essencialmente empirista; acesso a objetos matemáticos, independentes da realidade sensível e existentes previamente em um reino de verdades absolutas, que sugere uma imagem essencialmente platônica.

A aplicação dessas imagens exclusivistas pode levar à reducionismos no ideário de professores e pesquisadores, como considerar que apenas o uso empírico da matemática é suficiente para aprender, indicado por Tortola, Seki e Almeida (2022), ou considerar a aprendizagem apenas como a capacidade de usar e lidar com representações matemáticas, sugerido por Brito (2018). Ambos surgem de uma falta de atenção para o papel da linguagem na aprendizagem. Esse é justamente um ponto importante que nossa tecitura revela: tratar do conceito de aprendizagem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática envolve considerar a linguagem como um aspecto importante para compreender esse conceito.

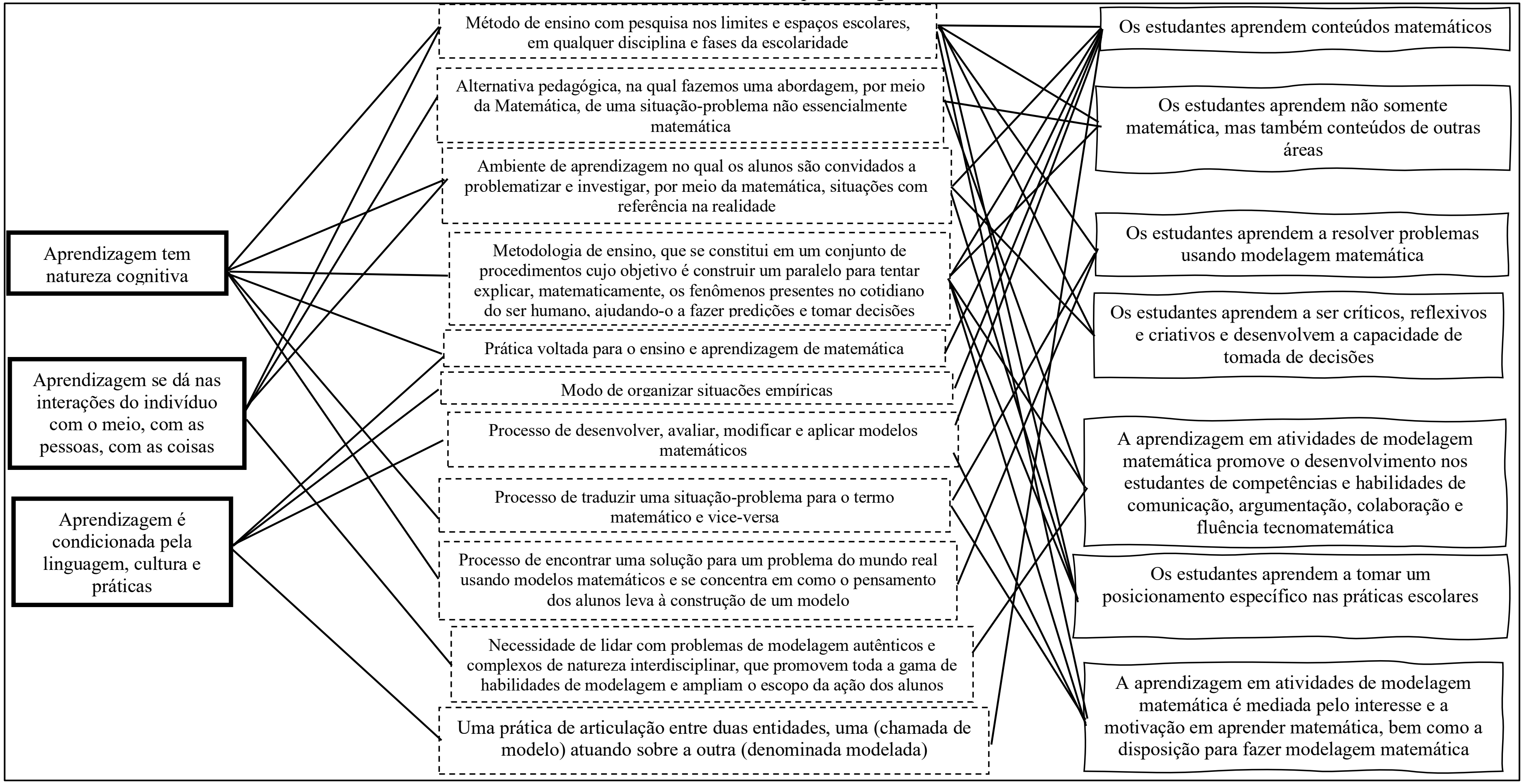
No que tange às inferências produzidas pelos textos com base nas ações dos estudantes relativamente à aprendizagem, pode-se dizer que os traços característicos obtidos estão relacionados àquilo que a literatura denomina de justificativas ou objetivos para inserção da modelagem matemática em práticas pedagógicas. Essas justificativas fornecem argumentos para inserção da modelagem matemática em práticas escolares e estão de acordo com objetivos da Educação Matemática na contemporaneidade.

Percebe-se na Figura 14 que nas inferências acerca da aprendizagem dos estudantes em atividades de modelagem matemática, há uma predominância do traço característico *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos*, com sete interações com os entendimentos de modelagem matemática, seguido dos traços *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática*, com cinco interações, e *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares*, com quatro interações. Ao serem vistos em conjunto, esses aspectos evidenciam um alinhamento com a justificativa psicológica, de Blum (2015), e se associa a ideia de modelagem para o bem da matemática, na qual, segundo Niss e Blum (2020), a modelagem matemática é considerada um meio para a aprendizagem matemática.

Por outro lado, o traço característico com menos interações é o *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões*, com duas interações com os entendimentos de modelagem matemática, seguido dos traços *os estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas*, *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática* e *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*, com três interações cada. Esses aspectos evidenciam uma menor incidência modos de ver a aprendizagem em atividades de modelagem matemática para além dos conteúdos matemáticos, de forma associada com as justificativas pragmática, formativa e cultural, conforme Blum (2015), e da matemática para o bem da modelagem, cuja matemática é vista como ferramenta para o desenvolvimento de competências de modelagem matemática, como indica Niss e Blum (2020).

As diferentes relações internas que foram estabelecidas entre os usos do termo aprendizagem na literatura mostram que diferentes modos de ver a aprendizagem em atividades de modelagem matemática podem ocorrer na tecitura formada pelos traços característicos desse conceito, como ilustra a Figura 14. Mostra-se também a importância de se evitar uma atitude dogmática, prendendo-se à um único ponto de vista, que privilegia determinados aspectos em detrimento de outros. Para tanto, é importante considerar a aprendizagem em ação, tal como ela ocorre em distintos jogos de linguagem que podem ser caracterizados no decorrer de atividades de modelagem matemática em diferentes contextos educacionais.

Figura 14 - Tecitura entre traços característicos do entendimento de aprendizagem, os entendimentos de modelagem matemática e os traços característicos referentes às inferências acerca da aprendizagem



Fonte: Os autores.

4 MOVIMENTO 2: APRENDIZAGEM EM AÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo, dirige-se a atenção para os jogos de linguagem associados à aprendizagem que emergem no desenvolvimento dessas atividades como uma ferramenta terapêutica para deliberar a respeito das funções que linguagem desempenha na aprendizagem em ação.

Com a finalidade de identificar jogos de linguagem, considera-se duas abordagens de modelagem, com as quais os estudantes podem ser inseridos em modos diferentes de aprender por meio de modelos matemáticos: análise de modelos e abordagem holística, na qual os estudantes desenvolvem o processo completo de uma atividade de modelagem matemática.

Em um primeiro momento, traz-se para o texto algumas especificidades da literatura sobre a análise de modelos e a construção de modelos em modelagem matemática. Em um segundo momento, direciona-se o olhar para a aprendizagem dos estudantes em atividades desenvolvidas em duas disciplinas diferentes de um curso de Licenciatura em Matemática.

4.1 ANÁLISE DE MODELOS, CONSTRUÇÃO DE MODELOS E MODELAGEM MATEMÁTICA

O termo modelo possui caráter polissêmico, pode ter diferentes significados a depender do sentido e do contexto em que é usado. Em um sentido epistemológico, os modelos são considerados um elemento importante para compreender como temos acesso ao conhecimento e a fatos do mundo.

Uma acepção aceita na epistemologia tradicional é que os modelos são representações (mentais ou não) que os seres humanos fazem de algo, seja uma ideia, um objeto, processo, fato ou sistema (D'Ambrósio, 1996; Ornek, 2008). Essa representação pressupõe um processo de abstração e de idealização, de modo que os fatores considerados fundamentais daquilo que está sendo representado devem ser levados em consideração e os aspectos não relevantes descartados.

Nessa direção, um modelo matemático pode ser entendido como uma representação, simplificada e idealizada, de uma situação da realidade, incorporando aspectos e características dessa situação por meio de uma estrutura matemática (Bassanezi, 2002; Blum; Niss, 1991; Ferri; Lesh, 2013; Niss; Blum, 2020). Klüber, Tambarussi e Mutti (2021) argumentam que essa acepção de modelo matemático pode levar a uma compreensão de que os signos matemáticos consistem em representações do real, aproximando-se de uma tese realista.

Sousa e Tortola (2021, p. 9) sugerem olhar os diferentes usos do termo modelo matemático, com o propósito de evitar uma concepção dogmática ao buscar uma generalização que adota um "critério único para o que denominamos [...] modelo matemático em atividades de modelagem matemática". Para os autores, um modelo matemático não pode ser entendido "como um fim em si só, mas é o que lança luz sobre o problema e viabiliza a explicação ou entendimento da matemática, de determinadas situações" (Sousa; Tortola, 2021, p. 5).

A depender do uso que é feito da estrutura matemática subjacente, os modelos matemáticos podem assumir diferentes papéis, como descritivo, em que a matemática é usada para descrever ou explicar uma determinada situação investigada, como normativo ou prescritivo, em que a matemática é usada para estabelecer normas, envolvendo juízos de valores, organizando ou estruturando a situação (Blum; Niss, 1991). Nesse sentido, os modelos matemáticos podem ser usados para descrever, explicar, predizer, prescrever situações, bem como para formulação de teorias a respeito de fenômenos científicos (Barbosa, 2009, Borromeo Ferri; Lesh, 2013; Sriraman; Lesh, 2006).

A modelagem matemática pode ser entendida como a atividade humana que busca uma solução para uma situação-problema, que não é matemática, por meio da construção e análise de modelos matemáticos (Martins; Almeida, 2021; Bassanezi, 2002; Meyer, 2020; Pollak, 2012, 2015).

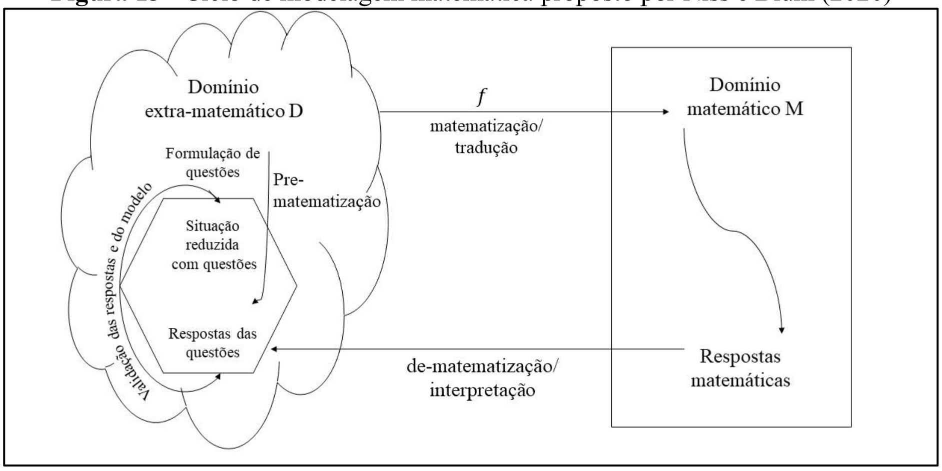
Inicialmente, o modelador precisa inteirar-se da situação-problema, coletando dados e formulando um problema. Diante desse problema, o modelador constrói um modelo matemático, mediante a matematização e o uso de matemática para obter uma resposta matemática para o problema. Esse modelo matemático deve ser analisado, por meio da interpretação de resultados e validação e o uso de técnicas de avaliação, com a finalidade de indicar a razoabilidade dos resultados em relação à situação-problema e identificar a necessidade de modificações (Almeida, 2022; Almeida; Castro; Silva, 2021).

Na *construção de um modelo matemático*, uma ação fundamental é a matematização. Souza e Tortola (2021, p. 6) consideram que a matematização pode ser caracterizada como "uma atribuição de uma roupagem matemática ao fenômeno, tornando-o passível de ser interpretado matematicamente". Jablonka e Gellert (2007) argumentam que a matematização constitui o processo de associar mais matemática a uma situação do que havia lhe sido associada até então. Niss e Blum (2020) argumentam que a matematização é o processo tradução de uma situação reduzida ou idealizada de um domínio extramatemático D em questões matemáticas pertencentes a um domínio matemático M. Esse processo envolve a simplificação da situação, definição de variáveis e a formulação de hipóteses que possibilitam a construção de um modelo matemático.

A *análise de um modelo matemático* está intimamente relacionada com a (de)matematização, a validação dos resultados e do modelo matemático e, consequentemente, a uma avaliação desse modelo e dos resultados obtidos. Essa validação, para Niss e Blum (2020, p. 12), consiste em "examinar em que medida as respostas obtidas são relevantes e úteis para o propósito para o qual o modelo matemático foi construído" e implica numa avaliação do modelo matemático, cujo "propósito final é decidir aceitá-lo ou rejeitá-lo e não é uma questão de decidir se o modelo matemático é correto ou incorreto, mas sim de identificar o quão bem ele atende aos seus propósitos como os definimos" (Niss; Blum, 2020, p. 12). Para Niss e Blum (2020), essa avaliação pode ser feita de forma *qualitativa*, com foco nas propriedades estruturais do modelo; *quantitativa*, confrontando os resultados quantitativos com os dados conhecidos; *comparativa*, em que o modelo matemático é comparado com outros modelos possíveis

O processo de modelagem matemática, segundo Niss e Blum (2020), é constituído por uma relação de ida, denominada de *matematização/tradução*, de um domínio extramatemático D para um domínio matemático M e, uma relação de volta, denominada de (*de)matematização/interpretação*, do domínio matemático M para o domínio extramatemático D, conforme mostra a Figura 15.

Figura 15 - Ciclo de modelagem matemática proposto por Niss e Blum (2020)



Fonte: Traduzido de Niss e Blum (2020, p. 18).

No âmbito da Educação Matemática, o uso da modelagem matemática, argumenta Almeida (2022), adquire facetas didáticas e pedagógicas, envolvendo especificidades associadas às práticas de ensino, como elementos referentes à aspectos estruturantes da modelagem e ações de caráter didático e pedagógico do professor e dos estudantes. O fazer modelagem matemática depende da finalidade subjacente a esse fazer e pode ser realizado de acordo com diferentes abordagens.

Para algumas finalidades, a literatura tem indicado que a análise de modelos pode ser considerada como uma abordagem para o ensino de matemática em diferentes níveis de escolaridade (Alzeri, 2021; Javaroni; Soares, 2012; Soares; Borba, 2011; 2014; Soares; Vier, 2017; Sousa, 2019; 2021; Sousa; Viali; Ramos, 2017; Sousa; Lara, 2018). Essa abordagem consiste, de acordo com Soares e Borba (2011, p. 231), no "estudo de um ou mais modelos matemáticos já existentes de um fenômeno, com enfoque na análise do comportamento de suas soluções e da influência dos parâmetros neste comportamento, e o entendimento dos dados fornecidos pelo modelo com relação ao fenômeno".

Ao analisar modelos matemáticos, algumas ações dos estudantes podem ser caracterizadas, conforme Javaroni e Soares (2012):

> (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo (Javaroni; Soares, 2012, p. 271).

O uso dessa abordagem pedagógica incorpora algumas ações características do processo de modelagem matemática, principalmente aquelas que envolvem reflexão sobre os resultados obtidos com o modelo matemático e suas limitações em relação ao fenômeno estudado (Javaroni; Soares, 2012). Os alunos não necessariamente constroem o modelo matemático a partir de uma situação real, mas o ponto de partida do desenvolvimento de atividades de análise de modelos é o próprio modelo matemático, frequentemente apresentado pelo professor (Soares, 2015).

Segundo Javaroni e Soares (2012, p. 271), a análise de modelos para além de evidenciar "aspectos como a relação entre o modelo e o fenômeno, a existência de limitações nos modelos, o entendimento da evolução do fenômeno, [...] permitem que modelos mais 'fiéis' ao fenômeno possam ser estudados pelos alunos mais cedo na carreira escolar". Outra característica é que a análise de diferentes modelos de uma mesma situação, caso existam, podem propiciar uma oportunidade para que o aluno compreenda o papel das hipóteses consideradas e os aspectos relevantes do fenômeno em relação aos modelos matemáticos, bem como para uma avaliação crítica, de suas potencialidades e limitações.

Uma outra abordagem da modelagem matemática em sala de aula, considera a necessidades dos estudantes de se envolver no ciclo de modelagem de uma maneira holística, realizando o processo completo da modelagem matemática, inteirando-se da situação-problema, construindo e analisando modelos matemáticos (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Almeida, 2022).

Nessa abordagem, destaca-se a importância da familiarização gradativa dos estudantes com atividades de modelagem matemática, que pode ocorrer conforme Almeida e Dias (2004) em três momentos. No primeiro momento, o professor sugere aos estudantes a resolução de uma situação-problema, com dados coletados e problema formulado, e auxilia os estudantes na construção e análise do modelo matemático. No segundo momento, o professor apresenta aos alunos uma situação da realidade e auxilia os estudantes na formulação de um problema e coleta de informações e os estudantes são responsáveis pelas demais ações. No terceiro momento, os estudantes desenvolvem todas as fases uma atividade de modelagem matemática, desde a escolha do tema até a análise do modelo matemático.

Dentre os aspectos que influenciam a realização de uma atividade de modelagem matemática, podemos destacar a capacidade dos estudantes de antecipar, não somente procedimentos ou conceitos matemáticos (Niss, 2010), mas também possíveis estratégias que orientarão o caminho a seguir (Almeida, 2018). A antecipação relativa ao fazer modelagem matemática caracteriza-se, segundo Almeida (2022, p. 131), como "um processo (metacognitivo) mediante o qual o modelador passa a ter um olhar prospectivo sobre o seu fazer, identificando o que lhe vai ser útil ou necessário em um momento posterior do desenvolvimento da atividade". Essa capacidade de antecipação pode ser favorecida com a familiaridade dos estudantes com esse tipo de atividade (Almeida, 2018; 2022).

Outro aspecto que pode auxiliar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática diz respeito ao uso de tecnologias digitais. Greefrath (2011) e Greefrath *et al*. (2018) destacam seis funções da tecnologia no ciclo de modelagem: investigação, experimentação, visualização, realização de cálculos e controle. Na investigação, as tecnologias digitais podem ser usadas para a compreensão da situação da realidade, na leitura e interpretação de dados prontos bem como na produção de dados. A experimentação consiste na transformação de uma situação real em um modelo geométrico ou numérico. A visualização se dá no uso de tecnologias para observar e analisar aspectos que poderiam não ser notados como ponto de partida para o desenvolvimento de modelos matemáticos ou para análise dos resultados obtidos. A simulação consiste na criação de uma analogia de uma situação real que pode ser usada para investigar uma operação ou um experimento com a ajuda de modelos matemáticos (Greefrath; Siller, 2017). A realização de cálculos consiste no uso das tecnologias digitais para realizar cálculos numéricos ou algébricos que não podem ser obtidos pelos modeladores sem as tecnologias digitais em tempo apropriado. O controle possibilita controlar as informações de entrada no modelo matemático para a determinação dos valores dos parâmetros e suas consequências no comportamento do modelo matemático.

Nessa seção, caracteriza-se duas abordagens possíveis para o fazer modelagem matemática em sala de aula, a primeira consiste na análise de modelos previamente formulados e apresentados aos alunos pelo professor, e a segunda, de caráter holístico, que diz respeito ao desenvolvimento do processo completo de modelagem matemática, em que os estudantes se inteiram da situação-problema, constroem e analisam modelos matemáticos. Considerando tais abordagens, trazemos ao centro de nossa atenção os usos da linguagem e o modo como esses usos estão associados à aprendizagem em atividades de modelagem matemática.

4.2 UM OLHAR PARA A APRENDIZAGEM EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Seguindo uma perspectiva wittgensteiniana, entende-se que uma forma de evitar aplicações dogmáticas do conceito de aprendizagem na área de Modelagem Matemática na Educação Matemática advindos de concepções referenciais da linguagem é direcionando o olhar para as práticas linguísticas que envolvem o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, sob uma lente que considera a linguagem não somente como um conjunto de palavras e expressões linguísticas, cuja única função é representar o mundo e objetos ideais, mas como um conjunto de atividades entrelaçadas com as mais variadas ações e o próprio pensamento dos estudantes.

Para tanto, recorremos aos jogos de linguagem que emergem em atividades de modelagem matemática como uma ferramenta terapêutica para olhar para a aprendizagem em ação. Esses jogos possuem a função de objetos de comparação, com os quais se pode lançar luz para as relações entre linguagem e aprendizagem e, para que funcione dessa maneira, é necessário que ocorra uma variabilidade em termos de usos da linguagem.

É considerando a necessidade de tal variabilidade que duas disciplinas diferentes foram escolhidas, com diferentes estudantes, de um curso de Licenciatura em Matemática: Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Ainda tendo em vista o critério da variabilidade, em cada um dos contextos atividades de modelagem de acordo com gêneros e abordagens distintos foram desenvolvidas.

No primeiro contexto de pesquisa, Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, utilizamos a modelagem matemática seguindo a abordagem da análise de modelos (Soares; Borba, 2011; Javaroni; Soares, 2012) e considerando a modelagem como veículo (Galbraith, 2012), cujo foco se dá na aprendizagem de conceitos e procedimentos previstos no plano de ensino dessa disciplina. Nessa abordagem, os modelos matemáticos foram previamente formulados e apresentados aos estudantes, que foram convidados à analisarem esses modelos.

No segundo contexto de pesquisa, Modelagem Matemática na Educação Matemática, utilizamos a modelagem matemática como alternativa pedagógica (Almeida; Silva; Vertuan, 2012), em que os estudantes desenvolvem o ciclo completo de modelagem matemática e, além disso, o foco foi na aprendizagem do fazer modelagem matemática, conforme a modelagem como conteúdo (Galbraith, 2012). Nessa abordagem, que denominamos de abordagem holística, os estudantes se envolveram em atividades de modelagem, perpassando pela interação com a situação-problema, construção e análise de um ou mais modelos matemáticos, considerando-se diferentes momentos de familiarização segundo a definição de Almeida e Dias (2004).

Entende-se que ao variar as formas de usar modelagem matemática nesses dois contextos de pesquisa, torna-se possível identificar uma variabilidade de ações dos estudantes e, consequentemente, de jogos de linguagem ao trabalharem de maneiras distintas com os modelos matemáticos.

Das atividades que foram desenvolvidas na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias - C_1 (conforme o Quadro 5), selecionou-se para esse movimento os dados obtidos com o desenvolvimento do grupo G1 das atividades *Salto de paraquedas* (AM_1) e *Bungee rocket* (AM_3). Essa escolha se deu sob a justificativa de que os dados produzidos por esse grupo apresentaram maior diversidade de usos da linguagem suscitados em uma maior quantidade de encontros, em detrimento dos outros grupos. Além disso, selecionou-se as atividades que apresentam maior variação em termos de conteúdos da disciplina estudados.

Na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática - C_2, das seis atividades desenvolvidas pelos alunos (Quadro 5), três atividades de modelagem matemática desenvolvidas por dois grupos (GM2, GM4) foram selecionadas, das quais uma atividade teve a temática proposta pelo professor, *Salto de paraquedas* (MM_1), e as outras duas com temáticas escolhidas pelos estudantes do grupo GM2 e GM4, respectivamente: *Problema dos Notebooks: uma análise do custo-benefício* (MM_4); *Análise da taxa de frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR* (MM_6). A escolha pelos dados produzidos por esses dois grupos na atividade Salto de Paraquedas foi feita sob o critério de, posteriormente, realizar comparações entre os jogos de linguagem que emergiram do desenvolvimento dessa atividade com os estudantes do primeiro e do segundo contexto. Quanto as atividades com temas escolhidos pelos estudantes, selecionou-se aquelas em que os relatórios finais apresentavam uma maior riqueza de detalhes em relação às fases e ações características do fazer modelagem matemática.

As atividades selecionadas para a descrição gramatical no movimento 2 são identificadas no Quadro 6.

Quadro 6 - Atividades selecionadas para descrição gramatical no movimento 2

Contexto de pesquisa	Código da atividade	Temática	Grupo
C1	AM_1	Salto de paraquedas	G1
C1	AM_3	Bungee rocket	G1
C2	MM_1	Salto de paraquedas	GM2, GM4
C2	MM_4	Problema dos Notebooks: uma análise do custo-benefício	GM2
C2	MM_6	Análise da taxa de frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR	GM4

Fonte: os autores.

A partir dos dados produzidos pelos estudantes do grupo G1, GM2 e GM4 descreve-se gramaticalmente a seguir os jogos de linguagem constituídos no desenvolvimento das atividades a partir dos diálogos e os registros escritos produzidos pelos estudantes. Para essa descrição considera-se que os jogos de linguagem são atividades linguísticas guiadas por regras e que seguir essas regras está vinculado à aprendizagem dos estudantes em uma perspectiva wittgensteiniana.

4.2.1 Aprendizagem nas atividades da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

As atividades desenvolvidas na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias foram orientadas de acordo com a análise de modelos, enquanto abordagem pedagógica para o ensino de conceitos e procedimentos da disciplina, com base em Soares e Borba (2011), Javaroni e Soares (2012).

Nessa abordagem, os modelos matemáticos foram construídos *a priori* pelo professor-pesquisador e suas construções foram apresentadas apenas aos estudantes da disciplina. A partir do modelo matemático pronto, os estudantes deveriam analisá-lo de acordo com as especificidades do fenômeno e o uso de conceitos e procedimentos de Equações Diferenciais Ordinárias.

4.2.1.1 Descrição da atividade Salto de Paraquedas

A atividade *Salto de Paraquedas* foi desenvolvida com os alunos no início da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias em aulas remotas síncronas nas datas 27/08/2021 e 30/08/2021 e encontros assíncronos com os alunos realizados entre 27/08/2021 e 10/09/2021.

Até o desenvolvimento da atividade, a professora-regente ainda não tinha ensinado técnicas de resolução de Equação Diferencial Ordinária. Dessa forma, foi proposto aos alunos que eles realizassem a análise qualitativa das soluções e a análise das soluções analíticas do modelo matemático da variação instantânea da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo, durante a queda-livre e com o salto com paraquedas aberto, visando responder a seguinte situação-problema (Quadro 7).

Quadro 7 – Situação-problema da atividade Salto de Paraquedas na disciplina introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Salto de paraquedas

O paraquedismo é uma modalidade de esporte em que o indivíduo salta de uma aeronave ou de lugares fixos e, em determinado momento, abre um paraquedas para diminuir sua velocidade de descida, possibilitando o pouso. Em um salto tradicional, o paraquedista salta de um avião a uma altitude que, de modo geral, varia entre 8 e 12 mil pés.

Etapas do salto de paraquedas

Etapa 1: Queda-livre (saída da aeronave até abertura do paraquedas)

Ao sair da aeronave, a posição do paraquedista pode variar de acordo com o trabalho a ser executado. A posição básica de queda-livre é a *box position.* Nessa posição o corpo encontra o equilíbrio perfeito durante a queda-livre, caindo sem girar e sem deslocamento no plano horizontal.

Do instante em que o paraquedista salta do avião até se posicionar na *box position*, o corpo sofre um deslocamento de ar chamado de *ventos relativo*, que deslocará o paraquedista para a posição vertical de queda.

A velocidade horizontal inicial do paraquedista é igual a velocidade do avião, aproximadamente, 216 km/h.

A velocidade vertical inicial do paraquedista é nula.

No decorrer da queda-livre, a velocidade do paraquedista pode ser compreendida em duas fases:

a) VELOCIDADE SUBTERMINAL: compreendida entre o momento de saída da aeronave até aproximadamente 12 segundos de queda livre, quando o corpo do paraquedista está em constante aceleração em direção ao solo, devido à ação da força da gravidade;

b) VELOCIDADE TERMINAL 1: inicia-se após os 12 segundos de queda livre, quando a resistência do ar se iguala à força da atração de gravidade e o corpo deixa de acelerar, estabilizando a sua velocidade entre, aproximadamente, 200 km/h e 240 km/h em direção ao solo.

Etapa 2: Paraquedas aberto (abertura do paraquedas até o pouso)

Após 50 segundos a 1 minuto de queda-livre, ao chegar a 1500 metros de altura (aproximadamente 5000 pés), o paraquedista abre o paraquedas. Com o paraquedas aberto, o movimento desacelera e a velocidade do corpo decresce até atingir a velocidade terminal 2, aproximadamente, 20 km/h, adequada para uma aterrissagem tranquila e segura. Com o paraquedas aberto, o tempo de queda até o pouso pode variar de 5 a 10 minutos.

Problemas

Qual é comportamento da velocidade do paraquedista desde a saída da aeronave até o pouso, para paraquedistas com diferentes massas?

Qual é a velocidade do paraquedista em um instante qualquer do salto, para paraquedistas com diferentes massas (desde a saída da aeronave até o pouso)?

Fonte: os autores.

Em conjunto com a situação-problema, o professor-pesquisador apresentou aos estudantes a construção do modelo matemático da variação da velocidade do paraquedista no decorrer do salto (Quadro 8). Esse modelo leva em consideração o comportamento das forças que agem sobre o paraquedista no movimento vertical (força de atração da gravidade e força de resistência do ar) nas diferentes etapas do salto, em queda-livre e com o paraquedas aberto.

Quadro 8 - Forças que agem sobre o paraquedista durante o salto

Forças que agem sobre o paraquedista

Durante o salto, duas forças agem sobre o paraquedista, no movimento vertical

F_g: força de atração da gravidade.

F_{rar}: força de resistência do ar.

A força de atração da gravidade é equivalente a força peso: $F_g = m.g$

em que m é a massa do paraquedista mais o equipamento e g é a aceleração da gravidade ao nível do mar.

Para movimentos de alta velocidade, como é o caso do paraquedista, a força da resistência do ar F_{rar} é proporcional ao quadrado da velocidade (CBPq, 2016; ROSSINI, et. al, 2020), de modo que

$F_{rar} = \frac{1}{2}p.C_D.A.v^2$ em que p é a densidade do ar, C_D é o coeficiente de arrasto do ar do objeto, A área da superfície do corpo em contato com o ar e v velocidade do corpo no decorrer do tempo.

Variáveis

t: tempo (em segundos);

$v_A(t)$: velocidade do paraquedista em queda-livre no instante t (em m/s);

$v_B(t)$: velocidade do paraquedista após a abertura do paraquedas no instante t (em m/s);

$v(t)$: velocidade do paraquedista em instante qualquer do salto, desde a saída da aeronave até o pouso (em m/s).

Parâmetros

m: massa do paraquedista com equipamentos (em kg).

g: aceleração da gravidade (em m/s^2)

$\lambda_1 = \frac{1}{2}p.C_{D_1}.A_1$

p: *densidade do ar*

C_{D_1}: *coeficiente de arrasto do ar* para o paraquedista em queda-livre.

A_1: área da superfície do paraquedista na posição *box* contra o movimento de queda-livre.

$\lambda_2 = \frac{1}{2}p.C_{D_2}.A_2$

C_{D_2}: *coeficiente de arrasto do ar* para o paraquedas aberto.

A_2: área da superfície do paraquedas contra o movimento.

Fonte: os autores.

A partir da análise das forças que agem sobre o paraquedista, a dedução do modelo matemático consistiu na formulação da EDO que envolve a variação instantânea da velocidade do paraquedista e na identificação das condições iniciais para dois intervalos de tempo (em segundos): [0, 60] que corresponde ao período em que o paraquedista está em queda-livre e (60, 450] que diz respeito ao período em que o paraquedista abre o paraquedas até o pouso. Essa formulação da EDO usa procedimentos similares aos utilizados para construir a EDO para a velocidade de um objeto de massa m em queda-livre, com a diferença de que para cada intervalo do salto, considera-se um valor específico para a constante de resistência do ar

(λ), pois quando o paraquedista abre o paraquedas, a superfície em contato com o ar possui maior área (A) e o coeficiente de arrasto também se modifica (C_D), conforme o Quadro 9.

Quadro 9 - Modelo matemático da atividade Salto de Paraquedas

MODELO MATEMÁTICO PARA VELOCIDADE DO PARAQUEDISTA DURANTE O SALTO

A EDO que descreve a variação da velocidade de um objeto em queda-livre é dada por:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{\lambda}{m}.\left(v(t)\right)^2$$

Considerando as diferentes etapas do salto e os valores fornecidos para o cálculo do parâmetro λ em cada uma dessas etapas, temos os seguintes problemas de valor inicial (PVIs):

Considerando as informações fornecidas para o **paraquedista em queda-livre**:

$p = 1{,}201$ kg/m^3; $C_{D_1}.A_1 = 0{,}56$; $g = 9{,}8\ m/s^2$ e $v_A(0) = 0$

Temos $\lambda_1 = \frac{1}{2}p.C_{D_1}.A_1 = 0{,}33628$ e, portanto:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_A(t)}{dt} = 9{,}8 - \dfrac{0{,}33628}{m}.\left(v_A(t)\right)^2 \\ v_A(0) = 0 \end{cases}, em\ I_A = [0, 60] \qquad [1]$$

Considerando as informações fornecidas para o momento em que o **paraquedas está aberto**, temos:

Sendo $p = 1{,}201$ kg/m^3, $A_2 = 24{,}5\ m^2$, $C_{D_2} = 1{,}75$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}p.C_{D_2}.A_2 = \frac{1}{2}.1{,}201.24{,}5.1{,}75 = 25{,}74$$

E considerando que a velocidade em que o paraquedas é aberto é igual a velocidade terminal da queda-livre, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_B(t)}{dt} = 9{,}8 - \dfrac{25{,}74}{m}.\left(v_B(t)\right)^2 \\ v_B(60) = v_A(60) \end{cases}, em\ I_B = (60, 450] \qquad [2]$$

Fonte: os autores.

A partir dos problemas propostos e do modelo matemático, os alunos analisaram o modelo matemático. As ações dos estudantes durante o desenvolvimento dessa atividade podem ser sintetizadas da seguinte forma: *Análise qualitativa das soluções das EDOs por meio dos campos de direções*; *Análise das soluções analíticas para os PVIs; Avaliação do modelo matemático* e *Interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado.*

Na *análise qualitativa das soluções das EDOs*, os estudantes incialmente construíram campos de direção no GeoGebra, com o auxílio do professor-pesquisador, considerando diferentes valores para a massa do paraquedista ($m = 70$ kg e $m = 99$ kg) e as duas etapas do salto. Por meio do campo de direções os estudantes analisaram o comportamento de diferentes soluções das EDOs (solução de equilíbrio, soluções crescentes e decrescentes) e indicaram uma relação entre essas soluções e o comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo.

Para complementar essa análise, utilizando curvas integrais traçadas no GeoGebra, os alunos realizaram estimativas da condição inicial do PVI 2, da solução de equilíbrio para a EDO do paraquedista em queda-livre (velocidade terminal 1), da solução de equilíbrio (velocidade terminal 2) para a EDO do paraquedista com o paraquedas aberto e dos instantes em que a velocidade do paraquedista se aproxima dessas velocidades, conforme indica o Quadro 10.

Quadro 10 - Análise Qualitativa das soluções das EDOs[16]

Análise qualitativa das soluções das EDOs

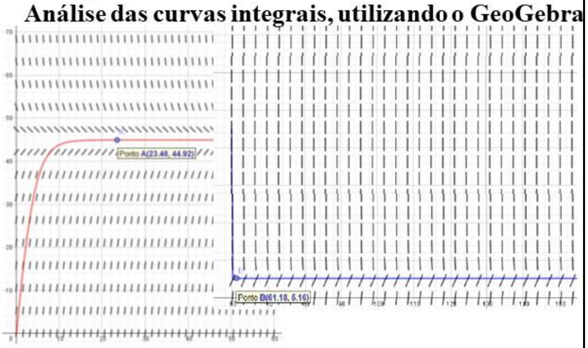
Construção dos campos de direções no GeoGebra

Análise dos campos de direções, considerando diferentes massas

G1: ($m = 70\ kg$) Na queda livre, aproximadamente vemos que, a velocidade se estabiliza entre 40 m/s e 50 m/s, ou seja, nossa <u>*solução de equilíbrio*</u> *se encontra dentro desse intervalo. Além disso, observamos que essa EDO, possui* <u>*soluções crescentes a partir da velocidade zero*</u>*, até um pouco mais que 40 m/s*<u>*, e soluções decrescentes quando a velocidade for maior que a solução de equilíbrio*</u>*. [...] Quando o paraquedista abre o paraquedas, vemos pelo campo de direções que sua velocidade estabiliza próximo a 5 m/s, onde* <u>*se encontra a solução de equilíbrio da EDO, que será também sua velocidade de pouso*</u>*. Abaixo da* <u>*solução de equilíbrio temos soluções crescentes para a EDO, e acima dela, temos soluções decrescentes.*</u>

($m = 99\ kg$) Na queda livre, vemos que, a velocidade se estabiliza, aproximadamente, entre 50 m/s e 56 m/s, ou seja, <u>*nossa solução de equilíbrio se encontra dentro desse intervalo*</u>*. Além disso,* <u>*observamos que essa EDO, possui soluções crescentes a partir da velocidade zero, até um pouco mais que 50 m/s, e soluções decrescentes quando a velocidade estiver acima de 56 m/s.*</u> *[...] Quando o paraquedista abre o paraquedas, observamos pelo campo de direções que sua velocidade estabiliza próximo a 6 m/s, onde* <u>*se encontra a solução de equilíbrio da EDO, que será também sua velocidade de pouso*</u>*. Abaixo da solução de equilíbrio temos soluções crescentes para a EDO, e acima dela, temos soluções decrescentes* (c_1_RE_AM_1G_1)

Análise das curvas integrais, utilizando o GeoGebra



- <u>Estimativa da condição inicial</u> para o PVI de v_B

G1: para $m = 70\ kg$ temos $v_B(60) = 44{,}92\ m/s$. Para $m = 99\ kg$, temos $v_B(60) = 53{,}42\ m/s$.

- Estimativa do <u>instante em que a velocidade do paraquedista em queda-livre começa</u> estabilizar e da velocidade terminal 1.

G1: ($m = 70\ kg$) *Na queda livre, aproximadamente teremos que, no tempo de 23,46 segundos a velocidade vai ficar constante em 44,92 m/s (solução de equilíbrio) até a abertura do paraquedas. A velocidade terminal 1 está presente no intervalo de tempo (em segundos) I= [23,46, 60], também representado por I = {23, 46 ≤ x ≤ 60}.*

($m = 99\ kg$) *Na queda livre, aproximadamente teremos que, no tempo de 28,2 segundos a velocidade vai ficar constante em 53,42 m/s (solução de equilíbrio) até a abertura do paraquedas. A velocidade terminal 1 está presente no intervalo de tempo (em segundos) I = [28,2;60], também representado por I ={28, 2 ≤ x ≤ 60}.*

- <u>Estimativa do instante em que a velocidade do paraquedista com paraquedas aberto começa estabilizar e da velocidade terminal 2</u>.

G1: ($m = 70\ kg$) *Podemos dizer que, em aproximadamente, em 1,18 segundos, ou seja, 61,18 segundos a velocidade vai ficar constante em 5,16 m/s (solução de equilíbrio) até sua chegada ao solo.*

(m = 99 kg) O a partir da análise qualitativa do campo de direções podemos dizer que, em aproximadamente, em 2,28 segundos, ou seja, 62,28 segundos a velocidade vai ficar constante em 6,14 m/s (solução de equilíbrio) até sua chegada ao solo.

Fonte: C_1_RE_AM_1_G1.

Na *análise das soluções analíticas dos PVIs* os estudantes obtiveram uma expressão matemática para calcular as duas velocidades terminais; construíram as soluções

[16] Os grifos realizados na transcrição dos registros escritos e de áudio dos estudantes nos quadros e excertos no decorre do texto foram realizados pelos autores com o propósito de evidenciar os elementos que subsidiam a caracterização de jogos de linguagem que emergem no desenvolvimento das atividades.

analíticas dos PVIs a partir da solução geral analítica e as condições iniciais fornecidas pelo professor-pesquisador; verificaram se as soluções analíticas eram soluções dos PVIs; escreveram uma expressão matemática para a função da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo e traçaram o gráfico dessa função. Essas ações ocorreram predominantemente de forma algébrica.

Para calcular a velocidade terminal 1 e a velocidade terminal 2, considerando dois valores diferentes do parâmetro m ($m = 70\ kg$ e $m = 99\ kg$), os alunos utilizaram um resultado obtido com a análise das soluções em relação ao comportamento do fenômeno de que as velocidades terminais correspondem às soluções de equilíbrio. Sendo assim, como a aceleração do paraquedista nas velocidades terminais é nula, os alunos assumiram que $\frac{dv_A}{dt} = 0$ e $\frac{dv_B}{dt} = 0$ e encontraram o valor de v_A e v_B nessas circunstâncias. Após o cálculo das velocidades terminais 1 e 2, os alunos generalizaram uma expressão matemática, com os parâmetros m, λ, g desconhecidos, conforme ilustrado no Quadro 11, para $m = 70\ kg$.

Quadro 11 - Obtenção de expressão matemática para calcular a velocidade terminal

Cálculo da Velocidade terminal 1 para $m = 70\ kg$

a) Quando $m = 70$

Para a velocidade terminal 1 (T_1)

$\frac{dv_a}{dt} = 9,8 - \frac{(0,33628)\cdot(v_a)^2}{m}$

$0 = 9,8 - \frac{(0,33628)\cdot(v_a)^2}{70}$

$-9,8 \cdot 70 = -(0,33628)\cdot(v_a)^2$

$-686 = -(0,33628)\cdot(v_a)^2$

$\sqrt{\frac{686}{0,33628}} = \sqrt{(v_a)^2}$

$\sqrt{2040} \approx \sqrt{(v_a)^2}$

$\sqrt{2040} \approx |(v_a)|$

$\pm 45,17 \approx (v_a)$, nesse caso a velocidade é sempre maior que zero, logo $45,17 \approx (v_a) = (T_1)$

Para a velocidade terminal 2 (T_2)

Expressão generalizada para velocidade terminal

$0 = g - \frac{(\lambda_1)\cdot(v_a)^2}{m}$

$\Rightarrow$ $-g \cdot m = -(\lambda_1)\cdot(v_a)^2$

$\Rightarrow$ $\frac{-g\cdot m}{-\lambda_1} = (v_a)^2$

$\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_1}} = \sqrt{(v_a)^2}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_1}} = |(v_a)|$

$\Rightarrow$ $\pm\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_1}} = (v_a)$, como nesse caso, é a queda livre de um paraquedista, devemos considerar a velocidade positiva

$\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_1}} = (v_a)$

expressão generalizada

Fonte: C_1_RE_AM_1_G1.

Outro aspecto explorado pelos alunos na análise das soluções analíticas foi a obtenção da solução do PVI 1 e do PVI 2, a partir da solução geral fornecida pelo professor-pesquisador:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\frac{\left(C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\lambda}{m}.t} - 1\right)}{\left(1 + C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\lambda}{m}.t}\right)}, com\ C\ constante$$

Em um primeiro momento, os alunos construíram a solução particular $v_A(t)$ a partir da solução geral para cada valor de m e para a condição inicial $v_A(0) = 0$. Em seguida, calcularam o valor de $v_A(60)$ e, assim, obtiveram o valor da condição inicial $v_B(60)$, para cada valor de m. Essa condição foi substituída na solução particular $v_A(t)$, resultando na solução particular $v_B(t)$. Ilustramos no Quadro 12, a construção da solução do PVI 1.

Quadro 12 - Construção das soluções analíticas de cada PVI

Substituindo $g = 9,8\ m/s^2$, $\lambda_1 = 0,33628$, na solução geral da EDO, vamos obter $\underline{v_a(t)}$

* Quando $m = 70$ Kg:

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{9,8.70}{0,33628}}.\frac{\left(C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{9,8.70}{0,33628}}.0,33628}{70}.t} - 1\right)}{\left(1 + C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{9,8.70}{0,33628}}.0,33628}{70}.t}\right)}$$

$$v_a(t) = 45,17.\frac{\left(C.e^{0,434.t} - 1\right)}{\left(1 + C.e^{0,434.t}\right)} \quad \text{I}$$

RASCUNHO

$$\sqrt{\frac{9,8.70}{0,33628}} \approx 45,17$$

$$\frac{2.45,17.0,33628}{70} \approx 0,434$$

$$e^{0,434.0} = e^0 = 1$$

* Quando $v_a(0) = 0$, teremos:

$$0 = 45,17.\frac{\left(C.e^{0,434.0} - 1\right)}{\left(1 + C.e^{0,434.0}\right)}$$

$$0 = 45,17.\frac{\left(C.e^0 - 1\right)}{\left(1 + C.e^0\right)}$$

$$0 = 45,17.\frac{(C-1)}{(1+C)}$$

Aqui temos dois casos:
$45,17(C-1) = 0$
ou
$(1+C) = 0$

Segue que, $(1+C) \neq 0$, logo

$$45,17(C-1) = 0 \Rightarrow 45,17C - 45,17 = 0$$
$$\Rightarrow C = \frac{45,17}{45,17} = 1$$

* Quando $v_b(60) = 45,17$ teremos que

$$v_b(60) = 5,16.\frac{\left(C.e^{3,79(60-60)} - 1\right)}{\left(1 + C.e^{3,79(60-60)}\right)}$$

$$45,17 = 5,16.\frac{\left(C.e^0 - 1\right)}{\left(1 + C.e^0\right)}$$

$$\frac{45,17}{5,16} = \frac{(C-1)}{(1+C)}$$

$$8,75(1+C) = (C-1) \Rightarrow 8,75 + 8,75C = C - 1$$
$$\Rightarrow 8,75C - C = -1 - 8,75$$
$$\Rightarrow 7,75C = -9,75$$
$$\Rightarrow C = \frac{-9,75}{7,75} = -1,26$$

Substituindo $C = -1,26$ em V quando $m = 70$, teremos uma SOLUÇÃO PARTICULAR

$$v_b(t) = 5,16.\frac{\left((-1,26).e^{3,79(t-60)} - 1\right)}{\left(1 + (-1,26).e^{3,79(t-60)}\right)}$$

Fonte: C_1_RE_AM_1_G1.

Obtidas as soluções particulares, os alunos verificaram se as funções encontradas são soluções dos PVIs. Para tanto, substituíram as soluções particulares e suas derivadas nas EDOs. Após verificarem as soluções particulares, os alunos escreveram uma função $v(t)$ definida em dois intervalos $[0,60]$ e $(60, 450]$ e construída por $v_A(t)$ e $v_B(t)$. Em seguida, traçaram o gráfico da dessa função, usando o GeoGebra, considerando diferentes valores para o parâmetro m, conforme o Quadro 13.

Quadro 13 - Verificação das soluções e construção de uma função para a velocidade

Verificação das soluções analíticas construídas

Sejam, $\rho = \sqrt{\frac{9,8\,m}{0,33628}}$ e $q = \frac{2\cdot\rho\cdot 0,33628}{m}$

$$\rho\left(\frac{2q\,e^{qt}}{(1+e^{qt})^2}\right) = 9,8 - \frac{0,33628}{m}\left[\frac{\rho(e^{qt}-1)}{1+e^{qt}}\right]^2$$

$$= 9,8 - \frac{0,33628}{m}\cdot\frac{(\rho e^{qt}-\rho)^2}{(1+e^{qt})^2}$$

* vamos substituir $\rho = \sqrt{\frac{9,8\,m}{0,33628}}$

$$4\rho^2\cdot 0,33628\cdot e^{qt} = 9,8\,m + 2\cdot 9,8\,m e^{qt} + 9,8\,m e^{2qt} -$$

$$-0,33628\left(\frac{9,8\,m}{0,33628}\cdot(e^{2qt}-2e^{qt}+1)\right)$$

$$\frac{9,8\,m}{0,33628}\cdot 0,33628\cdot e^{qt} = 9,8\,m\,e^{qt}$$

$$9,8\,m\cdot e^{qt} = 9,8\,m\,e^{qt}$$

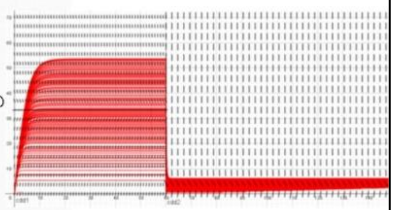
$$9,8\,m\cdot e^{qt} - 9,8\,m\,e^{qt} = 9,8\,m\,e^{qt} - 9,8\,m\,e^{qt}$$

$$0 = 0$$

Construção de uma expressão matemática para a função da velocidade do paraquedista

c) m, g, λ_1 e λ_2 desconhecidos

$$\begin{cases} v_a(t) = \sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_1}}\cdot\frac{\left(1\cdot e^{\frac{2\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_1}}\cdot\lambda_1}{m}\cdot t}-1\right)}{\left(1+1\cdot e^{\frac{2\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_1}}\cdot\lambda_1}{m}\cdot t}\right)}, & 0\leq t\leq 60 \\ v_b(t) = \sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_2}}\cdot\frac{\left(-1,26\cdot e^{\frac{2\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_2}}\cdot\lambda_2}{m}\cdot(t-60)}-1\right)}{\left(1+(-1,26)\cdot e^{\frac{2\sqrt{\frac{g\cdot m}{\lambda_2}}\cdot\lambda_2}{m}\cdot(t-60)}\right)}, & 60\leq t\leq 450 \end{cases}$$



Fonte: $C_1\_RE\_AM_1\_G1$.

Na *avaliação do modelo matemático e interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado*, os estudantes utilizaram o estudo realizado na análise qualitativa das soluções e relacionaram com os resultados obtidos na análise das soluções analíticas, levando em consideração o comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo por meio dos gráficos construídos. De modo geral, a justificativa utilizada pelos alunos para dizer que o modelo matemático é satisfatório foi a comparação entre os resultados obtidos com a análise qualitativa e a análise das soluções analíticas.

> Considerando o estudo da expressão analítica e da investigação estudada anteriormente nos outros exercícios, podemos perceber que essa expressão analítica satisfaz sim as características do fenômeno estudado. Podemos perceber que no gráfico encontrado na questão 11, essa função v(t), relaciona com o que foi visto anteriormente com a queda-livre que possui velocidade crescente do paraquedista a partir do salto do avião, o ponto de estabilização da velocidade (velocidade terminal 1) que acontece antes da abertura do paraquedas e o que ocorre no momento de abertura do paraquedas, onde a velocidade decresce até o momento da estabilização (velocidade terminal 2) até o pouso. Como observado nos gráficos das questões anteriores conseguimos notar uma semelhança entre eles e chegar à conclusão de que a função v(t) irá satisfazer as características do fenômeno estudado, sendo esta, o que ocorre com o paraquedista em relação a sua velocidade dependendo de sua massa durante o salto em queda livre, bem como no momento da abertura do paraquedas (C_1_RE_AM_1_G1).

Na interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado, os estudantes discutiram como o modelo matemático poder ser usado para realizar considerações sobre o fenômeno:

> Ao analisarmos qualitativamente o salto do paraquedista, verificamos que em $v_a(0) = 0$ (o ponto inicial) é o momento em que ele salta. Após isso, conseguimos perceber que a partir de um certo ponto a velocidade estabiliza, logo, temos uma solução de equilíbrio. Já em $v_b(60) = v_a(60)$, que é o momento de abertura do paraquedas, a velocidade cai bruscamente e logo depois ela se estabiliza, onde temos outra solução de equilíbrio, até que o paraquedista chegue no solo a velocidade não possui mudanças. Observamos que a massa faz com que a velocidade varie [...]. Quanto maior a massa do paraquedista, maior a sua velocidade durante o salto e mais rápido ele cai. Analogamente, quanto menor sua massa, menor a velocidade durante o salto e ele chega no solo mais devagar (C_1_RE_AM_1_G1).

Considerando os diálogos e os registros escritos dos estudantes no desenvolvimento dessa atividade, identificamos na próxima seção jogos de linguagem que se caracterizam nas ações dos estudantes.

4.2.1.2 Identificação de jogos de linguagem que constituem aprendizagem na atividade Salto de Paraquedas

Ao analisar o modelo matemático da variação da velocidade de um paraquedista em queda-livre, as ações dos estudantes ocorreram mediante a três fases: Análise qualitativa das soluções das EDOs por meio dos campos de direções; Análise das soluções analíticas para os PVIs; Avaliação do modelo matemático e interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado.

Essas fases estão de acordo com a análise de modelos matemáticos como abordagem pedagógica (Soares; Borba, 2011; Javaroni; Soares, 2012) e a fase de validação do modelo matemático e interpretação dos resultados do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (Niss; Blum, 2020), na qual os estudantes realizaram a validação e avaliação do modelo matemático de forma qualitativa, quantitativa e comparativa.

À luz da filosofia de Wittgenstein, podemos dizer que as ações dos estudantes na realização de cada uma dessas fases podem caracterizar jogos de linguagem, com os quais os estudantes precisam lidar para desenvolver a atividade.

As ações dos estudantes na *análise qualitativa das soluções das EDOs* sinalizam os jogos de linguagem: construção de campos de direção no GeoGebra; análise das soluções em relação ao comportamento do fenômeno; estimativas de diferentes valores associados ao fenômeno por meio do uso do gráfico das soluções; percepção da influência dos parâmetros no comportamento das soluções do modelo matemático e no comportamento do fenômeno.

Na *construção de campos de direções no GeoGebra*, os estudantes precisaram seguir as regras específicas desse *software*, utilizando os comandos necessários para essa construção. Termos específicos como 'controle deslizante', 'Número n', 'Fator de escala a', 'Min x', 'Min y', 'Max x', 'Max y' precisaram ser utilizados de forma articulada com os parâmetros e as variáveis do modelo matemático.

Este jogo de linguagem sinaliza a aprendizagem dos estudantes das regras específicas do *software* GeoGebra, que os permitiram *traduzir* os símbolos do modelo matemático para os termos e comandos específicos do *software*. Nesse caso, o uso do recurso tecnológico exerceu a função de *visualização*, no sentido caracterizado por Greefrath (2011), em que os estudantes puderam visualizar de maneira gráfica uma outra forma de representar uma EDO.

Na *análise das soluções em relação ao comportamento do fenômeno*, os estudantes identificaram o comportamento de diferentes soluções da EDOs, como a solução de equilíbrio e as soluções crescentes e decrescentes. Ao colocar o foco no fenômeno, o termo 'solução de equilíbrio' é usado para designar a velocidade terminal ou velocidade constante do paraquedista em queda-livre ou com o paraquedas aberto, indicando a velocidade em que o paraquedista abre o paraquedas ou a velocidade que o paraquedista pode pousar. As soluções crescentes indicam a velocidade do paraquedista em queda-livre e as soluções decrescentes indicam a velocidade do paraquedista com o paraquedas aberto.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem dos estudantes está associada à aquisição de outros significados para o conceito de solução de uma EDO, a partir do seu uso na análise do comportamento da velocidade de um paraquedista. Os estudantes passam a ver uma solução de uma EDO não somente como uma função no âmbito estritamente matemático, mas também como o comportamento de uma variável no decorrer do tempo que, neste caso, é a velocidade do paraquedista. Por exemplo, a solução de equilíbrio passa a ser vista não somente como a solução cuja derivada da função é nula, mas também como o momento em que a velocidade do paraquedista se estabiliza:

> A1: A gente falou que a <u>velocidade fica constante, mas tem que deixar bem especificado que ela é a solução de equilíbrio né</u>.
> A4: Coloco que vai ficar constante até 49 m/s e colocar entre parênteses 'solução de equilíbrio'.
> A3: A velocidade vai crescer de 0 a 24 segundos e vai ficar constante. Mas ela não decresce nunca nesse gráfico.
> A4: ela vai decrescer quando abrir o paraquedas, não vai?
> A1: É, quando abrir o paraquedas, a velocidade vai decrescer.
> A4: <u>Ela é crescente até um momento e ela fica constante, daí abre o paraquedas e a velocidade diminui</u> ($C_1\_V\_AM_1\_G1$).

Nas *estimativas de diferentes valores associados ao fenômeno por meio do uso do gráfico das soluções*, os estudantes estimaram os instantes em que a velocidade do paraquedista começa a se estabilizar em queda-livre e com o paraquedas aberto, plotando pontos no gráfico das curvas integrais traçadas no *software* GeoGebra. Nesse jogo de linguagem, os alunos utilizam conhecimentos matemáticos associados à interpretação de gráficos, de forma articulada com o conhecimento que eles possuem sobre o fenômeno, indicando que os pontos nas curvas integrais plotados correspondem a diferentes valores para a velocidade do paraquedista em diferentes instantes do salto.

A aprendizagem nesse jogo de linguagem envolve, dessa maneira, o uso do conceito de soluções de um EDO como curvas integrais, de uma maneira associada ao gráfico da função da velocidade do paraquedista no decorrer do salto, em que um ponto de uma curva integral corresponde a velocidade do paraquedista em um determinado instante.

Na *percepção da influência dos parâmetros no comportamento das soluções do modelo matemático e no comportamento do fenômeno*, os estudantes recorreram novamente ao conceito de soluções de uma EDO e a relação entre essas soluções com o comportamento da velocidade do paraquedista em relação ao tempo. Com isso, os estudantes perceberam que a massa é diretamente proporcional a velocidade do paraquedista, ou seja, quanto maior a massa do paraquedista maior será a massa que ele atingirá em queda-livre e maior será a velocidade de pouso.

Novamente, neste jogo de linguagem, os conhecimentos matemáticos dos estudantes parecem ser usados de forma articulada com os conhecimentos a respeito do fenômeno e sinalizam que a aprendizagem dos estudantes aqui está associada à constituição de um modo de ver de que forma os parâmetros de um modelo matemático influencia no comportamento do fenômeno:

> A3: Eu percebi que a gente precisa justificar porque a velocidade é proporcional a massa, deve ser alguma coisa a ver com a força peso.
> A1: acho que a gente pode explicar assim: quanto maior a massa maior é a força peso e, consequentemente, maior a velocidade terminal (C_1_V_AM_1_G1).
>
> G1: Percebemos que quanto maior a massa do paraquedista, maior a sua velocidade durante o salto e mais rápido ele cai. A velocidade em queda livre é diretamente proporcional à massa do objeto, considerando a gravidade e a resistência do ar. Quanto maior a massa do corpo, maior a velocidade limite que ele terá que atingir até que a resistência do ar cresça o suficiente para segurar seu peso todo e conseguir estabilizar a velocidade (C_1_RE_AM_1_G1).

Diante das ações empregadas pelos estudantes na *análise das soluções analíticas dos PVIs*, identifica-se *jogos de linguagem* que estão especificamente atrelados às regras ensinadas na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias: obtenção de uma expressão matemática para calcular as velocidades terminais do paraquedista (soluções de equilíbrio); construção da solução analítica de cada PVI a partir da solução geral; verificação da solução analítica; construção da função da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo.

Na *obtenção de uma expressão matemática para calcular as velocidades terminais do paraquedista (soluções de equilíbrio)*, os estudantes usaram as regras matemáticas de que na solução de equilíbrio a derivada da função é nula e que a aceleração é dada pela derivada da velocidade em relação ao tempo, identificando que as soluções de equilíbrio das EDOs dos dois PVIs consistem nas velocidades terminais do paraquedista.

Nesse jogo de linguagem, regras matemáticas para o cálculo da solução de equilíbrio e para a resolução de equações devem ser seguidas para que os estudantes consigam obter sucesso nessa ação. Ao seguir essas regras, sinaliza-se em relação à aprendizagem dos estudantes o uso do conceito de solução de equilíbrio tal como é utilizado no âmbito matemático da disciplina e a aquisição de um outro significado para esse conceito, como a velocidade do paraquedista em que a aceleração é nula.

Na *construção da solução analítica de cada PVI a partir da solução geral*, os estudantes usaram como regra matemática os procedimentos necessários para obtenção da solução de um PVI, determinada pela substituição da condição inicial dada na solução geral da EDO. Essa regra é aprendida na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e deve ser seguida nesse jogo de linguagem para que as soluções particulares possam ser obtidas. Ao seguirem essa regra, os alunos mostram conhecimento da solução geral e da solução de um PVI como uma solução particular da EDO e sinalizam a aprendizagem da regra de como obter a solução de um PVI.

Na *verificação da solução analítica,* os estudantes mostram que seguem a regra de como verificar a solução de uma EDO, substituindo a solução e sua derivada na equação. Neste jogo de linguagem, os alunos devem saber o que significa obter a solução de uma EDO e como ela pode ser verificada, o que sinaliza a aprendizagem de como verificar se uma função é solução de uma EDO, por meios analíticos.

Na *construção da função da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo*, os alunos reconhecem a solução de cada PVI como uma função da velocidade do paraquedista em um determinado intervalo de tempo e constroem uma função definida em dois intervalos.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada ao seguir a regra que indica que a solução de uma EDO é uma função e usam conceitos associados à continuidade de funções de uma variável para construir uma função definida em dois intervalos. Além disso, os estudantes expressam o uso do conceito de funções como uma relação entre duas variáveis do fenômeno estudado.

As ações dos estudantes na *avaliação do modelo matemático e interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado* sinalizam para os seguintes jogos de linguagem: comparação entre os resultados obtidos com a análise das soluções analíticas e os obtidos com a análise qualitativa das soluções; comparação entre as soluções do modelo matemático e o comportamento do fenômeno; análise da influência dos parâmetros no comportamento do fenômeno.

No jogo de linguagem *comparação entre os resultados obtidos com a análise das soluções analíticas e os obtidos com a análise qualitativa das soluções*, os alunos compararam o gráfico obtido com as soluções analíticas e os campos de direção elaborados na análise qualitativa. A correspondência entre as observações obtidas entre os dois tipos de análise foi considerada como critério para avaliar se o modelo matemático é adequado ou não para o fenômeno investigado. Essa comparação estabelece uma regra nesse jogo de linguagem utilizada como referência para tomar uma decisão a respeito da viabilidade do modelo.

Ao seguir essa regra, sinaliza-se a aprendizagem da técnica da comparação para avaliar um modelo matemático (Niss; Blum, 2020), decidindo se ele é adequado ou não para um determinado fenômeno, em que os resultados de diferentes formas de analisar o modelo matemático são comparados:

> A4: A gente fez o gráfico e fez o gráfico aí [...].
> A1: primeiro, a gente pegou a solução geral, não pode ser genérica né, para qualquer gravidade e lambda.
> PP: Isso, vocês precisam considerar o lambda fornecido e aceleração da gravidade como 9,8 m/s^2.
> A1: Então beleza, a gente colocou a massa como controle deslizante.
> A4: A gente considera que a solução analítica vai satisfazer as características do fenômeno, porque basicamente o gráfico é o mesmo que a gente viu lá no começo na análise qualitativa.
> PP: Entendi. E o que isso significa em relação ao fenômeno?
> A4: Basicamente, uma pessoa que não fez a análise qualitativa, não calculou a velocidade terminal, se ela olhar para essa função ela consegue saber o que acontece com o paraquedista. O ponto zero é o momento que ele salta. Em um certo ponto a velocidade vai estabilizar. Na hora que chegar sessenta segundos ele vai abrir o paraquedas, aí a velocidade vai cair até chegar no solo (C_1_V_AM_1_G1).

Na *comparação entre as soluções do modelo matemático e o comportamento do fenômeno*, os alunos compararam as informações que possuíam a respeito do comportamento da velocidade do paraquedista em relação ao tempo com as soluções do modelo matemático. Entram em cena neste jogo de linguagem, regras associadas ao fenômeno e regras matemáticas, de modo que o segundo tipo forma a condição necessária para que o comportamento do fenômeno possa ser descrito.

Esse jogo de linguagem sinaliza para a aprendizagem da técnica quantitativa para avaliar um modelo matemático (Niss; Blum, 2020) na qual ocorre o confronto das informações quantitativas obtidas com o modelo matemático e as obtidas a partir de uma inteiração com o fenômeno.

Na *análise da influência dos parâmetros no comportamento do fenômeno*, os estudantes observaram a influência do parâmetro m no comportamento das soluções do modelo matemática, recorrendo a ferramenta controle deslizante do GeoGebra, e compararam com as suas observações obtidas inicialmente com a análise qualitativa, concluindo que quanto maior a massa do paraquedista, maior será sua velocidade e mais rápido ele cai. Este jogo de linguagem sinaliza que os estudantes aprendem um modo de ver o fenômeno a partir das análises do modelo matemático efetuadas.

Em síntese, onze jogos de linguagem foram identificados na descrição gramatical dos usos da linguagem dos estudantes no desenvolvimento da atividade Salto de Paraquedas. Esses jogos de linguagem sinalizam para diferentes aprendizagens dos estudantes de forma interligada com suas ações e regras usadas, conforme o Quadro 14.

Quadro 14 - Jogos de linguagem identificados na atividade Salto de Paraquedas no contexto da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Fases do desenvolvimento da atividade	Jogos de linguagem	Sinalização de aprendizagem
Análise qualitativa das soluções das EDOs	Construção de campos de direção do GeoGebra.	Aprendizagem das regras específicas do *software* GeoGebra, que os permitem *traduzir* os símbolos do modelo matemático para os termos e comandos específicos do *software*.
	Análise das soluções em relação ao comportamento do fenômeno.	Aquisição de outros significados para o conceito de soluções de uma EDO.
	Estimativas de diferentes valores associados ao fenômeno por meio do uso do gráfico das soluções.	Uso do conceito de soluções de um EDO como curvas integrais, de uma maneira associada ao gráfico da função da velocidade do paraquedista no decorrer do salto.
	Percepção da influência dos parâmetros no comportamento das soluções do modelo matemático e no comportamento do fenômeno.	Constituição de um modo de ver de que forma os parâmetros de um modelo matemático influenciam no comportamento do fenômeno.
Análise das soluções analíticas dos PVIs	Obtenção de uma expressão matemática para calcular as velocidades terminais do paraquedista (soluções de equilíbrio).	Aquisição de um outro significado para o conceito de solução de equilíbrio, como a velocidade do paraquedista em que a aceleração é nula.

	Construção da solução analítica de cada PVI a partir da solução geral.	Aprendizagem da regra de como obter a solução de um PVI.
	Verificação da solução analítica	Aprendizagem de como verificar se uma função é solução de uma EDO, por meios analíticos.
	Construção da função da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo.	Uso do conceito de função como uma relação entre duas variáveis do fenômeno estudado.
Avaliação do modelo matemático e interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado	Comparação entre os resultados obtidos com a análise das soluções analíticas e com a análise qualitativa das soluções	Aprendizagem da técnica da comparação para avaliar um modelo matemático.
	Comparação entre as soluções do modelo matemático e o comportamento do fenômeno	Aprendizagem da técnica quantitativa para avaliar um modelo matemático.
	Análise da influência dos parâmetros no comportamento do fenômeno.	Aquisição de um modo de ver o fenômeno a partir das análises do modelo matemático efetuadas.

Fonte: os autores.

Nessa atividade, considera-se que as sinalizações de aprendizagem ocorreram, em primeiro lugar, em relação ao conceito de soluções de uma EDO de 1ª ordem, em que para além do seu uso na disciplina como funções, diferentes modos de ver esse conceito puderam ser adquiridos: de forma associada à vetores em um campo de direções, ao comportamento de uma variável de um fenômeno no decorrer do tempo e como curvas integrais.

Em segundo lugar, os estudantes sinalizaram a aprendizagem de conceitos e procedimentos de acordo com seu uso convencionado no interior dos jogos de linguagem matemáticos da disciplina, como a verificação de uma solução de uma EDO e a obtenção da solução de um PVI a partir da solução geral da EDO.

Em terceiro lugar, observa-se que os estudantes foram envolvidos em uma situação de aprendizagem associada à avaliação e à validação de modelos matemáticos. Técnicas de avaliação de um modelo foram colocadas em ação, como a de avaliação qualitativa, comparativa e quantitativa. Essa aprendizagem envolve o seguir regras necessárias para a realização de uma fase do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática: a interpretação dos resultados e validação do modelo matemático.

As ações dos estudantes nos jogos de linguagem associados à aprendizagem nessa atividade foram mediadas pelo uso do *software* GeoGebra, que possibilitou aos alunos visualizar soluções, com a construção de campos direções e, com isso, fazer uma análise qualitativa das soluções; visualizar os gráficos das soluções analíticas; simular o comportamento da solução considerando diferentes valores para o parâmetro usado para indicar a massa do paraquedista. Não obstante, esses jogos de linguagem foram constituídos em um ambiente estruturado a partir do uso de outros recursos tecnológicos, além do GeoGebra, como em videoconferências no Google Meet, uso do Google Docs para escrita simultânea entre os integrantes do grupo, mesa digitalizadora e quadro virtual para anotações que envolvem símbolos matemáticos e conversas no WhatsApp.

Os jogos de linguagem indicam que os estudantes seguiram regras e usaram conhecimentos matemáticos estudados anteriormente na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, como campos de direção, soluções de uma EDO (geral, particulares, solução de um PVI e solução de equilíbrio) em uma abordagem qualitativa e em uma abordagem analítica e a verificação dessas soluções, de forma articulada com conhecimentos sobre o fenômeno, como as forças físicas que agem sobre o paraquedista no decorrer do salto, etapas do salto, a velocidade do paraquedista, entre outros. Essa articulação forneceu aos alunos um modo de ver o comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do salto e a influência da massa nesse comportamento, ampliando-se dessa maneira a constituição de significados de conceitos estudados na disciplina.

4.2.1.3 Descrição da atividade Bungee Rocket

A atividade '*Bungee Rocket*' foi desenvolvida na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias em aulas remotas síncronas nas datas 29/11/2021 e 03/12/2021 e encontros assíncronos entre os estudantes no período de 29/11/2021 a 06/12/2021. O desenvolvimento dessa atividade ocorreu na segunda etapa da disciplina, que consistiu no estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de ordem superior com ênfase em EDOs de 2ª ordem e suas aplicações.

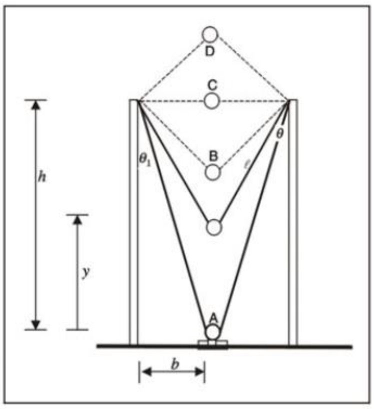
Nesse contexto, o objetivo pedagógico com essa atividade foi promover aos alunos a resolução de PVIs de EDOs lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes que expressam a variação do deslocamento da cápsula no *Bungee Rocket* no decorrer do tempo e a análise do comportamento de suas soluções em relação ao fenômeno e a influência dos parâmetros nesse comportamento, considerando o movimento da cápsula como um sistema massa-mola. A situação-problema apresentada pelo professor-pesquisador pode ser visualizada no Quadro 15.

Quadro 15 - Situação-problema da atividade 'Bungee Rocket'

Bungee rocket
SlingShot Ride ou *bungee rocket* é um tipo de brinquedo de parque de diversões, inventado por Troy Griffin em

1979. Vários outros nomes são atribuídos ao brinquedo, Catapulta Bungee, Ejection Seatm, Sling Shot, entre outros.
O *bungee rocket* consiste em cápsula esférica, na qual duas pessoas são amarradas. Cabos elásticos são fixados em cada lado das cápsulas e no topo de duas torres. Inicialmente a cápsula é fixada em uma plataforma de embarque no solo, quando a trava é liberada, a cápsula é catapultada verticalmente para cima, conforme a Figura 5.

Figura 5 - Bungee Rocket



Fonte: Theron (2002).

No começo do movimento, energia potencial é armazenada nos cabos elásticos e a gaiola é liberada. Durante a subida, a energia potencial elástica é convertida em energia cinética da gaiola. Ao atingir a altura máxima, a energia cinética é então convertida em energia potencial gravitacional da gaiola.

Em Theron (2002), encontramos algumas informações de *bungee rocket* que foram providenciados por um operador do brinquedo e por estimativas realistas, as quais são: $h = 29\,m$, $b = 10{,}1\,m$, $\theta_1 = 19{,}2^0$, m $l_2 = 30{,}7m$ (comprimento do cabo distendido até a posição A) e $l_0 = 10\,m$ (comprimento do cabo não distendido); o número de total de cordas elásticas é seis, três em cada lado. O operador do bungee rocket indicou uma constante de elasticidade $k = 160\,N/m$ para cada corda. A massa total é: $m = 300$ kg, $g = 9{,}8\,m/s^2$.

Na posição A, imediatamente após a trava ter sido liberada, a velocidade inicial é de 8,221 m/s.

Problema
Uma informação interessante para quem deseja ser um passageiro da cápsula do Bungee Rocket, principalmente para aqueles que possuem medo de altura, é a altura máxima atingida pela cápsula durante o movimento. Assim, podemos perguntar:

- Qual é a altura máxima atingida pela cápsula no Bungee Rocket? Em que instante a cápsula atinge essa altura?

Um segundo aspecto que é interessante para o passageiro diz respeito a aceleração da cápsula durante o movimento. Sabemos que para acelerações acima de 5G aplicadas ao corpo humano (sendo G a constante gravitacional aplicada ao corpo humano ao nível do mar, aproximadamente 9,8 m/s^2), é provável que a pessoa desmaie sem uma preparação adequada. Nesse contexto, uma segunda pergunta é:

- Qual é a aceleração atingida pela cápsula em movimento no decorrer do tempo? Essa aceleração corresponde a quantas vezes a constante gravitacional G?

Fonte: os autores.

A partir dessa situação-problema, o professor-pesquisador apresentou aos estudantes dois modelos matemáticos da variação do deslocamento vertical da cápsula do Bungee Rocket em relação ao tempo, um que não considera a força de resistência do ar (F_r) e descreve um movimento livre sem amortecimento e outro que considera essa força e descreve um movimento livre amortecido. A dedução desses modelos foi feita previamente pelo professor-pesquisador e teve como base os modelos matemáticos para sistemas massa-mola, conforme o Quadro 16.

Quadro 16 - Modelo matemático da atividade Bungee Rocket

- **Variáveis:**

$x(t)$ = deslocamento vertical da cápsula, em metros, a partir de sua posição de equilíbrio no instante t.
t = tempo em segundos.
l = comprimento da corda elástica.

- **Dedução dos modelos matemáticos:**

(I) **Sem considerar a força de resistência do ar:** movimento harmônico simples ou movimento livre sem amortecimento

Na vertical, podemos considerar duas forças:

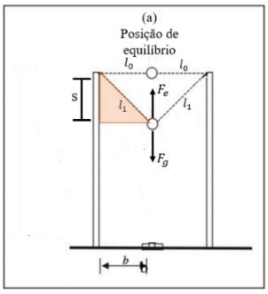
Força de atração da gravidade $\boldsymbol{F_p}$, equivalente a força peso: $F_p = m.g$. Sendo m a massa da cápsula e g a aceleração da gravidade.

Força restauradora ou **força elástica $\boldsymbol{F_e}$** da mola (ou cordas elásticas), em sentido contrário à Força Peso. Segundo a Lei de Hooke, quando uma mola é distendida por uma força externa (nesse caso pela força peso), uma força elástica restauradora passa a exercida em sentido contrário e mesma direção que a força externa. Essa força restauradora F_e é proporcional ao deslocamento da mola (x).

$$F_e = \lambda.x$$

Em que λ é a constante de elasticidade da mola (N/m).

(a) Posição de equilíbrio da cápsula (encontrando o coeficiente de elasticidade):



Na posição de equilíbrio, temos $F_p = F_e$.

Sabemos que a massa da cápsula é $m = 300kg$, $g = 9{,}8m/s^2$, o comprimento da corda elástica não distendida é $l_0 = 10\,m$ e a constante de elasticidade de cada corda é $k = 160$ N/m. Ao acoplar a cápsula no sistema, o comprimento da corda elástica passa a ser l_1. Assim, temos:

$$F_p = F_e \Rightarrow m.g = 6k(l_1 - l_0)$$

Multiplicamos a constante de elasticidade por 6, pois em cada lado da cápsula temos três cordas. Substituindo as informações, temos: $l_1 = 13{,}0625\,m.$

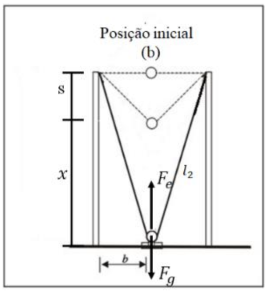
O deslocamento vertical da cápsula s para a distensão $l_1 - l_0$ nas cordas elásticas é dado por:

$$(l_1)^2 = (s)^2 + (b)^2 \Rightarrow s = \sqrt{(13{,}0625\,)^2 - (10{,}1)^2} \Rightarrow s = 8{,}283652\,m$$

O corpo está em repouso, portanto, 8,283652 m abaixo do topo das vigas laterais. Considerando o coeficiente de elasticidade λ no deslocamento vertical:

$$m.g = \lambda.s \Rightarrow 300.9{,}8 = \lambda.8{,}283652 \;\Rightarrow \lambda = 354{,}9159236 \text{ N/m}$$

(b) Posição inicial da cápsula



Na posição inicial da cápsula, considerando a Lei de Hooke, temos:

$$F_e = \lambda.(x + s)$$

Com $\lambda = 354{,}9159236$ N/m. A segunda lei de Newton estabelece que as forças que atuam sobre um corpo $(\sum F)$ é proporcional à massa do corpo pela sua aceleração, ou seja $\sum F = m.a$. Assim:

$$\sum F = F_p - F_e = m.a \Rightarrow m.g - \lambda.(x + s) = m.a$$

Seja $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, temos $m.g - \lambda.s - \lambda.x = m.\frac{d^2x}{dt^2}$

Sabemos que $m.g - \lambda.s = 0$. O que resulta em:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}.x = 0$$

Na posição inicial $x = h - s$. Logo, $x(0) = 29 - 8{,}283652 = 20{,}716348\,m$. Além disso, $x'(0) = 8{,}221\,m/s$ que expressa a velocidade inicial da cápsula. Temos, portanto, o seguinte problema de valor inicial:

$$\boldsymbol{PVI\ 1}: \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0} \\ \boldsymbol{x(0) = 20{,}716348\,m; x'(0) = 8{,}221 \text{ m/s}} \end{cases}$$

Com $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$, $\lambda = 354{,}9159236$ N/m e $m = 300$ kg.

(II) **Considerando a força de resistência ar:** movimento livre amortecido

Considerando a força de resistência do ar F_r como uma força de amortecimento, agindo em sentido contrário ao movimento, temos conforme a Segunda Lei de Newton: $\sum F = F_p - F_e - F_r = m.a$

Podemos tomar como hipótese que a força de resistência do ar é proporcional a velocidade, ou seja, $F_r = \beta.\frac{dx}{dt}$, sendo β coeficiente de atrito.

Assim, $m.\frac{d^2x}{dt^2} = (m.g - \lambda s) - \lambda x - \beta.\frac{dx}{dt}$. Como $m.g - \lambda s = 0$, temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}.\frac{dx}{dt} + \frac{\lambda}{m}x = 0$$

Utilizando as condições iniciais $x(0) = 20{,}716348\,m; x'(0) = 8{,}221$, com $\lambda, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$. Temos o seguinte PVI:

$$\boldsymbol{PVI\ 2}: \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma.\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0} \\ \boldsymbol{x(0) = 20{,}716348\,m; x'(0) = 8{,}221\ 8{,}221 \text{ m/s}} \end{cases}$$

Com $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$ e $2\gamma = \frac{\beta}{m}$, temos:

Três casos são possíveis para o movimento livre amortecido:

CASO 1: $\gamma^2 - \omega^2 > 0$. Nesta situação, dizemos que o *sistema é superamortecido* pois o coeficiente de amortecimento β é grande quando comparado com a constante de elasticidade λ. A solução para a EDO é, portanto:

CASO 2: $\gamma^2 - \omega^2 = 0$. Dizemos que o *sistema é criticamente amortecido*, pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório.

CASO 3: $\gamma^2 - \omega^2 < 0$. Dizemos que o *sistema é subamortecido*, pois o coeficiente de amortecimento é pequeno se comparado à constante de elasticidade. As raízes r_1 e r_2 são complexas:

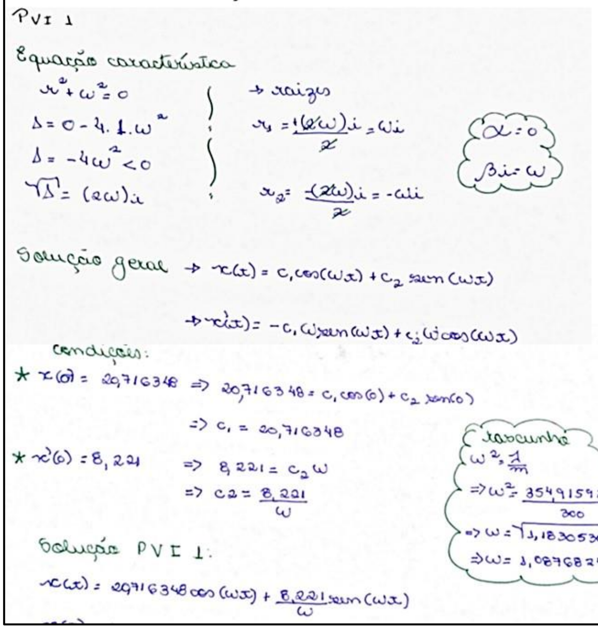
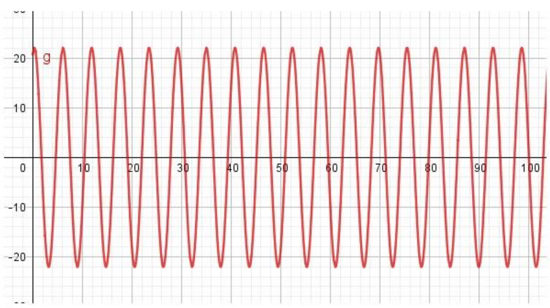
Fonte: Os autores.

O desenvolvimento dessa atividade ocorreu por meio das seguintes fases: *Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples*; *Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido*; *Avaliação e interpretação dos modelos matemáticos em relação ao fenômeno; Resolução dos problemas propostos*.

A *análise do modelo matemático do movimento harmônico simples* foi realizada por meio da resolução do PVI 1 e a análise de sua solução a partir do seu gráfico traçado no GeoGebra, da influência dos parâmetros m (massa) e λ (coeficiente de elasticidade) no seu comportamento e da interpretação dos resultados em relação ao fenômeno.

A resolução do PVI 1 utilizando o método dos coeficientes constantes e a análise do comportamento da solução por meio do gráfico traçado no *software* GeoGebra podem ser vistos no Quadro 17.

Quadro 17 - Resolução do PVI 1 e análise do comportamento da solução na atividade Bungee Rocket

Resolução do PVI 1	**Análise do comportamento da solução**
	 G1: Quando o movimento é livre, sem amortecimento, o deslocamento da cápsula no decorrer do tempo se mantém em um intervalo constante, ou seja, esse deslocamento se mantém continuamente pois a força de resistência do ar não existe neste caso, logo, ela não age sobre o movimento. Essa função é periódica e possui amplitude fixa.

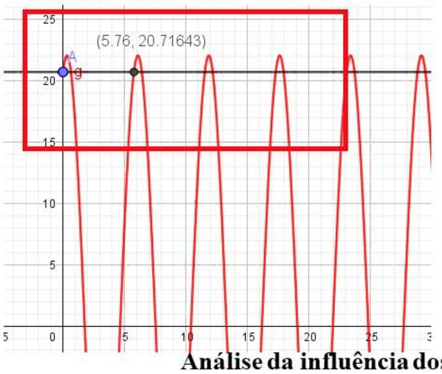
Fonte: $C_1\_RE\_AM_3\_G1$.

Analisando o gráfico da solução do PVI 1 que expressa o movimento livre sem amortecimento da cápsula do '*Bungee Rocket*' no decorrer do tempo, os estudantes argumentaram que o comportamento do movimento da cápsula é periódico e possui uma amplitude fixa, conforme o Quadro 17.

Outro aspecto analisado no gráfico da solução do PVI 1 foi o período e a frequência e seus usos em relação ao deslocamento da cápsula no decorrer do tempo. Os estudantes determinaram o período e frequência de forma analítica e de forma gráfica, plotando dois pontos no gráfico da solução para encontrar o tempo que leva para o movimento se repetir. Em seguida, os estudantes realizaram uma análise da influência dos parâmetros m (massa) e λ (coeficiente de elasticidade) no comportamento da solução, utilizando a ferramenta controle deslizante do GeoGebra e realizando considerações em relação ao período e a frequência do movimento para diferentes valores desses parâmetros. A partir dos resultados obtidos, os estudantes realizaram interpretações em relação ao fenômeno estudado, decidindo se o modelo matemático do movimento harmônico simples é adequado (Quadro 18).

Quadro 18 - Análise da influência dos parâmetros na solução e interpretação dos resultados na atividade Bungee Rocket

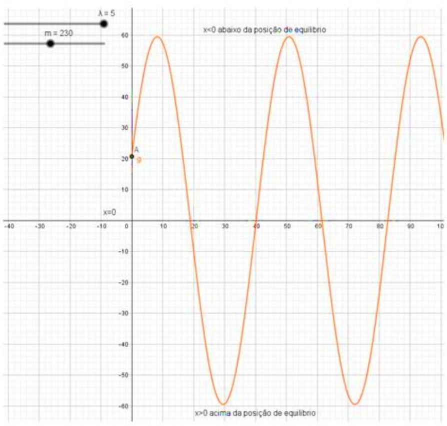
Cálculo o período e a frequência do movimento



G1: Seja P o período da função, então $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1,09} = 5,76\,s$ e a frequência é dada por $P^{-1} = \frac{1}{P} = \frac{1}{5,76} = 0,173611\,s^{-1}$.

O período corresponde ao tempo, em segundos, para que ocorra o movimento de lançamento da cápsula e retorno da mesma para a posição inicial de lançamento, já a frequência corresponde a qual fração do período que cabe em uma unidade de tempo (segundos), desse modo, quanto maior a frequência, mais movimentos a função faz em uma unidade de tempo, ou seja, em um determinado período de tempo a função possui mais oscilações, e isso corresponde ao fato da cápsula ter uma velocidade maior.

Análise da influência dos parâmetros m e λ no comportamento da solução



G1: Quando m aumenta, o período e a amplitude da função aumentam, a frequência por unidade de tempo diminui.
Quando m diminui, o período e a amplitude da função diminuem e a frequência por unidade de tempo aumenta.

G1: Quando λ aumenta, o período e a amplitude da função diminuem e a frequência por unidade de tempo aumenta.
Quando λ diminui, o período e a amplitude da função aumentam, a frequência por unidade de tempo diminui.

Interpretação dos resultados em relação ao fenômeno

G1: Se a função descrevesse o fenômeno do brinquedo Bungee Rocket, ela não seria adequada, pois não está sendo considerado as forças da resistência do ar, se pensarmos no movimento realizado pela cápsula ela acabaria batendo no solo e voltando repetidas vezes sem parar, desse modo, seria impossível que uma pessoa pudesse participar desse brinquedo

Fonte: $C_1\_RE\_AM_3\_G1$.

Como resultado na análise da solução do PVI 1, os estudantes argumentaram que a solução obtida não é um modelo matemático adequado para descrever o deslocamento da cápsula no decorrer do tempo, pois não leva em consideração a força de resistência do ar, o que implica, de acordo com esse modelo, que o deslocamento da cápsula seria infinitamente periódico.

Na *Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido*, que considera a força de resistência do ar no movimento da cápsula no decorrer do tempo como uma força de amortecimento, os alunos justificaram porque o movimento pode ser considerado livre e amortecido; resolveram o PVI 2 considerando três casos possíveis: movimento superamortecido, amortecimento crítico e subamortecido (Quadro 19); analisaram o comportamento da solução para cada um dos três casos e identificaram o caso que se adequa ao comportamento do fenômeno.

Quadro 19 - Resolução do PVI 2 na atividade Bungee Rocket

Justificativa em relação ao movimento livre amortecido

G1: Pois existe uma força de resistência agindo em sentido contrário ao movimento.
Pela Segunda Lei de Newton a força de resistência do ar é proporcional a velocidade, ou seja,

$$f_R = \beta . \frac{dx}{dt}, \text{ sendo } \beta \text{ coeficiente de atrito.}$$

$$\Sigma F = Fp - Fe - Fr = m.a$$

Diferente do movimento livre sem amortecimento, que não possui a força de resistência do ar.

Resolução do PVI 2

Equação característica

$$r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega^2$$

$$\Delta = 4(\gamma^2 - \omega^2)$$

→ Raízes

$$r = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4(\gamma^2 - \omega^2)}}{2} \Rightarrow r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

como não conhecemos o valor de γ, então temos três casos:

$\Delta > 0$ $\quad \Delta = 0$ $\quad \Delta < 0$

Caso 1: $\gamma^2 - \omega^2 > 0$ (superamortecido)

caso em que $\Delta > 0$

$\Rightarrow r_1 \neq r_2$

Solução geral: $x(t) = c_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$

Solução do PVI 2

$$x(t) = 20{,}716348\, e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + \left(\frac{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}(-4{,}1105 - 10{,}358174) + 10{,}358174(\gamma^2 - \omega^2)}{\gamma^2 - \omega^2}\right) \cdot \left(e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} - e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}\right)$$

Caso 2: $\gamma^2 - \omega^2 = 0$ (amortecimento crítico)

Caso em que $\Delta = 0$

$\Rightarrow r = -\gamma$

Solução geral: $x(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t. e^{-\gamma t}$

Solução PVI 2:

$$x(t) = 20{,}716348\, e^{-\gamma t} + (8{,}221 - 20{,}716348\gamma) t\, e^{-\gamma t}$$

Caso 3: $\gamma^2 - \omega^2 < 0$ (subamortecido)

Caso em que $\Delta < 0$:

$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$

$r = -\gamma \pm (\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})i$

$\alpha \pm \psi i$

$\alpha = -\gamma$

$\psi i = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$

Solução geral:

$$x(t) = e^{-\gamma t} . (c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} . t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} . t))$$

Solução PVI 2

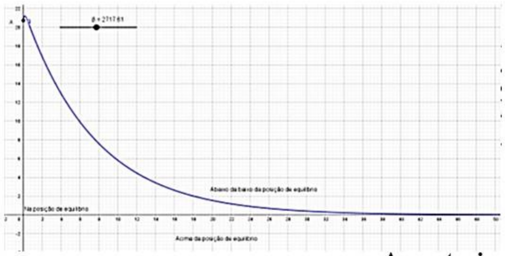
$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[20{,}716348 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} . t) + \left(\frac{8{,}221 + 20{,}716348\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}\right) \operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})\right]$$

Fonte: $C_1\_RE\_AM_3\_G1$.

Para analisar o comportamento da solução do PVI 2 em cada um dos casos considerados, sabendo que $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$ e $\gamma = \frac{\beta}{2m}$ e tendo em vista que os valores de λ e m foram fornecidos pelo professor-pesquisador, os estudantes calcularam para quais valores de β o movimento pode ser classificado como superamortecido ($\gamma^2 - \omega^2 > 0$), amortecimento crítico ($\gamma^2 - \omega^2 = 0$) ou subamortecido ($\gamma^2 - \omega^2 < 0$). Como resultado, obtiveram que o movimento pode ser considerado como amortecimento crítico para $\beta = 652{,}6097$, subamortecido para $\beta < 652{,}6097$ e superamortecido para $\beta > 652{,}6097$. Em posse dessa classificação, os estudantes plotaram o gráfico da solução do PVI 2 e criaram um controle deslizante para o parâmetro β, com a finalidade de analisar o comportamento da solução para cada um dos casos (Quadro 20).

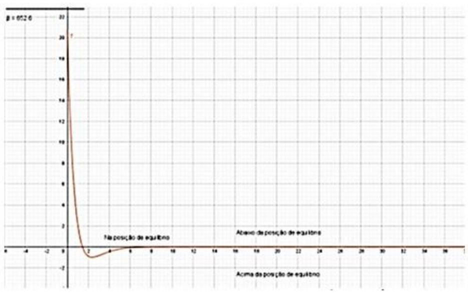
Quadro 20 - Análise da solução do PVI 2 para três casos distintos na atividade Bungee Rocket

Superamortecido, com β > 652, 6094609



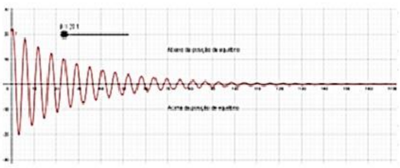
Ao analisar esse gráfico podemos apontar que o movimento realizado pelo cápsula corresponde a uma exponencial decrescente, em outras palavras, isso quer dizer que, como o amortecimento é muito grande, acontece uma desaceleração da cápsula e ela não ultrapassa a posição de equilíbrio.

Amortecimento crítico, com β = 652, 6094609



Podemos dizer que a força de resistência do ar não é tão grande quanto o caso superamortecido. Desse modo, o amortecimento é um pouco menor, mas a função não chega a possuir várias oscilações, apenas passa um pouco da posição de equilíbrio e já retorna a essa posição

Subamortecido, com β < 652, 6094609



O amortecimento é menor que os outros dois casos já citados, além disso, a força de resistência do ar faz com que a velocidade da cápsula diminua e com isso a amplitude das oscilações vai ficando cada vez menor, pois, a força da gravidade em comparação com a força da elasticidade tendem a se igualar no decorrer do tempo.

Fonte: $C_1\_RE\_AM_3\_G1$.

A partir da análise do comportamento dos três casos possíveis para a solução do PVI 2, os alunos identificaram, com base no comportamento do fenômeno, qual tipo de amortecimento corresponde ao deslocamento da cápsula no decorrer do tempo no *Bungee Rocket*.

> G1: Considerando o movimento da cápsula do brinquedo *Bungee Rocket* nos 3 casos analisados (superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido), concluímos que esse movimento pode ser classificado como subamortecido. Pois, ao analisarmos os três gráficos obtidos no item d), verificamos que no caso superamortecido a cápsula não realiza o movimento de oscilação, apenas tende a posição de equilíbrio, no caso criticamente amortecido temos que a cápsula passa apenas uma vez pela posição de equilíbrio e tende a ela e, no caso subamortecido, temos várias oscilações que convergem para posição de equilíbrio. Além disso, é possível observar no vídeo do *Bungee Rocket*, que esse caso subamortecido é o que mais se aproxima ao deslocamento da cápsula no decorrer do tempo ($\mathrm{C_1\_RE\_AM_3\_G1}$).

> G1: Quando o tempo tende a infinito a amplitude do movimento tende a solução de equilíbrio, pois as forças de atração da gravidade e a força elástica tendem a se igualar quando o tempo tende ao infinito, logo, a amplitude vai diminuindo até que a cápsula pare em sua posição de equilíbrio, pois é o momento no qual as forças se anulam (C_1_RE_AM_3_G1).

Na *Avaliação e interpretação dos modelos matemáticos em relação ao fenômeno*, os estudantes compararam o modelo matemático resultante da solução do PVI 1, que descreve um movimento livre sem amortecimento, com o modelo matemático resultante da solução do PVI 2 no caso do movimento subamortecido, apontando semelhanças e diferenças entre os dois modelos, bem como seus pontos fortes e fracos em relação ao fenômeno.

> G1: Podemos inferir como diferenças que $x_1(t)$ [solução do PVI 1] não possui forças de amortecimento (resistência do ar) que agem sobre essa função, ao contrário de $x_2(t)$ [solução do PVI 2] que possui. Como semelhanças, podemos apontar que o gráfico das duas funções oscila, entretanto, há diferenças entre as funções quando o tempo tende a infinito, pois de $x_2(t)$ possui um fator "e" que multiplica a equação, levando essa função a convergir para a solução de equilíbrio, o que não acontece $x_1(t)$. Como ponto forte de $x_1(t)$ podemos apontar que a função possui um movimento $x_1(t)$ oscilatório e como ponto fraco é que ela não corresponde ao fenômeno, já que neste caso o deslocamento da cápsula oscila infinitamente.
> Pontos fracos de $x_2(t)$ é o fato de não considerar outras forças horizontais que agem sobre a cápsula em deslocamento, por exemplo, a velocidade do vento. Entretanto, seu ponto forte é corresponder de forma mais condizente ao fenômeno.
> Logo, $x_2(t)$ é a função mais adequada para descrever o deslocamento vertical da cápsula no decorrer do tempo (C_1_RE_AM_3_G1).

Para responder o problema 'Qual é a altura máxima atingida pela cápsula no *Bungee Rocket*? Em que instante a cápsula atinge essa altura?' os alunos realizaram um deslocamento vertical da função $x(t)$ de $20{,}716348$ e multiplicaram $x(t)$ por (-1) para inverter a posição do ponto máximo e mínimo da função, determinando uma função $h(t)$ para a altura da cápsula em relação ao solo.

Em seguida, os estudantes estimaram o valor do coeficiente de resistência do ar β, uma vez que o valor deste parâmetro não foi apresentado na situação-problema da atividade. Para isso, os alunos utilizaram um vídeo[17] mostrado pelo professor-pesquisador na aula do dia 29/11/2021 de uma gravação de um *Bungee Rocket* funcionando na Nova Zelândia e contaram o número de oscilações da cápsula do início do movimento até se estabilizar na posição de equilíbrio. Com base nessa observação, os alunos movimentaram o controle deslizante do parâmetro β no GeoGebra e visualizaram simultaneamente o gráfico da função $h(t)$. Considerando o número de oscilações no gráfico e o número de oscilações da cápsula no *Bungee Rocket* a partir do vídeo, estimou-se o valor de β em aproximadamente 55 kg/s. A resposta do problema 1 pode ser vista no Quadro 21.

---

[17] Bungee Rocket, Christchurch, NZ. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=FezXTlHpodw>. Acesso em: 29. nov. 2021.

Quadro 21 - Resposta para o problema da altura máxima na atividade Bungee Rocket

Resposta do problema 1

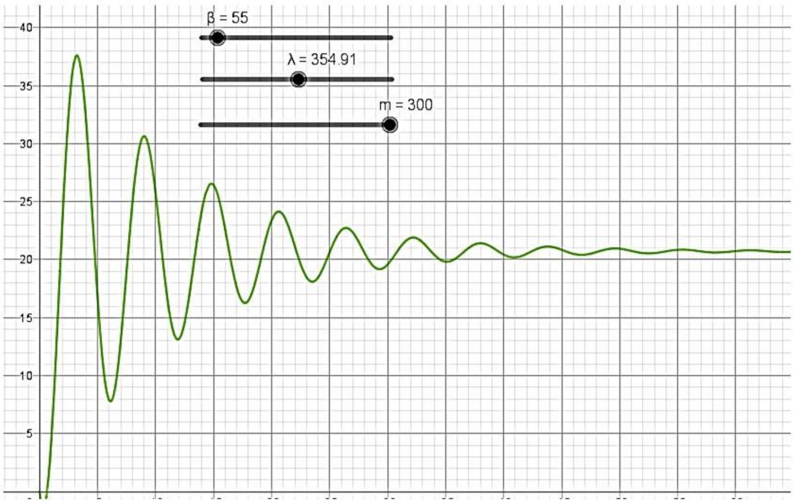
A função $h(t)$ que corresponde à altura da cápsula em um determinado instante em relação ao solo é dada por:

$$h(t) = -x(t) + 20{,}716348$$

Sendo,

$$x(t) = 20{,}716348.\mathrm{e}^{-\gamma.t}\cos\sqrt{(\gamma^2-\omega^2).\mathrm{t}}\,\frac{8{,}221+20{,}716348\gamma}{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}.sen\sqrt{(\gamma^2-\omega^2).\mathrm{t}}$$

Com $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$, $\gamma = \frac{\beta}{2m}$, $\lambda = 354{,}9159236$ N/m, $m = 300$ kg e coeficiente de resistência do ar $0 < \beta < 652{,}6094609$ kg/s.



A altura máxima atingida pela cápsula é 37,58 m e a cápsula atinge essa altura no instante 3,19 s.

Fonte: $C_1\_RE\_AM_3\_G1$.

Para responder o segundo problema proposto ‘Qual é a aceleração atingida pela cápsula em movimento no decorrer do tempo? Essa aceleração corresponde a quantas vezes a constante gravitacional G?’ os alunos consideraram que a aceleração da cápsula em movimento no *Bungee Rocket* é dada pela derivada segunda do deslocamento em relação ao tempo $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Dessa maneira, para encontrar a função da aceleração em relação ao tempo, utilizaram o GeoGebra e calcularam a derivada segunda da função $x(t)$, determinando uma função $a(t)$ para a aceleração da cápsula em relação ao tempo.

Por fim, utilizando a estimativa feita para o parâmetro β por meio do vídeo disponibilizado pelo professor-pesquisador, calcularam a aceleração máxima atingida pela cápsula no decorrer do tempo e indicaram a força G máxima que age sobre a cápsula em movimento. Para tanto, plotaram o maior ponto máximo e o menor ponto mínimo no gráfico da função da aceleração em relação ao tempo e calcularam a aceleração máxima atingida pela cápsula (Quadro 22).

Quadro 22 - Resposta para o problema 2 na atividade Bungee Rocket

Determinando a função da aceleração da cápsula no decorrer do tempo no GeoGebra

m = 462.1
$\lambda = 290.1$
$\beta = 75.1$
$\gamma = 0.08$
$c_1 = 20.72$
$\omega = 0.79$
r = 0.79
$c_2 = 12.57$

$h(x) = e^{-0.08x}\,(20.72\,\cos(0.79\,x) + 12.57\,\text{sen}(0.79\,x))$

$f(x) = e^{-0.08x}\,(20.72\,\cos(0.79\,x) + 12.57\,\text{sen}(0.79\,x)), \quad (x \geq 0)$

texto1 = "Abaixo da posição de equilibrio"
texto2 = "Acima da posição de equilibrio"

$p(x) = \text{Se}(x \geq 0, e^{-0.08x}\,(20.72\,\cos(0.79\,x) + 12.57\,\text{sen}(0.79\,x))) - 20.72$

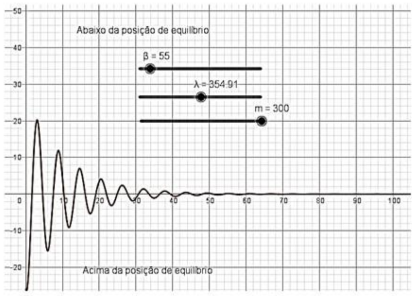
$q(x) = -(\text{Se}(x \geq 0, e^{-0.08x}\,(20.72\,\cos(0.79\,x) + 12.57\,\text{sen}(0.79\,x))) - 20.72)$

A = (0, 0)
B = (5.43, 0)

$f'(x) = -0.08\,e^{-0.08x}\,(20.72\,\cos(0.79\,x) + 12.57\,\text{sen}(0.79\,x)) + e^{-0.08x}\,(-20.72 \cdot 0.79\,\text{sen}(0.79\,x) + 12.57 \cdot 0.79\,\cos(0.79\,x)), \quad (x \geq 0)$

$f''(x) = 0.08 \cdot 0.08\,e^{-0.08x}\,(20.72\,\cos(0.79\,x) + 12.57\,\text{sen}(0.79\,x)) - 0.08\,e^{-0.08x}\,(-20.72 \cdot 0.79\,\text{sen}(0.79\,x) + 12.57 \cdot 0.79\,\cos(0.79\,x)) - 0.08\,e^{-0.08x}$

C = (0, -14.34)
D = (0, -14.34)



A aceleração máxima é dada por $|-26{,}02 + 20{,}24| = 46{,}26\ m/s^2$. Calculando agora quantas vezes a constante gravitacional ocorre, temos

$$\frac{46{,}26}{9{,}8} \cong 4{,}7\ G \text{ (aceleração máxima)}$$

Fonte: $C_1\_RE\_AM_3\_G1$.

Em síntese, o desenvolvimento da atividade *Bungee Rocket* na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias se deu na análise de dois modelos matemáticos da variação do deslocamento da cápsula do brinquedo em relação ao tempo, um que considera o movimento como harmônico simples e outro que considera como livre amortecido. O estudo realizado levou em consideração conhecimentos associados às EDOs de 2ª ordem.

A partir das ações dos estudantes no desenvolvimento dessa atividade, identifica-se na próxima seção os jogos de linguagem associados à aprendizagem, levando em consideração os usos da linguagem e as regras utilizadas pelos estudantes.

4.2.1.4 Identificação de jogos de linguagem que constituem a aprendizagem na atividade Bungee Rocket

Diferente da atividade Salto de Paraquedas no contexto da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, na atividade *Bungee Rocket* os estudantes analisaram dois modelos matemáticos para um mesmo fenômeno e já estavam familiarizados com técnicas de resolução de EDOs de 1ª ordem e 2ª ordem. Nessas circunstâncias, para além de analisar os modelos matemáticos, eles resolveram os PVIs e determinaram as soluções analíticas.

Essa possibilidade de analisar um ou mais modelos matemáticos para um mesmo fenômeno é proposta na literatura sobre análise de modelos como abordagem pedagógica (Soares; Borba, 2011) e na literatura que versa sobre as fases e ações do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, como uma possibilidade de avaliação dos modelos matemáticos (Niss; Blum, 2020).

Podemos caracterizar as seguintes fases no desenvolvimento dessa atividade: *Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples*; *Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido*; *Avaliação e interpretação dos modelos matemáticos em relação ao fenômeno; Resolução dos problemas propostos*. Em cada fase, jogos de linguagem podem ser identificados nas ações dos estudantes e nas regras seguidas por eles.

Na *análise do modelo matemático do movimento harmônico simples*, os seguintes jogos de linguagem foram identificados: resolução analítica do PVI 1, análise do comportamento da solução a partir do seu gráfico e em relação ao fenômeno, cálculo do período e da frequência do movimento, análise da influência de parâmetros no comportamento da solução e interpretação dos resultados em relação ao fenômeno.

Na *resolução analítica do PVI 1*, os estudantes utilizaram o método de resolução de uma EDO linear de 2ª ordem com coeficientes constantes, que recorre a equação característica da EDO e a solução depende da natureza de suas raízes. Esse método já havia sido ensinado pela professora-regente em aulas anteriores ao desenvolvimento essa atividade, assim como o modo de encontrar a solução de um PVI de 2ª ordem.

Resolver o PVI 1 proposto pelo professor-pesquisador na atividade pode ser caracterizado como um jogo de linguagem comum das aulas da disciplina e se assemelha a um dos exemplos de jogos de linguagem apresentados por Wittgenstein, resolver uma tarefa de cálculo aplicado (Wittgenstein, IF, § 23). Ao jogar esse jogo na atividade *Bungee Rocket*, os estudantes mostram a aprendizagem de regras matemáticas específicas da disciplina, com a finalidade de determinar a solução de um PVI.

Na *análise do comportamento da solução a partir do seu gráfico e em relação ao fenômeno*, os estudantes construíram o gráfico da solução analítica com o auxílio do *software* GeoGebra, em seguida, observaram o comportamento da curva no decorrer do tempo e suas implicações no deslocamento da cápsula no brinquedo. Nesse jogo de linguagem, podemos indicar que os estudantes estabeleceram uma relação entre o modelo matemático e o fenômeno, justificando o comportamento da solução a partir da ausência da consideração da força da resistência no ar no modelo matemático.

A aprendizagem nesse jogo de linguagem está associada ao uso da solução do PVI 1 como uma regra matemática que indica o modo como o fenômeno se comporta ao olharmos para ele por meio da lente matemática envolvida no modelo. Um modo de ver o fenômeno, que leva em conta aspectos matemáticos, é adquirido (Quadro 23).

Quadro 23 - Diálogos dos estudantes na análise da solução do PVI 1 na atividade Bungee Rocket

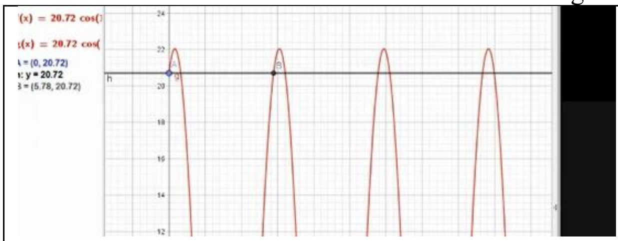
A2: Nesse caso ele permanece porque não tem... como está escrito...
A4: Seria livre de amortecimento? Porque ele não tem amortecimento né.
A2: Isso, aí ele vai ficar constante. Sempre tem o mesmo comportamento no intervalo.
A1: Como você falou fer.
A2: A cápsula não para nesse intervalo aí, porque ela não tem amortecimento. É livre de amortecimento.
A4: O movimento não diminui então ela é continua?
A2: Ela está num intervalo contínuo.
A1: O movimento é constante né.
A2: É, o movimento não para.
PP: Por que o movimento é constante?
A2: O intervalo que o movimento se repete é constante né.
PP: Quando a gente fala que o movimento é constante seria ...
A2: Uma reta.
PP: Isso.
A1: Uma coisa que a gente tem que considerar A4, é aqui seria o chão de onde a cápsula é lançada [apontando com o cursor do mouse para uma região formada pelos pontos máximos do gráfico] e aqui seria o ponto máximo que a cápsula atinge [apontando com o cursor do mouse para uma região formada pelos pontos mínimos do gráfico]
A4: Ah entendi, eu estava pensando que era o contrário. Ai eu até fui procurar como funciona, porque achei que você subia de uma determinada altura, entrava na cápsula e ela era solta e depois voltava sabe.
A1: É não.

Fonte: $C_1\_V\_AM_3\_G1$.

No *cálculo do período e da frequência do movimento*, os estudantes utilizaram dois modos diferentes de determinar o período, uma por meio do gráfico da função traçado no GeoGebra e outra mediante a uma regra matemática para calcular o período de uma função periódica ($P = \frac{2\pi}{\omega}$), em que ω é o parâmetro que multiplica a variável independente; e recorreram ao conceito da frequência como uma grandeza inversa do período.

Nesse jogo de linguagem, os estudantes recorrem a regras matemáticas para determinar propriedades da solução enquanto uma curva e como deslocamento da cápsula no decorrer o tempo. O uso dessas regras sinaliza para a aprendizagem do conceito de período e frequência de uma função trigonométrica. Eles aprendem o uso dessas regras por meio de uma intervenção do professor-pesquisador e de interações com seus pares que os levou a perceberem como podem calcular o período de uma função trigonométrica qualquer. Como resultado, os estudantes realizaram uma construção geométrica no GeoGebra para indicar o período da solução (Quadro 24).

Quadro 24- Diálogos dos estudantes no cálculo do período e da frequência da solução do PVI 1 na atividade Bungee Rocket



A1: O período corresponde ao menor intervalo de tempo que acontece a repetição de determinado fenômeno [*lendo uma informação obtida com pesquisa na internet*].
A2: Então, é de 0 a alguma coisa. De 0 a infinito, porque não vai parar.
A1: Ah tá, período é isso aqui ó. Deixa-me dar um zoom aqui. Ela começa aqui, desce e sobe. Se eu continuar desse ponto em diante já é uma repetição né.... O período é todo esse movimento aqui, até aqui... [*apontando para o comportamento da curva que se repete no decorrer do tempo*]. Então esse é o período...E como descobre o valor disso?
A2: Colocar dois pontos?
A1: Você me deu uma ideia. A gente pode colocar um ponto aqui e traçar uma reta.
A2: Sim, faz a interseção e aí vai achar o outro ponto.
A2: O período vai de 0 a 5,78.

Gráfico da função $sen(x)$ traçado por A1 no GeoGebra

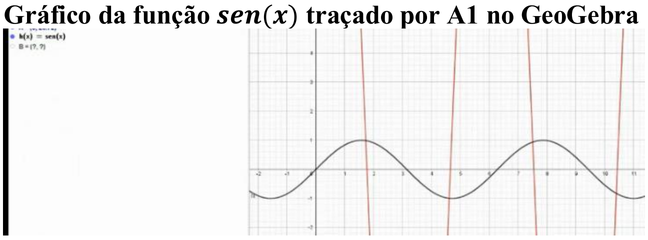
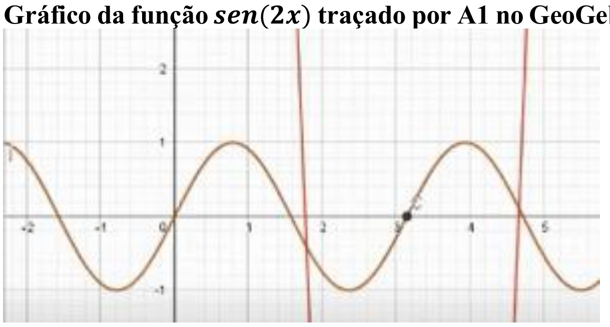


Gráfico da função $sen(2x)$ traçado por A1 no GeoGebra



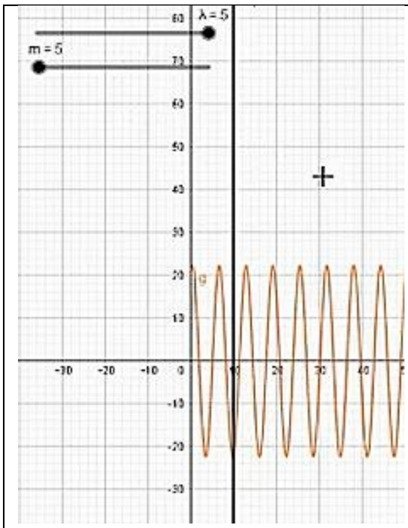
PP: Perguntaram da frequência e do período né. Então, o que é o período?
A1: Nós traçamos um ponto e uma perpendicular ao eixo y e depois a intersecção dessa perpendicular com a curva. Mas tá certo isso aqui? Porque a gente não sabe calcular.
PP: É, essa é uma forma de obter o período. E como vocês podem calcular o período de uma função trigonométrica?
A2: Esse é o problema né.
PP: Tá, amplia aí o GeoGebra. Vou explicar como faz o cálculo, mas essa é uma forma de obter o período. Aí vocês escolhem.
PP: Então, vai lá, traça o gráfico da função sen(x). Qual é o período dessa função? [...] É o tempo que demora para dar uma volta no círculo trigonométrico.
A1: 0 a 2 pi.
PP: Então qual é o período?
A1: 2 pi.
A1: Até aqui.
PP: Trace agora o gráfico da função sem(2x). Qual é o período?
A1: é pi aparentemente.
PP: Trace agora da função sen(3x). qual é o período dessa função?
A1: 2pi sobre três?
PP: Isso, exato.
PP: Então qual é o período da função sen(4x)?
A1: tem que dar pi sobre dois né
PP: Isso, exato. Então qual é o período da função de vocês, olhando para o que está multiplicando a variável independente
A4: Vai ser dois pi?
PP: Não, dois pi sobre o que?
A1: 1,09?
PP: Isso.
PP: A frequência é o inverso do período. Como podemos calcular a frequência.

A1: vai ficar C/2pi. PP: Isso. Ou 1 sobre o período. E o que a frequência significa? A2: A gente achou que era o número de vezes que ela se repetia. PP. Isso. Em uma unidade de tempo. A1: deu 0.17. Tá certo isso aqui? PP: O que isso significa? A1: que a cápsula percorre 0,17 de um movimento completo em um segundo.

Fonte: $C_1\_V\_AM_3\_G1$.

Na *análise da influência de parâmetros no comportamento da solução*, os estudantes inseriram no GeoGebra controles deslizantes para os parâmetros m e λ, que designam a massa e o coeficiente de elasticidade, respectivamente. Ao movimentar esses controles, modificações na curva da solução foram percebidas e interpretadas em relação à frequência e ao período do deslocamento da cápsula (Quadro 25).

Quadro 25 - Análise da influência de parâmetros no comportamento da solução do PVI 1 na atividade Bungee Rocket



A1: Se a gente mexe o lambda, altera tudo, amplitude, período e frequência.
PP: O que acontece com o período quando o lambda aumenta?
A1: Quanto maior o lambda, mais o gráfico de aproxima do gráfico anterior [referindo-se ao gráfico com valores dos parâmetros fixos]
PP: Assim, é que vocês estão aumentando o lambda né, mas o intervalo do controle deslizante ali de m e de lambda tá em um intervalo pequeno.
A1: Então veja, quanto maior o lambda, a frequência fica menor e o período fica menor.
PP: Não, a frequência aumenta né.
A2: é, se o período diminui então a frequência aumenta né.
PP: Para vocês analisarem a frequência, tracem uma reta paralela ao eixo y que intercepta o gráfico ali em x=10.
A1 Traça a reta sugerida pelo PP no GeoGebra.
PP: Olhando nesse intervalo de tempo de 0 a 10. Supondo que a unidade de tempo seja 10 s, quantos períodos cabem? Então, é isso, essa é a frequência. Mexe no parâmetro lambda, o que acontece com a frequência quando o lambda diminui?
A4: diminui
PP: E o período?
A4: aumenta.
A4: Então quanto maior o lambda, menor o período e maior a frequência.
PP: Ai tem que pensar depois o que isso significa à luz do fenômeno.
A1: Perai, quanto maior o lambda maior a frequência e menor o período [*movimentando o parâmetro lambda no controle deslizante*]
PP: Isso, todos concordam?
A4 e A2: Sim.
A1: Porque, frequência tem mais movimentos até *10 [movimentando o parâmetro lambda e visualizando o gráfico*]
PP: Isso, considerando o intervalo de tempo de 0 a 10.
A1: E quanto maior a massa, menor a frequência e maior o perímetro.
PP: E tá acontecendo outra coisa, além da frequência e do período.
A1: Amplitude né.
PP: O que acontece com ela.
A1: A amplitude cresce quando a massa aumenta.

Fonte: $C_1\_V\_AM_3\_G1$.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada ao uso do modelo matemático como uma condição para descrição do comportamento do fenômeno, funcionando como uma regra, na qual mudanças do seu modo de aplicar gera implicações no comportamento do fenômeno percebido. Com isso, os estudantes perceberam que a massa da cápsula (m) é diretamente proporcional ao período do movimento e, consequentemente, inversamente proporcional a frequência do movimento. Por outro lado, o coeficiente de elasticidade λ é inversamente proporcional ao período e diretamente proporcional a frequência do movimento.

Na *interpretação dos resultados em relação ao fenômeno* ocorreu uma avaliação qualitativa do modelo matemático, comparando o comportamento da solução com as características do fenômeno e indicando que o modelo matemático do movimento harmônico simples não é adequado, pois não leva em consideração a força de resistência do ar, o que implica que a cápsula oscilaria infinitamente em uma mesma amplitude.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada ao aprendizado de uma técnica da avaliação qualitativa do modelo matemático, cujo foco direciona-se para as suas propriedades estruturais (Niss; Blum, 2020), o que fornece a formulação de justificativas para o seu aceite ou não, a partir do estudo das hipóteses consideradas inicialmente (Javaroni; Soares, 2012).

> PP: Olhando para a função encontrada o que vocês podem dizer sobre o fenômeno?
> A1: Podemos dizer que essa função não se enquadra ao fenômeno.
> PP: Por que não se enquadra? E quais as implicações dessa função para o fenômeno? Como seria o fenômeno, se essa função descrevesse o fenômeno?
> A4: Seria o fato de faltar a resistência do ar. Porque se a função valesse, a cápsula bateria no chão né. Ela ia ir e voltar e na outra [*referindo-se à solução do PVI 2*] como considera a resistência do ar, há uma queda brusca na velocidade.
> A4: A função sem pensar na resistência do ar, ela funciona. Mas se pensarmos no brinquedo em si, essa função não funciona porque não considera a força de resistência do ar. [...]
> A4: Sabe uma coisa interessante. Se a gente ignorar a gravidade e a resistência do ar, ela [*referindo-se à cápsula*] vai subir e descer infinitamente, porque não tem nada que pare ela. Porque não tem o amortecimento né... Agora entendi, o amortecimento é a força de resistência do ar... Entendi!
> A1: É que você ainda não abriu o gráfico do outro PVI. Tem um que é parecido com esse aqui, mas conforme o tempo vai passando, a amplitude vai diminuindo até que a cápsula tende a parar.
> A4: Entendi, é conforme desce e sobe, a força de resistência do ar faz com que a cápsula perca velocidade até parar (C_1_V_AM_3_G1).

Na fase *Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido*, que considera a força de resistência do ar no movimento da cápsula no decorrer do tempo como uma força de amortecimento, pode-se identificar os jogos de linguagem: formulação de uma justificativa para a classificação do movimento como livre e amortecido; resolução do PVI 2 considerando três casos possíveis (movimento superamortecido, amortecimento crítico e subamortecido), análise do comportamento da solução nos três casos de amortecimento e comparação das três soluções possíveis em relação ao comportamento do fenômeno.

Na *formulação de justificativa para a classificação do movimento como livre e amortecido* os estudantes realizaram um estudo das propriedades estruturais do modelo matemático com relação às hipóteses consideradas na sua construção (Javaroni; Soares, 2012). Nesse jogo de linguagem, olharam para as forças que agem sobre a cápsula no decorrer do movimento que foram levadas em consideração na construção do modelo e indicaram que o movimento pode ser classificado como livre e amortecido, pois a força de resistência do ar atua como uma força de amortecimento.

Em relação a aprendizagem nesse jogo de linguagem, podemos dizer que ela está relacionada a construção de argumentos a partir do uso da matemática em relação aos aspectos relevantes do fenômeno. Esses argumentos buscam justificar as hipóteses formuladas na construção do modelo matemático:

> A4: Acredito que o movimento é livre e amortecido porque não considera a resistência do ar. Ele é um movimento livre, mas agora é amortecido porque considera a resistência do ar, diferente do PVI 1.

Na *resolução do PVI 2*, da mesma maneira que na resolução do PVI 1, os estudantes seguiram regras matemáticas para resolver uma EDO linear de 2ª ordem com coeficientes constantes. Contudo, nesse jogo de linguagem, consideraram três casos de amortecimento, que dependem natureza das raízes obtidas, a partir do valor do $\Delta = \gamma^2 - \omega^2$ da equação característica da EDO. Para $\gamma^2 - \omega^2 > 0$ temos um movimento superamortecido. Para $\gamma^2 - \omega^2 = 0$ temos um movimento de amortecimento crítico. Para $\gamma^2 - \omega^2 < 0$ um movimento subamortecido. Essas relações de implicação constituem uma regra, por meio da qual os estudantes analisaram o comportamento das possíveis soluções em relação ao fenômeno.

Dessa forma, nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada ao estabelecimento de uma relação de implicação entre a natureza das raízes da equação característica e o tipo de amortecimento do movimento da cápsula no decorrer do tempo.

Na *análise do comportamento da solução nos três casos de amortecimento* os estudantes analisaram o comportamento da função do deslocamento da cápsula no decorrer do tempo, em cada um dos três casos. A depender do valor do parâmetro β (coeficiente de resistência do ar ou de amortecimento) a solução do PVI 2 assume uma determinada configuração. Utilizando o *software* GeoGebra realizaram uma análise do comportamento da solução a partir do seu gráfico e a movimentação do controle deslizante para o parâmetro β.

Nesse jogo de linguagem, por sua vez, a aprendizagem está associada a aquisição de um modo de ver o comportamento do fenômeno, a partir da análise do comportamento da solução em cada um dos casos de amortecimento. Esse modo de ver considera o impacto do tipo de amortecimento nas oscilações da cápsula no decorrer do tempo.

> A1:Para $\beta > 652{,}6097$, a cápsula está posição inicial (b) aí tem que puxar para baixo para dar aquele impulso e fazer o movimento, aí quando a gente deixa o gráfico desse jeito aqui, fica mais fiel ao movimento. A cápsula saí do chão e tende a posição de equilíbrio e não passa dessa posição, porque é superamortecido. [...]
> A4: É impossível isso acontecer [$\beta = 652{,}6097$]
> A1: É, nesse a cápsula saí do chão, passa um pouco da posição de equilíbrio e já volta né. Se for pensar nos elásticos que seguram a cápsula, eles teriam que ser muito fortes, porque você puxa fazendo o efeito estilingue, o elástico já te puxa de volta e você já para.
> A4: E isso não acontece né em relação ao brinquedo né. [...]
> PP: Porque para $\beta < 652{,}6097$ o movimento é subamortecido?
> A1: Porque a resistência do ar vai fazendo que a velocidade da cápsula diminua até que a cápsula estabilize na posição de equilíbrio.
> PP: Isso, o que acontece com a amplitude do movimento?
> A1: Ela vai diminuindo ($C_1\_V\_AM_3\_G1$).

Na *comparação das três soluções possíveis em relação ao comportamento do fenômeno*, foram comparadas as três soluções possíveis dos três casos de amortecimento entre si, indicando qual tipo de amortecimento se adequada ao comportamento do fenômeno.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada a aquisição da técnica de avaliação comparativa de possíveis soluções em relação fenômeno e à tomada de decisão em relação a viabilidade da solução e seu tipo de amortecimento.

> A1: Mas olhando assim, a gente vê no gráfico, que para delta<0, faz mais sentido. Você lança a cápsula, ela passa da posição de equilíbrio e oscila até atingir a posição de equilíbrio.
> A3: É a outra não faz sentido na minha cabeça.
> A1: Então acho que sim, essa faz mais sentido, porque veja conforme o tempo passa a amplitude vai diminuindo até atingir a posição de equilíbrio.
> A4: É nesse movimento do beta menor que aquele número lá [652,6097] parece ser o mais certo né. Pensa comigo, a cápsula sai ali do ponto G, sobe mas quando desce não atinge o ponto G novamente, mas quando ele sobe novamente ele não atinge o ponto máximo novamente. Ele vai diminuindo né.
> A1: É para beta igual a zero, ela não vai diminuindo né o ponto máximo né.
> A4: Sabe o que parece nesse gráfico ai [$\beta = 0$] um pêndulo, ele sempre oscila indo e voltando. E no caso do subamortecido vai tendendo a posição de equilíbrio ($C_1\_V\_AM_3\_G1$).

Na fase *Avaliação e interpretação dos modelos matemáticos em relação ao fenômeno*, identifica-se os jogos de linguagem: avaliação comparativa dos dois modelos matemáticos e resolução dos problemas propostos.

Na *avaliação comparativa dos dois modelos matemáticos*, foram comparados o comportamento do modelo matemático do deslocamento da cápsula em um movimento livre sem amortecimento e o comportamento do modelo do matemático que indica um movimento livre subamortecido. Nessa comparação, os estudantes destacaram as semelhanças e diferenças dos dois modelos, seus pontos fortes e fracos e decidiram qual modelo matemático se adequa melhor ao fenômeno.

> A1: o que a gente considerou como diferença é que $x_1(t)$ [solução do PVI 1] não envolve a força de resistência do ar, já a $x_2(t)$ envolve a resistência do ar [solução do PVI 2].
> PP: E de semelhança?
> A1: a gente não viu muita semelhança entre as duas funções, a gente até tinha comentado do movimento vai e vem, mas não fizemos muito mais coisa.
> PP. Isso é uma semelhança, não é?
> A1: Sim, mas é que para a segunda função, a amplitude vai diminuindo né ($C_1\_V\_AM_3\_G1$).

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada também a aquisição da técnica de avaliação comparativa de dois modelos matemáticos entre si, tendo como pano de fundo as características do fenômeno modelado. Nessa análise, os estudantes analisam as implicações de cada um dos modelos no modo de ver o comportamento do fenômeno.

Na *resolução dos problemas propostos,* ocorreu a construção de duas funções, uma para a altura da cápsula em relação ao tempo, a partir de um deslocamento vertical nos eixos coordenados da função do deslocamento, e outra para a aceleração da cápsula no decorrer do movimento, obtida a partir da derivada de segunda ordem da função do deslocamento, com o auxílio do *software* GeoGebra. Para responder os problemas, os alunos estimaram o valor do parâmetro β adequado para o brinquedo, por meio da contagem do número de oscilações da cápsula em um vídeo que mostra o funcionamento do brinquedo e o ajuste do controle deslizante desse parâmetro e o número de oscilações da curva, como indica o Quadro 26.

Quadro 26 - Estimando o valor de beta na atividade Bungee Rocket

A1: Para responder o problema, a gente tem que determinar esse valor de beta né.
A2: O PP sugeriu a gente ver o vídeo para ver qual é a altura máxima que o brinquedo atinge.
A1: Ou seja, a gente pode ver o vídeo e contar quantas oscilações a cápsula dá no funcionamento real do brinquedo né e depois movimentar os parâmetros né.
A4: Contei umas dez vezes mais ou menos até parar.

Fonte: $C_1\_V\_AM_3\_G1$.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada, portanto, a regras matemáticas para manipulação dos parâmetros de uma função e da aceleração de um objeto como derivada segunda da função do deslocamento, bem como na realização de estimativas a partir de informações sobre o fenômeno e na análise do comportamento da solução do modelo matemático considerado adequado.

Onze jogos de linguagem foram identificados no desenvolvimento da atividade *Bungee Rocket* a partir das ações e das regras utilizadas pelos estudantes na: *Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples*, *Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido* e *Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido*, conforme o Quadro 27.

Quadro 27 - Jogos de linguagem associados à aprendizagem na atividade Bungee Rocket

Fases do desenvolvimento da atividade	Jogos de linguagem	Sinalização de aprendizagem
Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples	Resolução analítica do PVI 1	Aprendizagem de regras matemáticas específicas da disciplina, com a finalidade de determinar a solução de um PVI.
	Análise do comportamento da solução a partir do seu gráfico e em relação ao fenômeno	Aquisição de modo ver o fenômeno com base em regras matemáticas.
	Cálculo do período e da frequência do movimento	Aprendizagem dos conceitos de período e frequência de uma função trigonométrica e suas implicações para o deslocamento da cápsula no decorrer do tempo.
	Análise da influência de parâmetros no comportamento da solução	Uso do modelo matemático como uma condição para descrição do comportamento do fenômeno, funcionando como uma regra.
	Interpretação dos resultados em relação ao fenômeno	Aprendizado de uma técnica da avaliação qualitativa do modelo matemático, cujo foco direciona-se para as propriedades estruturais do modelo matemático
Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido	Formulação de justificativa para a classificação do movimento como livre e amortecido	Construção de argumentos a partir do uso da matemática em relação aos aspectos relevantes do fenômeno
	Resolução do PVI 2 considerando três casos possíveis (movimento superamortecido, amortecimento crítico e subamortecido)	Estabelecimento de uma relação de implicação entre a natureza das raízes da equação característica e o tipo de amortecimento do movimento da cápsula no decorrer do tempo
	Análise do comportamento da solução nos três casos de amortecimento	Aquisição de um modo de ver o comportamento do fenômeno, a partir da análise do comportamento da solução em cada um dos casos de amortecimento
	Comparação das três soluções possíveis em relação ao comportamento do fenômeno.	Aquisição da técnica de avaliação comparativa de possíveis soluções em relação fenômeno
Avaliação e interpretação dos modelos matemáticos em relação ao	Avaliação comparativa dos dois modelos matemáticos	Aquisição da técnica de avaliação comparativa de dois modelos matemáticos entre si, tendo como pano de fundo as características do fenômeno modelado

fenômeno	Resolução dos problemas propostos	Uso de regras matemáticas para manipulação dos parâmetros de uma função e da aceleração de um objeto como derivada segunda da função do deslocamento, bem como a realização de estimativas a partir de informações sobre o fenômeno e análise do comportamento da solução do modelo matemático considerado adequado

Fonte: os autores.

Nessa atividade, diferente da atividade Salto de Paraquedas, em posse de técnicas aprendidas para resolução de EDOs de 2º ordem, em particular da EDO de 2º ordem homogênea linear com coeficientes constantes, os estudantes resolveram dois PVIs, o primeiro que não considera a força de resistência e o segundo que considera essa força como uma força de amortecimento, que a depender do coeficiente de resistência do ar o movimento pode ser classificado em superamortecido, amortecimento crítico ou subamortecido.

Por meio da análise de dois modelos matemáticos diferentes para o fenômeno, os jogos de linguagem envolvidos no desenvolvimento dessa atividade sinalizam para a aprendizagem de regras específicas da disciplina, como resolver um PVI, que envolve uma EDO de 2ª ordem com coeficientes constantes, e de regras associadas a conteúdos matemáticos, não específicas dessa disciplina, como as propriedades de uma função trigonométrica, a partir da análise do período, frequência e amplitude do movimento.

Em segundo lugar, podemos dizer que ao analisar o comportamento das soluções obtidas para cada modelo matemático e a influência dos parâmetros nesse comportamento em relação ao fenômeno, as ações dos estudantes e as regras usadas por eles constituem jogos de linguagem que conectam o uso de conceitos matemáticos com características específicas do fenômeno estudado, de modo que diferentes modos de ver o fenômeno podem ser construídos, a depender do modelo matemático usado.

Em terceiro lugar, os jogos de linguagem da avaliação dos modelos matemáticos, comparação entre soluções de uma EDO de 2ª ordem e interpretação dos resultados em relação ao comportamento do fenômeno sinalizam para a aprendizagem de técnicas e procedimentos da análise de modelos matemáticos enquanto abordagem pedagógica (Javaroni; Soares, 2012; Soares, 2012, 2015; Soares; Borba, 2011) e do fazer modelagem matemática, em especial da fase de interpretação dos resultados e validação (Niss; Blum, 2020).

Por fim, destaca-se que os jogos de linguagem envolvidos na análise dos modelos matemáticos nessa atividade foram mediados pelo uso do *software* GeoGebra. Esse recurso possibilitou que os estudantes pudessem visualizar gráficos das soluções; simular graficamente diferentes cenários, considerando diferentes valores para os parâmetros ou diferentes hipóteses acerca das forças físicas que agem sobre o Bungee Rocket; realizar cálculos e construir funções, como é o caso da função da altura da cápsula e da aceleração. Além do *software* GeoGebra, o ambiente educacional em que esses jogos foram constituídos envolve outros recursos tecnológicos como Google Meet, Google Docs, mesa digitalizadora, quadro virtual para anotações, WhatsApp, Google Classroom.

Nessa atividade, os jogos de linguagem evidenciam que os estudantes seguiram regras e conhecimentos específicos da disciplina e de outros conteúdos matemáticos, com a finalidade de analisar dois modelos matemáticos que geram modos distintos de ver o comportamento do movimento da cápsula no decorrer do tempo, revelando a importância de considerar as características do fenômeno na formulação das hipóteses que conduzem a construção do modelo matemático.

Em comparação aos jogos de linguagem da atividade *Salto de Paraquedas*, na atividade *Bungee Rocket*, os estudantes já haviam estudado o método de resolução da EDO presente nos modelos matemáticos. Com isso, nessa segunda atividade, a análise dos modelos do movimento harmônico simples e do movimento livre amortecido se deu a partir da solução analítica e seu gráfico construído no *software* GeoGebra. Além disso, evidencia-se nessa atividade jogos de linguagem que assumem a função de objetos de comparação, na qual ocorreu comparações entre as soluções dos modelos matemáticos entre si, com a finalidade de analisar suas implicações para o comportamento do fenômeno.

4.2.2 Aprendizagem nas atividades da disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática

Na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, as atividades foram desenvolvidas de acordo com uma abordagem holística, na qual os estudantes percorreram todo o ciclo de modelagem matemática, desde a inteiração com a situação-problema, a construção de um ou mais modelos matemáticos e a análise desse modelo.

Em relação à finalidade pedagógica, o objetivo era possibilitar que os estudantes pudessem aprender a fazer modelagem matemática, com a finalidade de resolver situações-problema da realidade. A seguir apresentamos a descrição de três atividades, uma com o problema formulado pelos estudantes e temática sugerida pelo professor-pesquisador e as outras duas com a temática escolhida pelos estudantes.

4.2.2.1 Descrição da atividade Salto de Paraquedas

A atividade 'Salto de Paraquedas' foi desenvolvida na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática com alunos do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática, de 09/03/2022 a 16/03/2022, em quatro horas-aula nas aulas regulares da disciplina e encontros assíncronos realizados de forma remota fora do horário regular das aulas com os grupos.

No dia 09/03/2022, as aulas (duas horas-aula) foram realizadas de forma remota síncrona via *Google Meet* e envolveu a apresentação da situação-problema pelo professor-pesquisador aos alunos em uma sala remota com todos os alunos da disciplina. Em seguida, os alunos foram distribuídos em salas remotas separadas conforme os grupos organizados para o desenvolvimento da atividade 'Salto de Paraquedas' para formular o problema a ser resolvido na atividade. Em 16/03/2022, as aulas (duas horas-aula) foram realizadas de forma presencial na instituição de ensino e os alunos, reunidos em grupos, continuaram o desenvolvimento da atividade, com foco na construção do modelo matemático, na resolução do problema e na interpretação dos resultados e validação do modelo matemático. Durante a semana entre 09/03/2022 e 16/03/2022 o desenvolvimento da atividade ocorreu de forma assíncrona, em encontros remotos via *Google Meet* e em conversas no *WhatsApp*.

O objetivo pedagógico com foi promover a construção de modelos matemáticos na resolução de um problema formulado pelos alunos a partir de uma situação da realidade. O enunciado da atividade apresentado pelo professor-pesquisador continha as mesmas informações que foram apresentadas na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias (Quadro 7), exceto pela formulação do problema que ficou a cargo dos estudantes. Nessa seção apresentamos uma descrição do desenvolvimento da atividade dos alunos do grupo GM2 e GM4.

Os alunos do grupo GM2 formularam o problema: "*Qual a velocidade do pouso do paraquedista em diferentes instantes de abertura do paraquedas?*" (C2_RE_MM_1_GM2), com o objetivo de determinar a velocidade em que o paraquedista poderia pousar considerando três situações distintas que determinam diferentes instantes de abertura de paraquedas e diferentes instantes para o pouso. Uma síntese da resolução dos estudantes desse grupo para essa atividade pode ser vista no Quadro 28.

Quadro 28 - Síntese da resolução do grupo GM2 na atividade salto de paraquedas no contexto 2

SALTO DE PARAQUEDAS – GM2

PROBLEMA: Qual a velocidade do pouso do paraquedista em diferentes instantes de abertura do paraquedas?

VARIÁVEIS E PARÂMETROS

Variável independente:

. Do salto até a abertura do paraquedas, temos 0 a t_a (com t_a sendo o instante de abertura do paraquedas). O tempo de queda com paraquedas aberto até o pouso, temos t_a a t_p (com t_p sendo o instante de pouso).

Variável dependente:

$v(t)$: velocidade em relação ao tempo.

MODELO MATEMÁTICO

$$v(t) = \sqrt{\frac{m.g}{k}}.\left(\frac{C.e^{2.\sqrt{\frac{k}{mg}}.g.t} - 1}{C.e^{2.\sqrt{\frac{k}{mg}}.g.t} + 1}\right)$$

Situação 1:

$$v_1(t) = 45{,}166.\left(\frac{e^{2.\sqrt{0{,}00049}.9{,}8.t}-1}{e^{2.\sqrt{0{,}00049}.9{,}8t}+1}\right), \text{em } 0 \le t \le 55$$

$$v_2(t) = 5{,}66.\left(\frac{-1{,}29.e^{3{,}46.(t-55)}-1}{-1{,}29.e^{3{,}46.(t-55)}+1}\right), \text{em } 55 < t \le 450$$

Situação 2:

$$v_1(t) = 45{,}166.\left(\frac{e^{2.\sqrt{0{,}00049}.9{,}8.t}-1}{e^{2.\sqrt{0{,}00049}.9{,}8t}+1}\right), \text{em } 0 \le t \le 300$$

$$v_2(t) = 5{,}66.\left(\frac{-1{,}29.e^{3{,}46.(t-300)}-1}{-1{,}29.e^{3{,}46.(t-300)}+1}\right), \text{em } 300 < t \le 550$$

Situação 3:

$$v_1(t) = 45{,}166.\left(\frac{e^{2.\sqrt{0{,}00049}.9{,}8.t}-1}{e^{2.\sqrt{0{,}00049}.9{,}8t}+1}\right), \text{em } 0 \le t \le 400$$

$$v_2(t) = 5{,}66.\left(\frac{-1{,}29.e^{3{,}46.(t-400)}-1}{-1{,}29.e^{3{,}46.(t-400)}+1}\right), \text{em } 400 < t \le 600$$

HIPÓTESES E SIMPLIFICAÇÕES

- Situação 1: $t_a = 55s$, uma média entre 50s e 1 min (tempo que leva para abrir o paraquedas a partir do salto). $t_p = 450s$, uma média de 5 a 10 min (tempo de queda até o pouso). Conforme informado na situação-problema.
- Situação 2: $t_a = 300s$ e $t_p = 550$ s.
- Situação 3: $t_a = 400s$ e $t_p = 600$ s

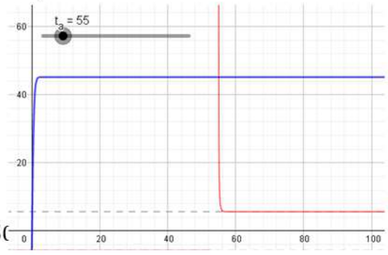
Quanto maior o tempo para a abertura do paraquedas, maior será a velocidade do pouso,

Foi considerado para modelar esse problema, a força da gravidade e a força de arrasto. Sendo que para a força da gravidade utilizamos o produto entre a massa do paraquedista e 9,8m/s para a aceleração da gravidade.

Para a força de arrasto, os valores vão alterar conforme o momento a ser estudado.

Para a massa do paraquedista, vamos considerar o valor de 70 kg para se aproximar da média, segundo o IBGE, de 69,4 kg

RESPOSTA PARA O PROBLEMA



Depois da análise dos gráficos percebemos que se o paraquedista abrir o paraquedas depois do tempo aceitável, 1 minuto, ele não terá tempo hábil para desacelerar para uma velocidade de pouso segura de 20 km/h.

VALIDAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

É válido, pois as informações encontradas por meio desse modelo matemático é compatível com as informações fornecidas. Podemos ver pelo Gráfico 2, que representa a velocidade em queda livre, conforme a velocidade do paraquedista vai diminuindo, a velocidade vai tendendo para 5,66 m/s. De acordo com os valores atribuídos ao modelo encontrado, podemos verificar por meio dos gráficos que se o tempo de abertura do paraquedas for maior que 60 segundos, o paraquedista não terá tempo para desacelerar de forma que não será possível fazer um pouso seguro.

Fonte: C2_RE_MM_1_GM2.

A primeira situação leva em consideração informações fornecidas pelo professor-pesquisador na situação-problema proposta, enquanto as outras duas situações são situações hipotéticas, idealizadas pelos alunos para analisar a velocidade de abertura de paraquedas e a velocidade de pouso em diferentes cenários. Diante dessas situações, eles conjecturaram que "*quanto maior o tempo para a abertura do paraquedas, maior será a velocidade do pouso*" (C2_RE_MM_1_GM2).

A partir da análise das forças que agem sobre o paraquedista no decorrer do salto, os estudantes consideraram como hipótese que conforme "a velocidade do corpo vai aumentando, a resistência do ar também aumenta, até o momento em que ela se equilibra com a força da atração da gravidade, estabilizando a velocidade em um movimento retilíneo uniforme" (C2_RE_MM_1_GM2). Sendo assim, utilizaram a premissa de que a força resultante que age sobre o paraquedista é igual a diferença entre a força de atração da gravidade e a força de arrasto do ar e, pela segunda lei de Newton, essa força resultante é proporcional ao produto da massa pela aceleração. A formulação matemática das forças que agem sobre o paraquedista durante o salto deu origem a construção de uma EDO separável de 1ª ordem, dada por:

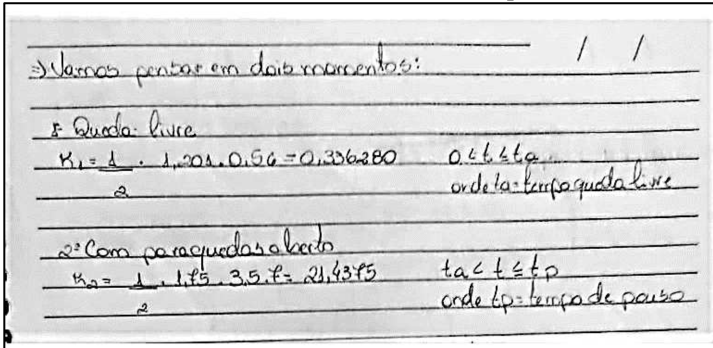
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}.v^2$$

Em que $v(t)$ é a velocidade do paraquedista em relação ao tempo, g é a aceleração da gravidade, k é uma constante determinada pela resistência do ar e m é a massa do paraquedista. O modelo matemático resultante se deu a partir da resolução dessa EDO, utilizando o método das variáveis separáveis:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\frac{\left(C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\lambda}{m}.t} - 1\right)}{\left(1 + C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\lambda}{m}.t}\right)}, com\ C\ constante$$

Os parâmetros do modelo matemático foram obtidos a partir da substituição das informações fornecidas pelo professor-pesquisador, considerando a velocidade do paraquedista em dois intervalos de tempo, queda-livre e $(0 \leq t \leq t_a)$ e com o paraquedas aberto $(t_a < t \leq t_p)$, conforme o Quadro 29.

Quadro 29 - Obtenção dos valores dos parâmetros na atividade salto de paraquedas no contexto 2



Vamos pensar em dois momentos:
1º Queda-livre:
$k_1 = \frac{1}{2}.1{,}201.0{,}56 = 0{,}336280 \quad 0 < t \leq t_a$
Onde t_a= *tempo queda-livre*
2º Com paraquedas aberto:
$k_2 = \frac{1}{2}.1{,}75.3{,}5.7 = 21{,}4375 \quad t_a < t \leq t_p$
Onde t_p= *tempo de pouso*

Fonte: C2_RE_MM_1_GM2.

O objetivo era determinar a velocidade de pouso do paraquedista para diferentes valores para o instante que o paraquedista abre o paraquedas e para o instante em que ele pousa. Para isso, os alunos calcularam a velocidade de abertura do paraquedas e a velocidade de pouso para cada uma das três situações, considerando a condição inicial $v_1(0) = 0$ para a solução geral da EDO no intervalo de tempo de queda-livre e $v_2(0) = v_1(t_a)$ no intervalo de tempo com paraquedas aberto (Quadro 30).

Quadro 30 - Determinação dos parâmetros no modelo da atividade salto de paraquedas no contexto 2

Situação 1

Para $t_a = 55\ s$, temos

$v_1(55) = 45{,}166.\left(\frac{e^{23{,}8625}-1}{e^{23{,}8625}+1}\right) = 45{,}166$ m/s

$= 162{,}594$ km/h

Para $t_p = 450$, temos

$$v_1(t_p) = 5{,}66.\left(\frac{-1{,}29e^{3{,}46.(t_p-55)}-1}{-1{,}29.e^{3{,}46.(t_p-55)}+1}\right)$$

Situação 2

Agora vamos supor $t_a = 300s$

1ª Queda-livre.

$v_1(300) = 45{,}166.\left(\frac{e^{130{,}159}-1}{e^{130{,}15}+1}\right) = 45{,}166.1 = 45{,}166$m/s

Para $t_p = 550s$

$$v_2(t_p) = 5{,}66.\left(\frac{-1{,}29e^{3{,}46.(t_p-300)}-1}{-1{,}29.e^{3{,}46.(t_p-300)}+1}\right)$$

Situação 3

Agora vamos supor $t_a = 400s$

1ª Queda-livre.

$v_1(400) = 45{,}166.\left(\frac{40{,}7254-1}{e^{47{,}7254}+1}\right) = 45{,}166.1 = 45{,}166$m/s

Para $t_p = 600s$

$$v_2(t_p) = 5{,}66.\left(\frac{-1{,}29e^{3{,}46.(t_p-400)}-1}{-1{,}29.e^{3{,}46.(t_p-400)}+1}\right)$$

Fonte: C2_RE_MM_1_GM2.

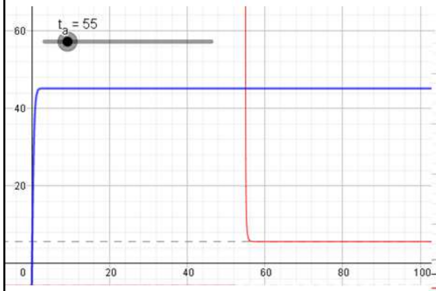
Essas funções foram inseridas no *software* GeoGebra e os estudantes do grupo GM2 realizaram uma análise a respeito do comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo e as implicações das três situações consideradas para a velocidade de pouso (Quadro 31). Essa análise resultou na interpretação dos resultados e validação do modelo matemático, em que consideraram que o modelo matemático é válido:

> Sim, por meio de cálculos e interpretação gráfica percebemos que a tendência de velocidade de pouso é de aproximadamente 20 km/h, conforme apresentado na situação inicial. E que se caso o paraquedista leve mais tempo para abrir o paraquedas menor o limite de tempo para ele desacelerar para essa velocidade, o que faz com que a velocidade de pouso não seja segura (C2_RE_MM_1_GM2).

Como resultado, argumentaram que *depois da análise dos gráficos percebemos que se o paraquedista abrir o paraquedas depois do tempo aceitável, 1 minuto, ele não terá tempo hábil para desacelerar para uma velocidade de pouso segura de 20 km/h*" (C2_RE_MM_1_GM2).

Quadro 31 - Análise do modelo matemático para cada uma das situações na atividade salto de paraquedas no contexto 2

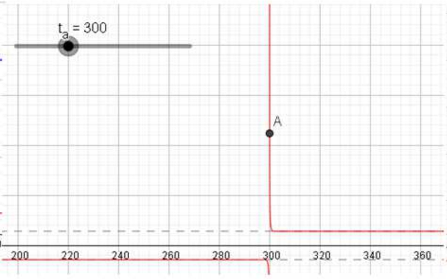
Situação 1



Observe que a curva V_2 tende a uma velocidade de pouso de 5,66 m/s, aproximadamente 20,37 Km/h. Além disso, veja que a interseção de V_1 e V_2 é momento de abertura do paraquedas, na velocidade já calculada de 45,166 m/s.

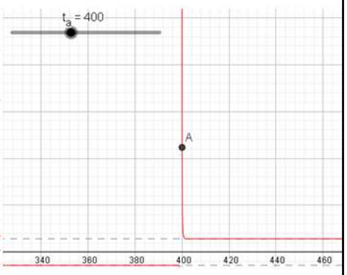
O paraquedista salta a uma velocidade 0 m/s e sua velocidade vai aumentando até ficar constante, que é a velocidade que ele abrirá o paraquedas, 45,166 m/s. Após esse momento, a velocidade do paraquedista vai diminuindo, tendendo a 5,66 m/s.

Situação 2



Temos uma situação semelhante à anterior, mas veja que o paraquedista abriu o paraquedas em 300 segundos, ou seja, 5 minutos após o salto do avião. Entretanto, observe que o ponto A representa a velocidade nesse tempo. Logo, é fácil notar que, mesmo a velocidade de pouso tendendo a 5,66 m/s o tempo entre a abertura do paraquedas e o pouso não é suficiente para desacelerar para uma velocidade segura de pouso.

Situação 3



Analogamente ao caso anterior, o paraquedista não terá tempo hábil para desacelerar o paraquedas de forma a se atingir uma velocidade de pouso segura.

Fonte: C2_RE_MM_1_GM2.

Os estudantes do grupo GM4, por sua vez, formularam o seguinte problema para: "*Investigar a influência da massa de uma paraquedista na velocidade de queda, durante a queda-livre. Qual seria a diferença entre as velocidades de dois indivíduos com massas de respectivamente 64 kg e 85 kg, após 5 segundos de um salto de paraquedas, considerando que ainda estão em queda-livre? Qual a velocidade terminal 1 de ambos?*" (C2_RE_MM_1_GM4). Uma síntese da resolução desse grupo pode ser visualizada no Quadro 32.

Esses estudantes buscaram investigar a influência da massa no comportamento da velocidade terminal 1, velocidade limite atingida em queda-livre, quando as forças de resistência do ar e atração da gravidade se igualam. Para tanto, formularam hipóteses e simplificações a partir da análise das forças que agem sobre o paraquedista em queda-livre na componente vertical.

Utilizando a segunda lei de Newton e supondo que a força de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade, o seguinte problema de valor inicial (PVI) foi formulado:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{d}{m}.v^2 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

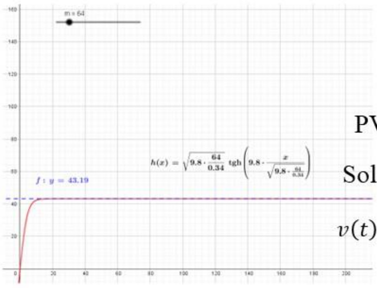
Em que $v(t)$ é a velocidade do paraquedista em queda-livre no instante t, d é a constante de resistência do ar, g a aceleração da gravidade e m é a massa do paraquedista.

Quadro 32 - Síntese da resolução do grupo GM4 na atividade salto de paraquedas no contexto 2

SALTO DE PARAQUEDAS – GM4

PROBLEMA:

Investigar a influência da massa de uma paraquedista na velocidade de queda, durante a queda-livre. Qual seria a diferença entre as velocidades de dois indivíduos com massas de respectivamente 64 kg e 85 kg, após 5 segundos de um salto de paraquedas, considerando que ainda estão em queda-livre? Qual a velocidade terminal 1 de ambos?



MATEMATIZAÇÃO

Hipóteses

- A força resultante que age sobre o paraquedista em queda-livre é descrita pela 2ª Lei de Newton.

Variáveis:

- $v(t)$: velocidade do paraquedista em queda-livre em função do tempo (em metros por segundo)
- t: tempo (em segundos)
- m: massa do paraquedista (em kg)

MODELO MATEMÁTICO

PVI: $mg - bv^2 = m.\frac{dv}{dt}$; $v(0) = 0$

Solução:

$$v(t) = v_t.tanh\left(\frac{g}{v_t}.t\right) \text{ ou } v(t) = v_t.\left(\frac{e^{\frac{2gt}{v_t}} - 1}{e^{\frac{2gt}{v_t}} + 1}\right)$$

$$v_t = \sqrt{\frac{m.g}{b}}$$

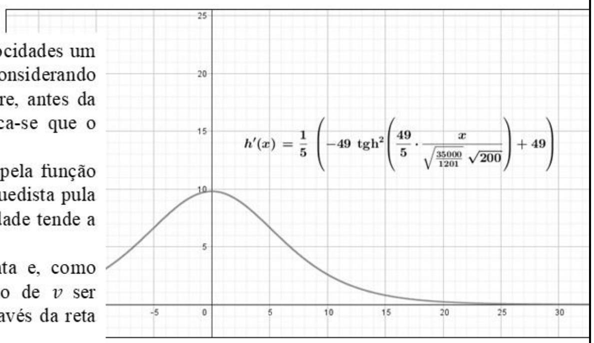
Simplificações

- As forças que agem sobre o paraquedista em queda-livre são apenas a Força Gravitacional e a Força de Resistência do Ar.
- Desconsideraremos que o corpo sofre um deslocamento de ar chamado de *vento relativo,* no início da queda-livre, levando em consideração apenas o deslocamento vertical do indivíduo.
- Consideraremos que todos os paraquedistas, durante a queda-livre, utilizam a mesma posição corporal (*box position)* e possuem a mesma área da superfície corporal, não interferindo, assim, na velocidade.
- O coeficiente de arrasto C_d de um paraquedista varia de 1.0 a 1.4. Para o paraquedista na *box position*, o produto $C_d.A$ é de, aproximadamente, 0,56 m^2 (A é a área da superfície).
- Consideraremos a densidade do ar ao nível do mar de 1,201 kg/m^3, que é o valor considerado no SI para o ar padrão.

RESPOSTA PARA OS PROBLEMA

Verificamos que a massa do indivíduo influencia em sua velocidade de queda-livre, ao saltar de paraquedas. Quanto maior for a massa do sujeito, maior será sua velocidade. Para um indivíduo de 64 kg, sua velocidade após 5 segundos de queda é de 35,09 m/s e, para um indivíduo de 85 kg sua velocidade, nesse mesmo intervalo de tempo, será de 37,58 m/s. A diferença entre as velocidades de ambos é de, aproximadamente, 2,19 m/s. Suas velocidades terminais são, respectivamente 43,19 m/s e 49,77 m/s.

Gráfico da derivada da velocidade



INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS E VALIDAÇÃO

Verificamos que as velocidades terminais dos indivíduos, isto é, suas velocidades um pouco antes de abrir o paraquedas foram de 43,19 m/s e 49,77 m/s. 120. Considerando que os sites costumam apresentar que a velocidade, durante a queda-livre, antes da abertura do paraquedas chega a variar entre 55,55 e 66,66 m/s, verifica-se que o modelo se mostra relativamente adequado

Analisando o gráfico do modelo obtido verifica-se que a curva descrita pela função está teoricamente coerente, já que, inicialmente no momento que o paraquedista pula do avião, como a força peso é a única força agindo sobre ele, sua velocidade tende a aumentar e o movimento é acelerado.

Conforme sua velocidade aumenta, a resistência do ar também aumenta e, como resultado, temos uma aceleração decrescente. Assim, apesar do gráfico de v ser crescente, a taxa com que ele cresce diminui. Podemos perceber isso através da reta tangente ao gráfico da velocidade.

Fonte: C2_RE_MM_1_GM4.

A construção do modelo matemático prosseguiu com a resolução do PVI utilizando o método de Equações Diferenciais Ordinárias Separáveis. Diferente do grupo GM2, os estudantes do grupo GM4 consideraram duas possíveis resoluções para a integral associada a variável v, uma utilizando frações parciais e outra com a integração da função cujo resultado é um arco tangente hiperbólico. Esses procedimentos levaram a duas formas simbólicas diferentes de escrever a solução do PVI. Conforme o Quadro 33.

Quadro 33 - Resolução do PVI dos estudantes do grupo GM4 na atividade salto de paraquedas no contexto 2

Temos $mg - bv^2 = \frac{mdv}{dt}$

Dividindo ambos os membros por m:

$$g(1 - \frac{b}{mg})v^2 = \frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

A velocidade terminal v_t do indivíduo ocorre quando $F_g = F_{rar}$:

$$mg = b.v_t^2$$
$$v_t^2 = \frac{mg}{b}$$

Podemos reescrever (1) da forma:

$$g(1 - \frac{v^2}{v_t^2}) = \frac{dv}{dt}$$

Obtemos então uma EDO cuja solução pode ser obtida pelo método de separação de variáveis:

$$gdt = \frac{dv}{(1 - \frac{v^2}{v_t^2})}$$

Integrando ambos os membros:

$$\int gdt = \int \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2\right)} dv$$

A integral pode ser resolvida pelo método da substituição. Fazendo $u = \frac{v}{v_t}$; $du = \frac{1}{v_t}dv$:

$$\int gdt = v_t \int \frac{1}{(1 - u^2)} du$$

Resolução 1

$$\int gdt = v_t \int \frac{1}{(1 - u^2)} du$$

Façamos $u = \tanh(\theta)$; $du = \text{sech}^2(\theta)d\theta$

$$\int gdt = v_t \int \frac{\text{sech}^2(\theta)}{(1 - \tanh^2(\theta))} d\theta$$

Sabemos que $1 - \tanh^2(\theta) = \text{sech}^2(\theta)$, assim temos:

$$\int gdt = v_t \int \frac{\text{sech}^2(\theta)}{\text{sech}^2(\theta)} d\theta$$

$$\int gdt = v_t \int d\theta$$

$$gt = v_t.\theta + c$$

Como $u = \tanh(\theta)$, então $\theta = \text{arc}\tanh(u)$, portanto, podemos escrever:

$$gt = v_t.\text{arc}\tanh(u) + c$$
$$gt = v_t.\text{arc}\tanh(\frac{v}{v_t}) + c$$

Assumindo $v(0) = 0$ teremos $c = 0$. Assim, podemos simplificar a expressão dada.

$$\frac{g}{v_t}.t = \text{arc}\tanh(\frac{v}{v_t})$$

Logo,

$$v(t) = v_t.tanh\left(\frac{g}{v_t}.t\right)$$

Fonte: C2_RE_MM_1_GM4.

Para responder o problema, os alunos utilizaram o segundo modelo matemático $v(t) = v_t.tanh\,(\frac{g}{v_t}.t)$, calcularam a velocidade para dois indivíduos, um com 64 kg e outro 85 kg, após 5 segundos do salto da aeronave e, por fim, calcularam a velocidade terminal para ambos. Com o objetivo de identificar a influência da massa do paraquedista no comportamento da velocidade, eles inseriram a função velocidade no GeoGebra e criaram um controle deslizante para m que expressa a massa do paraquedista em kg.

Com isso, a conclusão é de que conforme a massa aumenta, o gráfico da velocidade no decorrer do tempo se "desloca" verticalmente "para cima" no eixo das ordenadas. Ou seja, quanto maior a massa, maior a velocidade terminal que o paraquedista atinge em queda-livre (Quadro 34).

Quadro 34 - Análise da influência da massa na velocidade terminal conforme resolução do grupo GM4 na atividade Salto de Paraquedas no contexto 2

Após 5 segundos, a velocidade do paraquedista de

- massa igual 64 kg é:

$$v(t) = \sqrt{\frac{64.9,8}{0,33628}}.tanh\left(\frac{g}{\sqrt{\frac{64.9,8}{0,33628}}}.t\right) \cong 35,09\ m/s$$

- massa igual 85 kg

$$v(t) = \sqrt{\frac{64.9,8}{0,33628}}.tanh\left(\frac{g}{\sqrt{\frac{64.9,8}{0,33628}}}.t\right) \cong 37,58\ m/s$$

Calculando a velocidade terminal 1 de ambos:

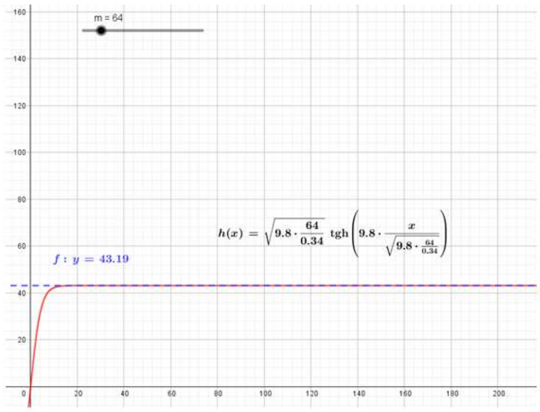
$$v_t = \sqrt{\frac{m.g}{b}}$$

Para o individuo de 64 kg, a velocidade terminal v_t, será de:

$$v_t = \sqrt{\frac{64.9,8}{0,33628}} = 43,19\ m/s$$

Para o indivíduo de 85 kg, a velocidade terminal v_t, será de

$$v_t = \sqrt{\frac{85.9,8}{0,33628}} = 49,77\ m/s$$



Criando o controle deslizante no Geogebra para a massa m, podemos compreender melhor o comportamento da função velocidade ao aumentarmos a massa do paraquedista.
Veja que o gráfico da função se "desloca" cada vez mais verticalmente para cima. Assim, podemos verificar que a velocidade aumenta cada vez mais com o aumento da massa. Observe também que a velocidade terminal para um indivíduo com $55 < m < 120$ se encontra entre 40 e 60 m/s, aproximadamente.

Fonte: C2_RE_MM_1_GM4.

Na validação do modelo matemático os alunos argumentaram que as velocidades terminais dos indivíduos com massa entre 55 kg e 120 kg varia de 40 a 60 m/s, de acordo com o modelo matemático obtido. Esses valores, segundo eles, estão de acordo com sites que informam que a velocidade em queda-livre antes da abertura do paraquedas varia entre 55,55 e 66,66 m/s. Além disso, encontraram uma informação em uma apostila sobre paraquedismo de que a velocidade após 5 segundos em queda-livre é de 150 km/h, aproximadamente 41,6 m/s. Os alunos consideraram que os resultados do modelo matemático para 5 segundos após o salto são próximos desse valor.

Na interpretação dos resultados, os alunos observaram que o comportamento da velocidade do paraquedista em queda-livre tende a uma velocidade limite, pois na medida em que a velocidade do ar aumenta, a força de resistência do ar também aumenta e, com isso, a aceleração decresce. Em outras palavras, a taxa com que a velocidade cresce diminui do decorrer do tempo. Para justificar essa asserção, traçaram o gráfico da derivada da velocidade em relação ao tempo e observaram que esse gráfico é decrescente, enquanto o gráfico da velocidade é crescente, conforme o Quadro 35.

Quadro 35 - Interpretação dos resultados do grupo GM4 na atividade salto de paraquedas no contexto 2

Verificamos que as velocidades terminais dos indivíduos, isto é, suas velocidades um pouco antes de abrir o paraquedas foram de 43,19 m/s e 49,77 m/s. Observando os gráficos apresentados da velocidade para diferentes valores de m, é possível perceber que a velocidade terminal (dada pela linha tracejada em azul) varia de 40 a 60 m/s, se considerarmos indivíduos com $55<m<120$. Considerando que os sites costumam apresentar que a velocidade, durante a queda-livre, antes da abertura do paraquedas chega a variar entre 55,55 e 66,66 m/s, verifica-se que o modelo se mostra relativamente adequado.

Pesquisando em manuais de paraquedismo encontramos o seguinte resultado para a velocidade de um indivíduo após 5 segundos de queda.

Veja que, após 5 segundos, a velocidade (vertical) é de 150 km/h, o que equivale a aproximadamente 41,6 m/s. Na apostila não foi destacado a massa deste indivíduo, mas se supormos, por exemplo, que sua massa seja de cerca de 136 kg, o resultado se aproxima (41,03 m/s).

Analisando o gráfico do modelo obtido verifica-se que a curva descrita pela função está teoricamente coerente, já que, inicialmente no momento que o paraquedista pula do avião, como a força peso é a única força agindo sobre ele, sua velocidade tende a aumentar e o movimento é acelerado.

Conforme sua velocidade aumenta, a resistência do ar também aumenta e, como resultado, temos uma aceleração decrescente. Assim, apesar do gráfico de v ser crescente, a taxa com que ele cresce diminui. Podemos perceber isso através da reta tangente ao gráfico da velocidade.

Reta tangente ao gráfico da velocidade

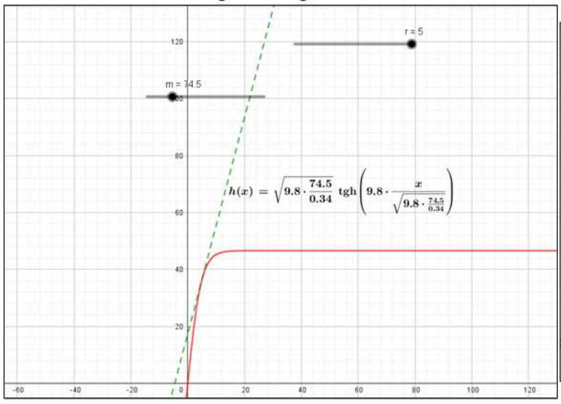
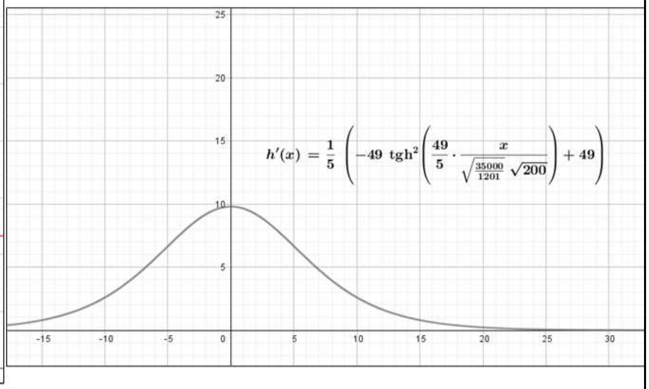


Gráfico da derivada da velocidade



Fonte: C2_RE_MM_1_GM4.

No desenvolvimento da atividade Salto de Paraquedas, os problemas formulados pelos estudantes do grupo GM2 se dirigiu para o estudo do instante que o paraquedista deve abrir o paraquedas para pousar com segurança. Já no grupo GM4 o foco se deu no estudo da velocidade do paraquedista em queda-livre, considerando diferentes massas. A partir desses problemas, ambos os grupos construíram uma função para a velocidade do paraquedista no decorrer do tempo, com a diferença de que no grupo GM2 esse modelo matemático levou em consideração as duas etapas do salto e no grupo GM4 apenas a primeira etapa foi estudada. Em relação à interpretação dos resultados e validação, ambos usaram o *software* GeoGebra para analisar o comportamento do fenômeno a partir do modelo matemático construído e as informações sobre o fenômeno foram consideradas para validar o modelo.

4.2.2.2 Identificação de jogos de linguagem que constituem a aprendizagem na atividade Salto de Paraquedas

No desenvolvimento da atividade Salto de Paraquedas, os estudantes fazem uso de ações que estão de acordo com as fases de uma atividade de modelagem matemática descritas na literatura (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Niss; Blum, 2020). Optou-se no decorrer da descrição por classificar essas fases como: *inteiração com a situação-problema*, *construção do modelo matemático* e *análise do modelo matemático*.

Em cada fase identifica-se diferentes jogos de linguagem associados à aprendizagem, tendo como embasamento os usos que os estudantes fazem da linguagem. Na *inteiração com a situação-problema*, o professor-pesquisador forneceu aos estudantes as informações acerca da situação e o problema foi formulado pelos estudantes, o que resultou na identificação dos jogos de linguagem: compreensão da situação da realidade e formulação de um problema.

A *compreensão da situação da realidade* é um jogo de linguagem que permeou todo o desenvolvimento da atividade, uma vez que os estudantes dos dois grupos recorreram repetidas vezes a esse jogo de linguagem para formular um problema, construir e analisar o modelo matemático.

Compreender a situação da realidade é um jogo de linguagem que se fez necessário sempre que os estudantes sentiram a necessidade de compreender uma informação específica do enunciado ou as características do comportamento do fenômeno. No grupo GM2, por exemplo, eles acionaram esse jogo para compreender a força de arrasto, as etapas do salto de paraquedas, o modo como a velocidade se comporta durante o salto, dentre outros aspectos, conforme mostra o diálogo a seguir:

> E7: Ou algo assim, a partir do momento que ele abre o paraquedas, ele chega no solo. ... É que tem dois momentos né, em queda-livre e depois que abre o paraquedas. A gente pode dividir o problema em dois e estudar só um deles, por exemplo, depois que ele abre o paraquedas quanto tempo ele tem para pousar ($C_2\_V\_MM_1\_GM2$)
>
> E7: Eu estava vendo aqui, ele dá algumas informações em relação ao tempo né. Em 12 segundos ele atinge a velocidade limite e em 1 minuto ele abre o paraquedas para chegar no solo a uma velocidade de 20 km/h.
> E7: Acho que a gente pode pegar, por exemplo o tempo que ele dá para abrir o paraquedas e outros tempos né, porque veja se ele abrir antes de 1 minuto não tem problema, mas se ele abrir depois pode ser que seja tarde demais, aí ele não consegue desacelerar o suficiente para chegar a 20 km/h.
> E8: Acho que a gente tem que considerar vários casos né, porque tem o caso que ele sai de 200 km/h a 240 km/h,
> E7: Mas quando ele está com 240, olha que interessante... ele atinge a velocidade entre 200 e 240 em direção ao solo, depois de 12 segundos em queda-livre, e ele abre o paraquedas... Então a gente não sabe a velocidade né, porque ele atinge essa velocidade entre 12 segundos e 50 segundos né, então tecnicamente ele ainda está acelerando até 12 segundos. Ele só vai desacelerar depois que abrir o paraquedas.
> E7: Ele saiu do avião, a força da gravidade é maior que a força de resistência, ai com o passar do tempo a força de resistência do ar se iguala a força da gravidade, que é quando ele abre o paraquedas, ai que ele desacelera. Mas eu não posso considerar 240 porque tecnicamente ele ainda está acelerando.
> E8: Ele vai acelerar da velocidade inicial até 240.

> E7: É, mas não tenho a certeza de que ele vai abrir o paraquedas a 240 km/h
> E8: aí vai ser uma hipótese.
> E7: é aqui ele tá dizendo que vai abrir o paraquedas a 240 km/h. Mas, então, eu quero saber a aceleração a partir do momento que ele abre o paraquedas, porque é essa desaceleração que vamos precisar para saber o tempo que cai ($C_2\_D\_MM_1\_GM2$).

Os estudantes do grupo GM4 evidenciaram a compreensão da situação-problema principalmente na matematização, na qual destacaram as informações necessárias para construir o modelo matemático, como a segunda lei de Newton, a expressão matemática para calcular a força de arrasto do ar e a *box position* que indica a posição do paraquedista com menos influência do vento relativo.

> E16: A gente vai considerar que os paraquedistas estão na box position, porque também muda né, se o paraquedista está numa posição diferente, ele vai cair numa velocidade diferente.
> PP: Sim, tem até outras posições propicias para manobras. [...]
> E20: Mas informação a gente só explicou a segunda lei de newton e a força de arrasto do ar.
> E16: E tem nessa parte da força de resistência do ar, a área da superfície né... aí você tinha colocado lá nos slides que na queda-livre, geralmente o coeficiente de resistência do ar vezes essa área já é um valor. Aí nós o usamos... A densidade do ar também a gente considerou a do ar padrão, como foi informado ($C_2\_D\_MM_1\_GM2$).

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem se mostra no uso de conhecimentos e informações acerca da situação-problema, adquiridos a partir do enunciado apresentado pelo professor-pesquisador, pesquisas em artigos e sites disponíveis na internet, de experiências anteriores dos estudantes e no modo como explicam o comportamento das forças que agem sobre o paraquedista durante o salto.

Na *formulação de um problema*, ambos os grupos mudaram pelo menos uma vez a questão formulada que poderia vir a ser um problema da atividade. Os estudantes do grupo GM2 consideraram investigar em um primeiro momento a influência da massa na velocidade do paraquedista, mas desistiram de estudar esse problema, pois o consideraram difícil de ser estudado. Essa desistência pode estar relacionada a crença de autoeficácia (Elfringhoff; Schukajlow, 2021) no desenvolvimento da atividade, ou seja, os estudantes mostram não acreditar que são capazes de obter sucesso com a resolução desse problema, como evidencia a fala de E10:

> E10: E se a gente elaborar uma resposta bem simples e elaborasse um problema para responder com base nessa resposta. Ai a gente ia ter certeza de que íamos saber fazer ($C_2\_V\_MM_1\_GM2$).

Os estudantes do grupo GM4 formularam inicialmente um problema relativo à área da superfície do velame e sua implicação na força de arrasto. Contudo, desistiram desse problema, pois consideraram que não há informações no enunciado e em pesquisas externas que pudessem ser usadas para resolvê-lo.

> PP: Eai pessoal, pensaram em algum problema?
> E17: Então, pensei em algo relacionado ao tamanho do que eles chamam de velame do paraquedas, mas nada concreto.
> PP: Para esse problema, já existe modelos matemáticos que relacionam a força de arrasto com a área de superfície do velame. Mas acho que para investigar isso vocês teriam que ter mais informações, para além do que foi dado no enunciado né.
> E17: É, então, porque ele fala sobre a superfície do corpo né.
> PP: Acho que pode dar certo, mas vocês vão ter que correr atrás de mais informações. O tamanho do velame influencia e outra coisa que influencia também é o formato né, se você tem um velame que não seja retangular, que seja oval, isso vai mudar também ($C_2\_W\_MM_1\_GM4$). [...]
> E16: Boa tarde PP, tudo bem? [...] Eu e minha equipe estávamos pensando na atividade do paraquedas. Estávamos pensando em um problema e assim, todo problema que a gente pensava, a gente pesquisava e não conseguia obter dados, informações, pois parecia muito difícil sabe ($C_2\_W\_MM_1\_GM4$).

Após desistirem de estudar a influência da massa no comportamento da velocidade, o grupo GM2 formulou o problema investigado na atividade, que versa sobre a velocidade de pouso do paraquedista considerando diferentes instantes de abertura do paraquedas. O interesse dos estudantes foi determinar qual instante considerado adequado para que o pouso ocorra em uma velocidade adequada, de modo a evitar acidentes.

> PP: Vocês querem olhar para o comportamento da velocidade...
> E8: de pouso daí seria [complementando a frase do PP] [...]
> PP: Para paraquedistas de diferentes massas daí?
> E9: Não, não, mudamos de ideia.
> PP: Mas alguma massa vocês precisam considerar.
> E8: Sim, isso vamos considerar, mas a ideia é estudar o que acontece caso ele demore muito para abrir o paraquedas ou se ele abre muito rápido. Por exemplo, uma situação que ele chegue ao solo a 50 km/h, ai procuraríamos um acidente do que acontece caso ele pouse a essa velocidade.
> PP: Mas ai vocês vão ter que encontrar a velocidade de pouso né
> E7: ele dá aqui, que é 20 km/h.
> PP: Mas e se ele abrir o paraquedas muito cedo ele vai atingir essa velocidade de pouso?
> E7: Acho que não ($C_2\_V\_MM_1\_GM2$).

Já o grupo GM4 optou por investigar o comportamento da velocidade do paraquedista em queda-livre considerando dois paraquedistas com massas distintas. Percebe-se que o interesse dos estudantes com esse problema estava voltado para a finalidade de obter um modelo matemático, possível de ser construído a partir das informações que foram fornecidas no enunciado.

> E16: A ideia do nosso problema é investigar a influência da massa do paraquedista na velocidade de queda dele durante a queda-livre. Daí a gente pensou, vamos formular uma pergunta: qual seria a diferença entre as velocidades de dois indivíduos com massa, por exemplo, de 64 kilos e outros 85 kilos depois de 5 segundos? Meio que essa seria nossa ideia. Daí nosso objetivo seria achar uma função, nosso modelo, que seria a função que relacionasse a velocidade com o tempo, mas que também vai depender da massa, isso durante a queda-livre [arquivo de áudio] ($C_2\_W\_MM_1\_GM4$).

O jogo de linguagem formulação de um problema é constituído por fatores motivacionais que movem o interesse dos estudantes em investigar um determinado problema acerca de uma situação da realidade. O interesse dos estudantes nessa atividade se mostra dependente de aspectos relacionados às informações fornecidas no enunciado pelo professor-pesquisador, à crença de autoeficácia em resolver o problema e à aspectos específicos do fazer modelagem, como construir um modelo matemático.

Ao formular um problema, os estudantes direcionam o processo de investigação acerca da temática. Com isso, aprendem uma técnica fundamental do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, pois, segundo Pollak (2012, p. 11), "o coração da modelagem matemática [...] é a formulação de problemas antes da resolução destes".

Na *construção do modelo matemático*, identifica-se os jogos de linguagem: matematização, formulação de um problema matemático, resolução do problema matemático e expressão matemática do modelo matemático. Esses jogos estão alinhados com as ações que caracterizam o ato de construir modelos matemáticos para uma determinada situação-problema (Almeida, 2018; Niss; Blum, 2020; Stillman, Brown; Geiger, 2015; Jablonka; Gellert, 2007).

Na *matematização*, os estudantes precisam realizar uma roupagem matemática para a situação, formulando hipóteses, selecionando variáveis e realizando simplificações, de modo a tornar a situação da realidade passível de uma estruturação por meio de uma linguagem matemática. Nesse jogo de linguagem, os dois grupos recorreram a leis da Física, como a segunda lei de Newton, para estabelecer uma relação entre a soma das forças que agem sobre o paraquedista e a força resultante como produto da massa pela aceleração; selecionaram as variáveis necessárias para resolver o problema e consideraram os aspectos que são relevantes para a construção do modelo matemático. Em particular, os estudantes do grupo GM2 elaboraram três situações hipotéticas acerca do instante de abertura do paraquedas para organizar a investigação do problema:

> PP: Vamos pensar agora nas hipóteses, olhando para a análise das forças, o que vocês podem considerar? como eu cálculo, por exemplo, a força resultante que age no paraquedista? [...]
> E7: No primeiro momento, a força da gravidade é maior que a resistência do ar e depois que se iguala né. No segundo momento, vai ser igual né. Então seria algo nesse sentido a força resultante é igual a soma da força da gravidade e da força da resistência do ar ($F_R = F_G + F_{rar}$)
> PP: só que a força de resistência do ar fica negativa, porque é oposta a da gravidade.
> E7: Assim: $F_R = F_G - F_{rar}$.
> [....]
> E20: A hipótese é que a força resultante que age sobre o paraquedista é descrita pela segunda lei de newton. Aí a gente desconsiderou muitas coisas, que só age a força de resistência do ar e a gravidade, não considera a força relativa do vento, entre outras coisas.
> E16: E também a gente vai considerar que os paraquedistas estão na box position,

> porque também muda né, se o paraquedista está numa posição diferente, ele vai cair numa velocidade diferente.
> PP: Sim, te até outras posições propicias para manobras.
> E20: Ai nas informação a gente só explicou a segunda lei de newton, a força de arrasto do ar.
> E16: E tem nessa parte da força de resistência do ar, a área da superfície né... aí você tinha colocado lá nos slides que na queda-livre, geralmente o coeficiente de resistência do ar vezes essa área já é um valor. Aí nós o usamos. ... A densidade do ar também a gente considerou a dor ar padrão.
> PP: Aham, é isso. Tem que fazer essas simplificações né ($C_2\_D\_MM_1\_GM2$).

Nesse jogo de linguagem, os estudantes usam conhecimentos e informações apresentadas sobre o fenômeno, que nesse caso se associa a conhecimentos da Física para analisar as forças que agem sobre o paraquedista e calcular a força resultante, com a finalidade de realizar uma estruturação matemática da situação da realidade. Ao fazer isso, a aprendizagem nesse jogo de linguagem sinaliza uma interlocução entre conhecimentos matemáticos e de conhecimentos acerca da situação modelada.

Como resultado da matematização, os estudantes *formularam um problema matemático*, esse problema pode ser escrito considerando diferentes linguagens matemáticas. No caso dessa atividade, o problema matemático dos dois grupos consistiu em resolver uma EDO de 1ª ordem e autônoma, de modo a obter uma função que relaciona a velocidade do paraquedista e o tempo, considerando determinadas condições iniciais (Quadro 36).

Quadro 36 - Formulação de um problema matemático na atividade Salto de Paraquedas no contexto 2

<table>
<tr>
<td>
$F_R = m \cdot g - \frac{1}{2} \rho \cdot Cd \cdot K \cdot v^2$
$F_R = m \cdot a$
$m \cdot a = m \cdot g - K \cdot v^2$
$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - K \cdot v^2$
EDO autonôma separável
$\frac{dv}{dt} = \frac{m \cdot g - Kv^2}{m}$
$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m} \cdot v^2 \quad \Big\} \begin{array}{l} l(v) \\ g, K, m \in \mathbb{R} \end{array}$
</td>
<td>
E7: Assim: $F_R = F_G - F_{rar}$.
PP: Isso. Esse é uma maneira de escrever a força resultante, qual é uma segunda maneira?
E8: Abrir a força como massa vezes aceleração.
PP: Isso. Uma segunda maneira é escrever dessa maneira, que é a segunda lei de newton né.
E8: Uhum.
PP: Essas duas expressões são o que?
E7: iguais.
PP: Então você sabe como calcular Fg né e sabe como calcular como F_{rar}, então o que é o a ai?
E7: a gente tem ali, é derivada da velocidade em relação ao tempo.
E9: Então essa é nossa EDO.
E7: Acho que sim né, porque a massa nós vamos supor, a gente não tem a velocidade e nem o tempo, mas a velocidade é o que a gente quer descobrir né.
</td>
</tr>
</table>

Fonte: $C_2\_D\_MM_1\_GM2$ e $C_2\_R\_MM_1\_GM2$.

Esse jogo de linguagem, formular um problema matemático, pode ser entendido como um jogo de linguagem de *tradução*, do problema escrito em uma linguagem natural para o problema escrito em uma linguagem matemática, na qual os estudantes passam a operar em um domínio matemático. A aprendizagem associada nesse jogo se mostra principalmente no uso de regras matemáticas para formular um problema matemático, a partir de relações matemáticas estabelecidas, considerando as variáveis, hipóteses e simplificações.

A *resolução do problema matemático* é um jogo de linguagem matemático e envolveu o uso de técnicas de resolução de uma EDO e, consequentemente, técnicas de integração. Os estudantes utilizaram o método de resolução de EDOs de primeira ordem com variáveis esperáveis e ao integrarem a expressão matemática que envolve a diferencial da variável dependente v, os estudantes do grupo GM2 utilizaram frações parciais. Já no grupo GM4, em um primeiro momento, os estudantes resolveram a integral por meio da tabela de integral, chegando a uma função trigonométrica hiperbólica e, posteriormente, com a solicitação do professor-pesquisador, também utilizaram frações parciais.

Ao apresentarem a resolução da integral utilizando a tabela de integração, o professor-pesquisador sugeriu aos estudantes que eles resolvessem utilizando frações parciais para depois comparar os resultados. Essa sugestão foi realizada considerando que eles não empregaram um método para resolver a integral, apenas tinham pesquisado na internet o resultado.

> PP: Como você chegou na tangente hiperbólica?
> PP: Tabela de integral?
> E16: Quando vi isso primeiro pensei [estudante indica nos registros escritos a integral $\int \frac{1}{1-u^2} du$] que era a arc tangente, mas é com mais né? Então pesquisei na internet e vi que tinha essa arc tangente hiperbólica [...]. Pesquisei na internet qual era derivada.
> E16: Pensei em tentar resolver por substituição trigonométrica [...]. Mas parecia difícil.
> E16: Daria para fazer por parciais também.
> PP: Sim. Penso que você encontrou uma solução interessante. O que eu sugiro é que você mantenha o que você fez, NÃO APAGUE!!!!, e tente resolver por frações parciais.
> PP: Por frações parciais vai dar um modelo diferente do que encontrou.
> PP: Mas aí a partir disso, você compara os dois modelos e verifica se o seu modelo pode ser considerado adequado ($C_2\_W\_MM_1\_GM4$).
> PP: Para chegar na tangente hiperbólica é bem simples. Você só usa uma substituição trigonométrica. Acho que pode deixar e aí você mostra a relação entre as duas [professor explica a resolução da integral por meio de substituição trigonométrica] ($C_2\_D\_MM_1\_GM4$).

Apresenta-se as duas resoluções no Quadro 37, com a ressalva de que a resolução por substituição trigonométrica dos estudantes do grupo GM4 foi feita a partir de uma intervenção do professor-pesquisador que mostrou aos alunos como prosseguir. No caso do grupo GM2, o professor-pesquisador também realizou uma intervenção para mostrar como resolver a integral $\int \frac{1}{1-u^2} du$ por frações parciais.

Quadro 37 - Resolução do problema, usando dois métodos de integração diferentes na atividade Salto de Paraquedas no contexto 2

Utilizando frações parciais

EDO autonôma separável

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2 \quad \} \begin{matrix} 1(v) \\ g, K, m \in \mathbb{R} \end{matrix}$

$\frac{dv}{\left(1 - \frac{K}{mg} \cdot v^2\right)} = g\, dt$

Para a substituição: $\left(\int \frac{1}{1-u^2} du\right)$

$w^2 = \frac{k}{mg}$

Seja $u = w \cdot v \Rightarrow du = w \cdot dv$

Integrando:

$\frac{1}{w} \int \frac{du}{1-u^2} = g \int dt$ (*), por frações parciais:

$\frac{1}{2w} \int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du = g \int dt$

$\frac{1}{2w} \cdot \left[\ln(1+u) - \ln(1-u)\right] + c_1 = g \cdot t + c_2$

$v(t) = \frac{1}{w} \cdot \left(\frac{c \cdot e^{2wgt} - 1}{c \cdot e^{2wgt} + 1}\right)$

Utilizando substituição trigonométrica

$$\int g dt = v_t \int \frac{1}{(1-u^2)} du$$

Façamos $u = \tanh(\theta)$; $du = \text{sech}^2(\theta) d\theta$

$$\int g dt = v_t \int \frac{\text{sech}^2(\theta)}{(1-\tanh^2(\theta))} d\theta$$

Sabemos que $1 - \tanh^2(\theta) = \text{sech}^2(\theta)$, assim temos:

$$\int g dt = v_t \int \frac{\text{sech}^2(\theta)}{\text{sech}^2(\theta)} d\theta$$

$$\int g dt = v_t \int d\theta$$

$$gt = v_t . \theta + c$$

Como $u = \tanh(\theta)$, então $\theta = \text{arc}\tanh(u)$, portanto, podemos escrever:

$$gt = v_t . \text{arc}\tanh(u) + c$$

$$gt = v_t . \text{arc}\tanh\left(\frac{v}{v_t}\right) + c$$

Assumindo $v(0) = 0$ teremos $c = 0$. Assim, podemos simplificar a expressão dada.

$$\frac{g}{v_t} . t = \text{arc}\tanh\left(\frac{v}{v_t}\right)$$

Logo,

$$v(t) = v_t . tanh\left(\frac{g}{v_t} . t\right)$$

Fonte: $C_2\_R\_MM_1\_GM2$ e $C_2\_R\_MM_1\_GM4$.

O jogo de linguagem, resolução de um problema matemático, é um jogo de linguagem pertencente a um domínio matemático, que nesse caso consiste no uso de regras matemáticas para resolução de uma EDO e de regras para calcular uma integral determinada. A aprendizagem nesse jogo de linguagem está associada ao uso de regras e conhecimentos específicos de um domínio matemático e pode requerer a intervenção do professor para mostrar como essas regras podem ser usadas na construção de um modelo matemático.

No jogo de linguagem *expressão matemática do modelo matemático*, os estudantes precisam expressar o modelo matemático, utilizando alguma estrutura matemática, sob a forma de gráficos, tabelas, equações, funções, figuras, entres outros modos linguísticos. Os estudantes do grupo GM2 optaram por expressar o modelo matemático na forma de um gráfico da função da velocidade em relação ao tempo, construído no GeoGebra, com a finalidade de plotar pontos na curva que pudesse fornecer informações acerca da velocidade de pouso do paraquedista para diferentes instantes de abertura do paraquedas (Quadro 30). Os estudantes do grupo GM4 escolheram a função tangente hiperbólica obtida na resolução do problema matemático para expressar o modelo matemático e recorreram a forma gráfica desse modelo, com o auxílio do *software* GeoGebra, para obter a velocidade do paraquedista em queda-livre após cinco segundos do salto e a velocidade terminal nessa etapa.

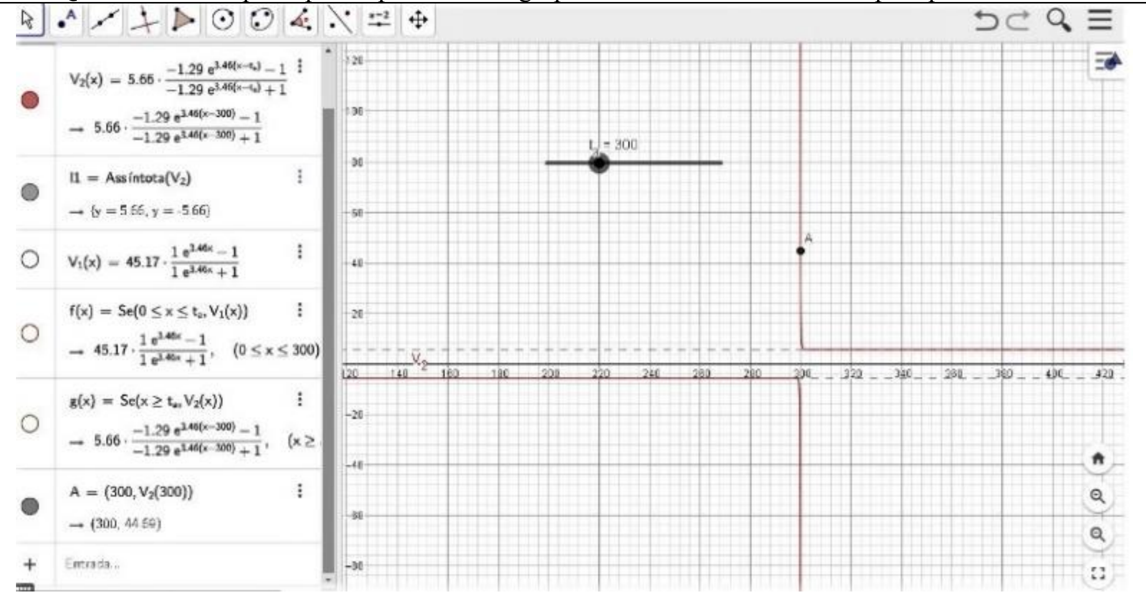
Entende-se que esse jogo de linguagem envolve o conhecimento de diferentes modos de expressar matematicamente um modelo matemático e uma tomada de decisão em relação a qual modo é o mais adequado para responder o problema. A aprendizagem nesse jogo de linguagem está relacionada a aquisição de técnicas de modos de expressar linguisticamente um modelo matemático e considera a capacidade dos estudantes de decidir qual modo de expressão é o mais adequado para responder o problema formulado na atividade de modelagem matemática.

Na *análise do modelo matemático*, identifica-se os jogos de linguagem: resposta para o problema na linguagem da situação-problema, interpretação dos resultados em relação ao fenômeno e validação do modelo matemático. Esses jogos estão vinculados as ações requeridas do estudante para estabelecer uma relação de volta do domínio matemático para o domínio da situação da realidade (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Niss; Blum, 2020) e de ações importantes para a análise de modelos matemáticos (Javaroni; Soares, 2012; Soares, 2012, 2015; Soares; Borba, 2011).

No jogo de linguagem *resposta para o problema na linguagem da situação-problema* os estudantes precisam fornecer uma resposta para o problema formulado a partir da situação da realidade na linguagem específica dessa situação. Há, por assim dizer, uma tradução das respostas matemáticas obtidas com a construção do modelo matemático para respostas na linguagem na situação da realidade.

Os estudantes do grupo GM2, observaram a partir do gráfico construído no GeoGebra da função da velocidade do paraquedista para diferentes valores para o instante de abertura de paraquedas, que a velocidade de pouso se modifica, uma vez que se o paraquedista abrir o paraquedas antes de atingir a velocidade terminal, ele não irá pousar na velocidade adequada para o pouso, conforme ilustra a resposta dos estudantes para o caso em que o paraquedista abre o paraquedas cinco minutos após o salto do avião (Quadro 38).

Quadro 38 - Resposta para o problema do grupo GM2 na atividade salto de paraquedas no contexto 2



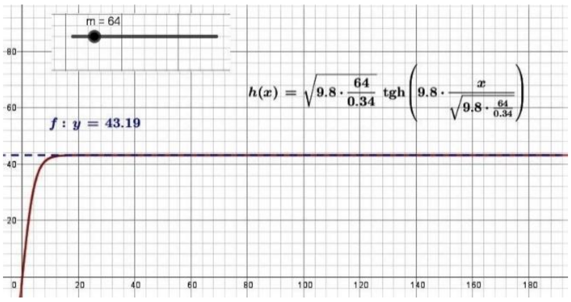
GM2: Temos uma situação semelhante à anterior, mas veja que o paraquedista abriu o paraquedas em 300 segundos, ou seja, 5 minutos após o salto do avião. Entretanto, observe que o ponto A representa a velocidade nesse tempo. Logo, é fácil notar que, mesmo a velocidade de pouso tendendo a 5,66 m/s o tempo entre a abertura do paraquedas e o pouso não é suficiente para desacelerar para uma velocidade segura de pouso, uma vez que a velocidade de pouso nesse caso é de 44,69 m/s.

Fonte: $C_2\_R\_MM_1\_GM2$.

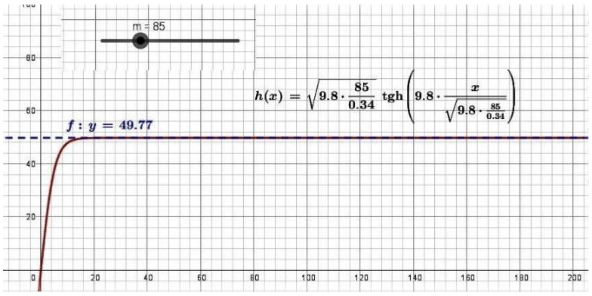
Os estudantes do grupo GM4 recorreram a forma gráfica de expressar o modelo matemático, construída no GeoGebra, para determinar a velocidade terminal do paraquedista em queda-livre, considerando diferentes valores para massa. Para isso criaram um controle deslizante do parâmetro m (massa) e traçaram a assíntota da curva, com a finalidade de observar o valor dessa assíntota para diferentes valores atribuídos ao parâmetro m. Como resposta para o problema, concluíram que conforme a massa aumenta, a velocidade terminal do paraquedista em queda-livre também aumenta, conforme o Quadro 39.

Quadro 39 - Resposta para o problema do grupo GM4 na atividade salto de paraquedas no contexto 2

Para $m = 65\ kg, v_t = 49{,}77\ m/s$



Para $m = 85\ kg, v_t = 49{,}77\ m/s$



GM4: Veja que o gráfico da função se "desloca" cada vez mais verticalmente para cima. Assim, podemos verificar que a velocidade aumenta cada vez mais com o aumento da massa. Observe também que a velocidade terminal para um indivíduo com 55<m<120 se encontra entre 40 e 60 m/s, aproximadamente.

Fonte: $C_2\_R\_MM_1\_GM4$.

Nesse jogo de linguagem, os estudantes formulam uma resposta para o problema inicial, com base nos resultados matemáticos obtidos. Com isso, a aprendizagem nesse jogo está associada a aquisição de um modo de ver a situação da realidade, estruturado a partir da capacidade de traduzir os resultados matemáticos em resultados na linguagem específica da situação da realidade estudada.

No jogo de linguagem *interpretação dos resultados em relação ao fenômeno*, os estudantes analisam os resultados obtidos com o modelo matemático e se questionam se esses resultados fazem sentido em relação ao fenômeno e matematicamente, além de suas implicações no fenômeno. Os estudantes do grupo GM2 consideraram que uma possível implicação é que se o paraquedista não abrir o paraquedas no instante adequado informado, a velocidade de pouso não segura e que apesar da velocidade de pouso se modificar, a velocidade terminal 2 não se modificará para diferentes instantes de abertura do paraquedas, uma vez que essa velocidade é a velocidade limite que o paraquedista atinge com o paraquedas aberto.

> [...] Caso o paraquedista leve mais tempo para abrir o paraquedas
> menor o limite de tempo para ele desacelerar para essa velocidade, o que faz com que a velocidade de pouso não seja segura. [...]
> Percebemos que o C_1 nas três situações será 1 visto que sempre o paraquedista saltará de um instante t = 0 e $v_1 = 0$. E, mesmo ao ser alterada o t_a, o C_2 será o mesmo, -1.29. Dessa forma, a velocidade terminal do paraquedista nas três situações será o mesmo ($C_2\_R\_MM_1\_GM2$).

Os estudantes do grupo GM4 analisaram o gráfico da velocidade do paraquedista em queda-livre no decorrer do tempo e o gráfico da derivada dessa função para realizar interpretações dos resultados em relação ao fenômeno e fornecer argumentos coerentes para suas asserções. Dentre as interpretações indicadas, argumentaram que apesar da velocidade do paraquedista ser crescente, a taxa de crescimento é decrescente e que a massa influencia de forma relevante na velocidade que o paraquedista atinge no decorrer do salto.

A aprendizagem nesse jogo de linguagem está associada a aquisição de uma técnica de avaliação qualitativa do modelo matemático e de seus resultados, com foco nas propriedades estruturais desse modelo e suas implicações para o fenômeno modelado.

Na *validação do modelo matemático*, os estudantes questionam se o modelo pode ser considerado válido para a situação-problema estudada. Nessa atividade, nos dois grupos, eles compararam os resultados obtidos com as informações fornecidas ou com informações encontradas em outros materiais. Percebe-se no caso do grupo GM4, uma preocupação com a proximidade dos resultados com as informações presente em diversas falas dos estudantes durante o desenvolvimento da atividade.

> PP: E qual é a sua insatisfação?
> E16: A primeira era se o problema era adequado e o segundo era os resultados que está “relativamente” aproximado, mas tem bastante erro ainda.
> E16: Achei isso numa apostila, ela está indicando que após 5 segundos a velocidade seria 150km/h, o que seria 41,6 metros por segundo, e o nosso deu 30 e pouco.
> PP: Mas qual será a massa nessa apostila?
> E16: É então ai não especifica.
> PP: Talvez se vocês colocarem outros valores para a massa
> E16: Realmente pode mudar bastante ne
> PP: Podem chegar nessa velocidade ($C_2\_W\_MM_1\_GM4$).
> [...]
> E20: Então na validação do modelo. A gente usou a informação do slide de que a velocidade terminal é de aproximadamente 200 km/h a 240 km/h para validar o modelo.
> E16: entre aspas né, não sei se validou ou desvalidou, porque quando a gente calculou as velocidades terminais dos dois indivíduos, a primeira de um indivíduo de 64 kg deu 43,19 m/s e o outro deu 39,77 m/s e a gente pensou que não está muito perto né. Mas eu tracei os gráficos e ai a gente pensou se você analisar as velocidades terminais com a massa variando de 55 até 120, você que fica perto de 55 a 60 m/s, porque dá de 40 m/s a 60 m/s. Então eu pensei, será que peguei uma massa muito baixa, em relação à média da população brasileira.
> E20: É igual ao trabalho anterior, a gente não precisou encontrar o valor exato né, mas um valor aproximado ($C_2\_D\_MM_1\_GM4$).

Ao validar o modelo matemático, os estudantes precisam tomar uma decisão em relação a razoabilidade do modelo matemático, para tanto recorreram a critérios formulados a partir da articulação de informações da situação da realidade e os resultados obtidos. A proximidade dos resultados foi um desses critérios e evidencia que a aprendizagem nesse jogo de linguagem sinaliza para a aquisição de técnicas de validação de um modelo matemático e a formulação de critérios de validação para considerar um modelo matemático válido, a partir de argumentos coerentes do ponto de vista matemático e do ponto de vista do fenômeno.

Em síntese, nessa atividade, nove jogos de linguagem que constituem a aprendizagem foram identificados com base nas ações dos estudantes no desenvolvimento das fases: inteiração com a situação-problema, construção do modelo matemático e análise do modelo matemático, conforme o Quadro 40.

Quadro 40 - Jogos de linguagem associados à aprendizagem na atividade Salto de Paraquedas no contexto 2

Fases do desenvolvimento da atividade	**Jogos de linguagem**	**Sinalização de aprendizagem**
Inteiração com a situação-problema	Compreensão da situação da realidade	Uso de conhecimentos e informações acerca da situação-problema, adquiridos a partir do enunciado apresentado pelo professor-pesquisador, pesquisas em artigos e sites disponíveis na internet e de experiências anteriores dos estudantes.
	Formulação do problema	Aprendizagem de uma técnica fundamental do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática: formulação de problemas, antes da resolução destes.
Construção do modelo matemático	Matematização	Interlocução entre conhecimentos matemáticos e de conhecimentos acerca da situação modelada.
	Formulação de um	Uso de regras matemáticas para formular um problema

	problema matemático	matemático, a partir de relações matemáticas estabelecidas, considerando as variáveis, hipóteses e simplificações.
	Resolução do problema matemático	Uso de regras e conhecimentos específicos de um domínio matemático, que pode requerer a intervenção do professor para mostrar como essas regras podem ser usadas na construção de um modelo matemático.
	Expressão do modelo matemático	Aquisição de técnicas de modos de expressar linguisticamente um modelo matemático e a capacidade dos estudantes de decidir qual modo de expressão é o mais adequado para responder o problema formulado na atividade de modelagem matemática.
Análise do modelo matemático	Resposta para o problema na linguagem da situação-problema	Aquisição de um modo de ver a situação da realidade, estruturado a partir da capacidade de traduzir os resultados matemáticos em resultados na linguagem específica da situação da realidade estudada.
	Interpretação dos resultados em relação ao fenômeno	Aquisição de uma técnica de avaliação qualitativa do modelo matemático e de seus resultados, com foco nas propriedades estruturais desse modelo e suas implicações para o fenômeno modelado.
	validação do modelo matemático	Aquisição de técnicas de validação de um modelo matemático e a formulação de critérios de validação para considerar um modelo matemático válido, a partir de argumentos coerentes do ponto de vista matemático e do ponto de vista do fenômeno.

Fonte: os autores.

Na inteiração com a situação-problema, os jogos de linguagem envolvidos estão associados ao modo como os estudantes expressam conhecimento acerca dos fatores que influenciam a velocidade do paraquedista durante o salto, com a finalidade de formular um problema passível de ser modelado. Nesses jogos de linguagem, não entra em cena apenas o interesse, mas também a capacidade de perceber se o problema formulado pode ser resolvido, considerando os seus conhecimentos matemáticos e a suficiência de informações disponíveis sobre a situação da realidade. Isso exige, conforme indica Almeida (2018) e Galbraith, Stillman e Brown (2017), uma antecipação das ações subsequentes do desenvolvimento da atividade para julgar se o problema formulado pode vir a ser um problema de modelagem matemática. Esses aspectos sinalizam que nesses jogos de linguagens da inteiração com a situação-problema, a aprendizagem envolve o domínio de técnicas de formulação de problemas e capacidade de discernimento do problema em relação ao seu potencial de vir a ser um problema passível de ser modelado matematicamente.

Na construção do modelo matemático, a matematização e a formulação de um problema matemático são jogos de linguagem caracterizados principalmente pela tradução de jogos da situação da realidade e jogos da matemática. Nessa atividade, em particular, os estudantes formularam um problema matemático usando EDOs, a partir de regras matemáticas específicas para trabalhar com essa estrutura matemática e articular com uma análise das forças que agem sobre o paraquedista durante o salto, usando conhecimentos da Física. Nesse caso, a aprendizagem envolvida indica um modo de ver o fenômeno da realidade, a partir das hipóteses e variáveis formuladas, resultando em um problema matemático que direciona as ações dos estudantes no interior de jogos de linguagem essencialmente matemáticos, como a resolução do problema matemático e expressão do modelo matemático.

Na resolução do problema matemático, os estudantes mostram que seguem regras necessárias para resolver uma EDO de 1ª ordem autônoma e para encontrar uma solução matemática para esse problema, recorrendo a técnica de separação de variáveis e a técnicas de integração. Nesse jogo de linguagem, foi necessária a intervenção do professor-pesquisador, que mostrou como e que regras matemáticas poderiam ser usadas para resolver a EDO. Ao jogar esse jogo, ocorre uma oportunidade de aprendizagem interior à própria matemática, em que conceitos e procedimentos matemáticos podem ser usados para construir um modelo matemático.

Na expressão do modelo matemático, os estudantes precisam escolher uma forma de expressar o modelo matemático, dada a diversidade existente de modos distintos de expressar um modelo matemático, podendo ser eles na forma de gráficos, tabelas, funções, desenhos, equações, entre outros (Sousa; Tortola, 2021). Para tanto, em relação à aprendizagem, os estudantes precisam ter a capacidade de discernimento de qual modo de expressão linguística do modelo matemático é adequado para resolver o problema. Isso exige que os alunos dominem diversos modos de expressão linguística, com os quais recorremos para trabalhar matematicamente. Nessa atividade, os estudantes recorreram a expressão gráfica do modelo matemático, construída por meio do *software* GeoGebra, para resolver o problema.

Na análise do modelo matemático, os estudantes se envolvem em jogos de linguagem de tradução, interpretação, avaliação e validação que possibilitam estabelecer uma relação de volta do domínio matemático para o domínio da situação da realidade. Na resposta para o problema na linguagem da situação-problema, eles recorreram a análise da influência de parâmetros (o parâmetro m relativo a massa e o parâmetro t_a relativo ao instante de abertura do paraquedas) no comportamento do modelo matemático em relação ao comportamento do fenômeno, traduzindo a resposta matemática em uma resposta para a linguagem natural da situação-problema. Na interpretação dos resultados em relação ao fenômeno, os estudantes avaliaram qualitativamente os resultados obtidos com o modelo matemático, realizando interpretações das implicações desses resultados para o fenômeno. Na validação do modelo matemático, formularam argumentos coerentes para indicar que o modelo matemático é adequado para o fenômeno estudado, por meio de uma avaliação comparativa dos resultados e as informações a respeito do fenômeno. Esses jogos de linguagem sinalizam no que tange à aprendizagem, a aquisição de um modo de ver o fenômeno com base em regras matemáticas articuladas na construção do modelo matemático e a aquisição de técnicas de avaliação desse modelo, como a comparativa e a qualitativa (Niss; Blum, 2020).

Os jogos de linguagem identificados na análise do modelo matemático nessa atividade foram mediados pelo uso do *software* GeoGebra, que possibilitou aos estudantes a *visualizar* graficamente o modelo matemático e realizar *simulações* a partir da manipulação dos parâmetros com controles deslizantes e modificações no gráfico do modelo (Greefrath, 2011; Greefrath; Siller, 2017).

Em relação ao ambiente, este pode ser caracterizado como um ambiente misto, em que partes da atividade foram desenvolvidas em um ambiente remoto (com uso do Google Meet, Google Classroom, WhatsApp e Google Docs) e partes foram realizadas presencialmente na sala de aula.

Por fim, ao considerar que o foco pedagógico da disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática incide sobre a capacidade de fazer modelagem matemática, os jogos de linguagem associados à aprendizagem nessa atividade estão intimamente relacionados às fases e às ações características envolvidas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

4.2.2.3 Descrição da atividade Compra de um Notebook

A atividade *Problema dos Notebooks: uma análise do custo-benefício* foi desenvolvida pelos estudantes do grupo GM2 no período de 06/04/2022 a 27/04/2022 na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. O problema investigado foi: '*Qual é o melhor notebook para comprar considerando o preço e seu desempenho?*'

Inicialmente, tendo como propósito a compra de um notebook para uso pessoal, os estudantes estabeleceram critérios para avaliar o desempenho e o preço do notebook, atribuindo uma pontuação de 0 a 10 para capacidade da memória RAM, do armazenamento e para o tipo de processador, elementos que influenciam o desempenho. Além disso, atribuíram uma pontuação de 0 a 10 para o preço. No caso do desempenho, a pontuação foi realizada com base em uma consulta feita com um técnico de informática. No caso do preço, a pontuação foi baseada no orçamento financeiro dos próprios estudantes.

A partir de uma consulta a um técnico de informática, os alunos observaram que a memória RAM, o armazenamento e o tipo de processador possuem pesos diferentes em relação as suas influências no desempenho do notebook, tendo o processador peso 5, a memória RAM peso 3 e o armazenamento peso 2. Desta forma, um índice de desempenho foi elaborado a partir de uma média ponderada das notas de cada componente, como mostra o Quadro 41.

Quadro 41 – Tema e estabelecimento de critérios na atividade 'Problema dos Notebooks'

Problema dos Notebooks: uma análise do custo-benefício'

Tema

As vendas de computadores no Brasil cresceu durante a pandemia, visto que tivemos que nos adaptar com aulas no modo remoto e com muitas empresas aderindo ao modelo home office. Durante o primeiro trimestre de 2021, segundo um estudo recente da IDC Brasil, em comparação ao mesmo período de 2020, o aumento nas vendas foi de 19,7%. Considerando apenas o varejo, a alta foi de 17%, sendo a maioria dos modelos notebooks, com 86%.

Ao comprar um notebook somos bombardeados com informações sobre Memória RAM, espaço de memória interna e processadores na hora da compra de um notebook

Problema: *Qual é o melhor notebook para comprar considerando o preço e seu desempenho?*

Estabelecimento de critérios

Consideramos dois fatores que podem afetar a o custo-benefício de um notebook: o desempenho e o preço.

O desempenho pode ser medido a partir da Memória RAM; a capacidade de armazenamento (SSD) e o processador. Atribuímos uma pontuação de 0 a 10 para cada um desses elementos. Além disso, atribuímos uma pontuação de 0 a 10 para os preços, de acordo com nosso orçamento.

Pontuação	Memória RAM (em GB)
0	1
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

Pontuação	SSD (em GB)
0	0
1	102,4
2	204,8
3	307,2
4	409,6
5	512
6	614,4
7	716,8
8	819,2
9	921,6
10	1024

Pontuação	Processador
1,67	Dual Core
3,33	Quad Core
5	i3
6,67	i5
8,34	i7
10	i9

Pontuação	Preço
0	R$ 1.000,00
1	R$ 2.000,00
2	R$ 3.000,00
3	R$ 4.000,00
4	R$ 5.000,00
5	R$ 6.000,00
6	R$ 7.000,00
7	R$ 8.000,00
8	R$ 9.000,00
9	R$ 10.000,00
10	R$ 11.000,00

Memória RAM, armazenamento interno e o processador possuem pesos diferentes em relação ao desempenho do notebook. Chegamos à conclusão de que podemos atribuir os seguintes pesos a essas categorias: 5 para o processador, 3 para a Memória Ram e 2 para o Armazenamento.

O índice de desempenho pode ser calculado a partir de uma média ponderada:

$$\text{Índice de Desempenho} = \frac{5C + 3R + 2A}{10}$$

Fonte: $C_2\_RE\_MM_4\_GM2$.

Utilizando esses atributos, os estudantes coletaram dados de dez notebooks a partir de pesquisas realizadas na internet e calcularam um índice de desempenho e um índice de preço para cada um dos modelos encontrados.

Como hipótese, consideraram que o notebook com melhor custo-benefício será aquele que possui o menor índice de preço e o maior índice de desempenho. Em termos matemáticos, sejam d_n o índice de desempenho do notebook n e p_n o índice de preço do notebook n, com $n \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, pode-se considerar pontos cartesianos $P_n = (d_n, p_n)$. O notebook que possui melhor custo-benefício será aquele que possui menor distância euclidiana do ponto $M = (10, 0)$, considerado como sendo o notebook ideal (maior desempenho e menor custo).

Utilizando um gráfico de dispersão e a hipótese formulada, os alunos construíram um modelo matemático que consiste, em um primeiro momento, no cálculo das distâncias euclidianas de cada ponto representante de um notebook n ao ponto de referência M e, em um segundo momento, na identificação do valor mínimo do conjunto dessas distâncias, conforme o Quadro 42.

Quadro 42 - Coleta de dados, matematização e construção do modelo matemático na atividade 'Problema dos Notebooks'

Coleta de dados

Modelo	Preço	Desempenho		
		Memória RAM (em GB)	SSD (em GB)	Processador (em GHz)
A	R$ 2.999,00	4 GB	128GB SSD	Intel Core i3
B	R$ 4.634,10	8 GB	256 GB SSD	Intel Core i5
C	R$ 4.049,10	16 GB	256 GB SSD	Intel Core i7
D	R$ 2.789,99	4 GB	256 GB SSD	Intel Core i3
E	R$ 6.199,00	8 GB	128 GB SSD	Intel Core i7
F	R$ 2.801,55	4 GB	128 GB SSD	Intel Core i3
G	R$ 4.769,10	8 GB	256 GB SSD	Intel Core i5
H	R$ 4.999,00	8 GB	256 GB SSD	Intel Core i7
I	R$ 5.129,99	8 GB	256 GB SSD	Intel Core i5
J	R$ 6.699,00	16 GB	512 GB SSD	Intel Core i7

Cálculo dos índices de desempenho e de preço

Modelo	Pontuação de desempenho	Pontuação do preço
A	3,35	2,00
B	5,04	3,71
C	7,07	3,24
D	3,60	1,86
E	5,62	5,31
F	3,35	1,87
G	5,04	3,82
H	5,87	4,00
I	5,04	4,27
J	7,57	5,74

Matematização

Variáveis

d_n: *índice de desempenho do computador n*

p_n = *índice de preço do computador n*

Com

$n \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$

Hipóteses

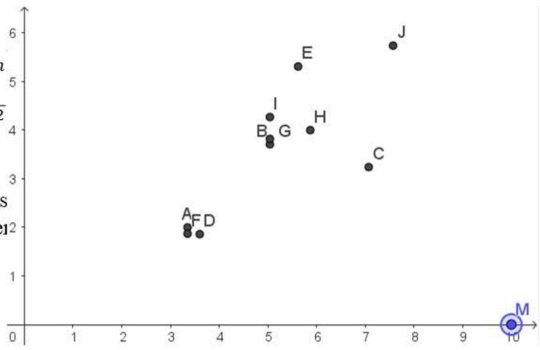
O computador com melhor custo-benefício é aquele que possuí o menor índice de preço e o maior índice de desempenho.

Construção do modelo matemático

A distância entre um ponto $C_n(d_n, p_n$ e o ponto M(10,0) é definido por:

$$d_{M,C_n} = \sqrt{(10 - d_n)^2 + (0 - p_n)^2}$$

O notebook com melhor cus benefício é aquele que possui a mei distância euclidiana do ponto $M = (10,0)$, isto é:



$$mín(d_{M,C_n}) = mín\left(d_{M,C_A}, d_{I,C_B}, d_{I,C_C}, \dots, d_{I,C_J}\right)$$

Seja $C_n = (d_n, p_n)$ pontos do plano cartesiano, cujas coordenadas são o índice de desempenho d_n (abcissa) e o índice de preço p_n (ordenada).

Em termos matemáticos, podemos dizer que o notebook que possui melhor custo-benefício é aquele que possui menor distância euclidiana do ponto $M = (10, 0)$ (notebook considerado ideal, maior desempenho e menor curso).

Fonte: $C_2\_RE\_MM_4\_GM2$.

Com base nesse modelo matemático, a resposta obtida foi que o notebook que apresenta melhor custo-benefício é modelo C. Na interpretação dos resultados e validação, o professor-pesquisador indagou os estudantes sobre a possibilidade de dois ou mais notebooks apresentar a mesma distância euclidiana, ressaltando a necessidade de um critério de desempate. Com isso, os estudantes consideraram que no caso de empate, haveria uma preferência pelo notebook com maior desempenho e, no caso de mesmo desempenho, a escolha seria aquele com menor preço.

Para validar os resultados, uma pesquisa foi realizada sobre comentários acerca do notebook com melhor custo-benefício de acordo com a resolução feita e constataram que o resultado é coerente com a avaliação de especialistas (Quatro 43).

Quadro 43 - Resposta para o problema e interpretação dos resultados e validação na atividade 'Problema dos notebooks'

Resposta para o problema

n	d_n	p_n	C_n	d_n
A	3,35	2,00	(3,35, 2)	6,94
B	5,04	3,71	(5,04, 3,71)	6,20
C	7,07	3,24	(7,07, 3,24)	4,37
D	3,60	1,86	(3,60; 1,86)	6,66
E	5,62	5,31	(5,62, 5,31)	6,89
F	3,35	1,87	(3,35, 1,87)	6,91
G	5,04	3,82	(5,04, 3,82)	6,26
H	5,87	4,00	(5,87, 4)	5,75
I	5,04	4,27	(5,04, 4,27)	6,55
J	7,57	5,74	(7,57, 5,74)	6,24

De acordo com o modelo matemático o notebook que possui menor distância euclidiana do ponto $M = (10,0)$ é o computador C.
É ele que tem o melhor custo-benefício.

Interpretação dos resultados e validação

PP: Acho que falta um critério de desempate

PP: Veja que tanto o B quando o G a distância euclidiana do ponto (10,0) é a mesma. Contudo, eles possuem coordenadas diferentes. É que no caso a menor distância deu só um notebook, Mas pode acontecer de modo geral de dar mais de um notebook na menor distância.

A6: Faz sentido a gente colocar um critério de desempate para aquele que tenha um melhor desempenho. E aí um terceiro critério, caso haja empate novamente, o que é bem difícil de acontecer, o menor preço. $(C_2\_W\_MM_4\_GM_4)$

Dos notebooks analisados no trabalho, podemos perceber que o Asus VivoBook é o que possui maior Memória RAM, segundo maior armazenamento de SSD e possui o processador mais avançado e mesmo assim tem o custo de R$2.000,00 abaixo do computador mais caro. Portanto, o Asus VivoBook é o melhor custo-benefício para um notebook de uso casual.
O site "*Tilt*", pertencente ao grupo Uol, realizou uma "Review" sobre o notebook em questão. Eles destacam que o computador é bem equilibrado, sendo muito recomendado para estudo e trabalho, e sendo um pouco inferior para o uso em jogos que exige maior capacidade de placas de vídeo, item que não estava em análise no nosso problema. O site ainda destaca que dificilmente outro computador teria as mesmas características por um preço menor $(C_2\_RE\_MM_4\_GM_4)$.

Fonte: $C_2\_RE\_MM_4\_GM2$.

Em síntese, com o tema compra de um notebook, os estudantes do grupo GM2 buscaram investigar qual notebook apresenta melhor custo-benefício, estabelecendo uma métrica para classificação de dez notebooks com base em um índice de desempenho e um índice de preço. A partir do modelo matemático, os estudantes concluíram que o notebook que apresenta melhor custo-benefício, ou seja, aquele que tem menor preço e maior desempenho é o computador C e consideraram que o resultado obtido é adequado, pois está de acordo com a análise de especialistas.

4.2.2.4 Identificação de jogos de linguagem que constituem aprendizagem na atividade Compra de um Notebook

Na atividade *Problema dos Notebooks: uma análise do custo-benefício*, as ações dos estudantes do grupo GM2 indicam que essa atividade de modelagem matemática pode ser caracterizada como uma modelagem prescritiva, usando a terminologia de Niss (2015), cujo propósito não é primordialmente compreender, descrever ou prever alguma situação da realidade, mas projetar, prescrever, organizar ou estruturar certos aspectos dessa situação. O objetivo dos estudantes, nessa caracterização, é preparar o caminho para a ação baseada em decisões resultantes de um determinado tipo de considerações matemáticas. Em particular nessa atividade, eles buscaram estabelecer uma métrica para o custo-benefício de um notebook, auxiliando o consumidor no momento de compra.

Nessa seção, descreve-se os jogos de linguagem que sinalizam aprendizagem considerando três fases do desenvolvimento da atividade: *inteiração com a situação-problema*, *construção do modelo matemático* e *análise do modelo matemático*.

Na *inteiração com a situação-problema*, com base nas ações dos estudantes, os seguintes jogos de linguagem foram identificados: escolha de um tema passível de ser modelado, compreensão da situação da realidade, coleta de informações e formulação de um problema.

A *escolha de um tema passível de ser modelado* se constitui um jogo de linguagem, em que os estudantes precisam escolher uma situação não essencialmente matemática que seja passível de ser modelada, isto é, que tenha informações disponíveis e que os estudantes tenham conhecimentos a respeito dela e conhecimentos matemáticos necessários para investigá-la. Não basta nesse jogo de linguagem apenas o interesse dos estudantes, mas faz-se necessário uma antecipação global da atividade, no sentido de perceber se esse tema pode desencadear uma atividade de modelagem matemática (Almeida, 2018; Galbraith; Stillman; Brown, 2017). Esse aspecto depende de uma familiarização com atividades de modelagem matemática.

Inspirados por um estudo[18] que aponta um crescimento nas vendas de notebook no Brasil no cenário de pandemia da Covid-19 e considerando a quantidade de informações que são disponibilizadas no momento da compra, os estudantes escolheram investigar qual notebook para uso pessoal seria mais adequado comprar.

A venda de computadores no Brasil cresceu durante o primeiro trimestre de 2021, aponta um estudo recente da IDC Brasil. Em comparação ao mesmo período de 2020, pré-pandemia, o aumento nas vendas foi de 19,7%. Considerando apenas o varejo, a alta foi de 17%, sendo a maioria dos modelos notebooks, com 86% do total ($C_2\_RE\_MM_4\_GM2$). Um excerto da fala de E7 evidencia a justificativa pela escolha da temática:

> E7: Quando a gente vai comprar um notebook, a gente é bombardeado por muitas informações, de placa de vídeo, memória RAM, processador, sistema operacional, entre outros [...]. Muitas vezes a gente não sabe o que significa, ou não sabe o que esse componente representa do notebook [...]. Então, nosso objetivo a partir do desempenho do notebook e de seu preço é auxiliar um consumidor a escolher um notebook viável para ele, que no caso seria para uso pessoal ($C_2\_D\_MM_4\_GM_2\_A7$).

---

[18] IDC BRASIL. **Estudo da IDC Brasil aponta que mercado brasileiro de PCs cresceu 37% em 2021**. 2022. Disponível em: Estudo da IDC Brasil aponta que mercado brasileiro de PCs cresceu 37% em 2021. Acesso em: 10 de abr. de 2022.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada à capacidade de perceber se o tema escolhido é passível de ser modelado, o que envolve uma familiaridade dos estudantes com atividades de modelagem matemática; e a formulação de uma justificativa aceitável acerca da relevância do tema escolhido.

Na *compreensão da situação da realidade*, faz-se necessário compreender que fatores são relevantes e devem ser levados em consideração no momento da compra de um Notebook. A partir de pesquisas em sites especializados e em uma conversa com um especialista da área de tecnologia, os estudantes consideraram dois fatores, o preço e o desempenho, sendo esse segundo influenciado pela memória RAM, espaço de armazenamento (HD ou SSD) e processador:

> PP: Em relação ao desempenho, como a gente pode "medir" o desempenho de um notebook?
> E7: Acho que memória RAM, o HD que hoje na maioria dos casos os notebooks têm SSD e o processador.
> PP: Certo e o qual é a influência de cada um desses fatores no desempenho? ($C_2\_V\_MM_4\_GM_2\_A7$).
> E7: A memória RAM é um tipo de espaço temporário. É como se você fosse estudar em uma mesa de estudos. O material que está sobre a mesa seria os arquivos do computador. A mesa seria a memória RAM. Que é o local onde você está trabalhando ou executando uma tarefa no computador. [....] O processador é o "cérebro" do computador e no caso da mesa significa a velocidade com que as informações do material são processadas. [....] Em relação ao armazenamento interno, hoje existem dois de armazenamento interno do notebook, o HD, o SSD. O que diferencia os dois é que o HD é o mais barato e era o mais encontrado, mas com a evolução da tecnologia, surgiu o SSD. Por isso hoje é mais fácil de encontrar notebooks com SSD, pois eles são mais velozes e conseguem acessar de forma mais rápida e eficiente os arquivos do computador ($C_2\_D\_MM_4\_GM_2\_A7$).

Nesse jogo de linguagem, os estudantes criam um "recorte" da situação, selecionando os aspectos que são considerados relevantes a partir de seus conhecimentos acerca do tema. Dessa maneira, a aprendizagem está associada ao uso de conhecimentos e informações acerca da situação da realidade e à capacidade de simplificá-la, tornando-a passível de ser modelada.

No jogo de linguagem *coleta de informações*, os estudantes pesquisaram em plataformas virtuais de venda, o preço, a memória RAM, SSD e o processador de dez modelos de notebooks considerados adequados para o uso pessoal. Essas informações foram organizadas em uma tabela (Quadro 42). A aprendizagem nesse jogo de linguagem envolve ser capaz de identificar que informações devem ser coletadas e como coletar essas informações, essa uma técnica importante do fazer modelagem matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Niss; Blum, 2020).

Na *formulação do problema*, os estudantes optaram por investigar *"*Qual é o melhor notebook para comprar considerando o preço e seu desempenho?” A formulação desse problema desencadeia um processo que exige uma explicitação do que eles entendem pelo termo ‘melhor’, evidenciando a subjetividade envolvida na qualificação de um produto. Esse aspecto caracteriza o problema formulado como um problema aberto, pois a depender do modo como o termo ‘melhor’ é usado, diferentes caminhos de resolução podem ser tomados. Além disso, a problematização realizada remete a um tipo de problema típico da modelagem prescritiva (Niss, 2015), que direciona o desenvolvimento da atividade para um encaminhamento que visa estabelecer uma métrica para embasar um juízo de valor a respeito do melhor notebook, em termos de custo-benefício.

Ao formular um problema, a aprendizagem nesse jogo de linguagem está associada a aprendizagem de uma técnica fundamental do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática: formular problemas. O uso dessa técnica revela a intencionalidade dos estudantes ao trabalhar com modelagem matemática.

Na *construção do modelo matemático*, percebe-se que os estudantes se envolveram nos jogos de linguagem: elaboração de índices para medir o desempenho e o preço dos notebooks, formulação de hipóteses, formulação de um problema matemático, elaboração de uma métrica para avaliar o custo-benefício de notebooks, resposta para o problema matemático. Os três primeiros indicam ações que ocorrem na matematização.

Na *elaboração de índices para medir o desempenho e o preço dos notebooks*, os estudantes estabeleceram um sistema de pontuação de 0 a 10 para classificar o preço e o desempenho dos notebooks, gerando dois índices, um para o desempenho e outro para o preço (Quadro 41). Para elaboração do índice de desempenho, os estudantes recorreram a opinião de um especialista que forneceu critérios para classificar o nível de importância dos elementos (RAM, memória interna e processador) no desempenho de um notebook. O índice de preços, por sua vez, foi formulado de acordo com o orçamento pessoal dos estudantes e aquilo que eles consideravam como sendo um computador caro, barato e com preço mediano. O diálogo a seguir mostra esse processo:

> E7: A partir de uma Tabela, nós pontuamos a memória RAM de 0 a 20 GB, pois a gente não conseguiu encontrar notebooks para vender que possuem 1 GB de memória RAM, mas nós encontramos para vender separado com esse tamanho. Então achamos melhor colocar. É importante dizer que os notebooks comuns vendidos possuem entre 4 GB e 16 GB, isso não quer dizer que não existam com mais GB de memória RAM, mas são normalmente para usos específicos que exigem um alto desempenho.
> Nós pontuamos também de 0 a 10, os SSDs com capacidade de 0 a 1024 GB (1 TB). A partir disso a gente classificou a cada unidade de pontuação 102,4 GB. Contudo, como nós não encontramos notebooks para vender com 307,2 GB, mas a gente encontra com 256, 128, 512 GB, admitimos que as notas atribuídas podem ser números decimais.
> E7: A gente utilizou os processadores da Intel, pois são os mais comuns de encontrar.

> A gente pegou as versões mais recentes que são Dual Core, Quad Core, i3, i5, i7, i9. Para pontuar de 0 a 10, como eu tenho só seis processadores para classificar, então eu basicamente dividi dez por seis e cada um representa uma pontuação
> E7: Por fim, pensamos assim: se você vai comprar um notebook, para usos domésticos você não vai pagar uma fortuna para funções básicas né, uma pessoa comum qualquer que recebe um salário normal não tem como comprar um notebook muito caro. Então classificamos de 1000 em 1000 até 11.000, só que 11.000 a gente já acha que é um preço muito alto para comprar um notebook ($C_2\_D\_MM_4\_GM_2\_A7$).

Nesse jogo de linguagem, os estudantes formulam regras para organizar as informações coletadas a respeito dos notebooks em um sistema de pontuação do desempenho e do preço. Ao fazer isso, entende-se que os estudantes já estão matematizando a situação da realidade, ao associarem mais matemática a situação do que já havia sido associada até então (Jablonka; Gellert, 2007).

A aprendizagem nesse jogo de linguagem está associada à formulação de regras para organização de informações coletadas da situação da realidade, com base em critérios bem fundamentados em modos de ver de especialistas e na sua própria forma de vida.

Na *formulação de hipóteses*, os estudantes explicitam o critério utilizado para determinar o notebook que apresenta melhor custo-benefício, sendo aquele que apresenta menor índice de preço e maior índice de desempenho, indicando a melhor escolha para o consumidor. Essa hipótese mostra uma idealização da situação, ao sugerirem qual o notebook é considerado ideal para uma tomada de decisão de compra, revelando um aspecto da matematização.

Em relação à aprendizagem nesse jogo de linguagem, podemos dizer que esta sinaliza à aquisição de um modo de ver a situação-problema e explicita que significado está presente no uso do termo ‘melhor’ na qualificação do custo-benefício de um notebook.

Na *formulação de um problema matemático*, os estudantes traduzem o problema escrito na linguagem natural para uma linguagem matemática, com base nas hipóteses e nas variáveis selecionadas. Para isso, traçaram no plano cartesiano um gráfico de pontos (d_n, p_n), cujos pares ordenados eram formados pelo índice de desempenho (d_n) como abcissa e o índice de preço (p_n) como ordenada. Em termos matemáticos, o notebook com melhor custo-benefício, segundo os estudantes, seria aquele que possuísse menor distância euclidiana do ponto $M(10, 0)$, que indica o notebook com maior desempenho e menor preço. Com isso, o problema matemático formulado consiste em determinar qual ponto $C_n(d_n, p_n)$ possui menor distância euclidiana do ponto $M(10,0)$?

> PR: Aquela última coluna é o índice né, e como ele foi usado?
> E2: a gente olhou para o ponto que possui menor distância do ponto M.
> E2: então essa aqui (apontando para o ponto C) é o que possui menor distância do ponto M. Então a gente considerou que o notebook que possui melhor custo-benefício é aquele que possui menor distância do ponto considerado ideal, que possui menor preço e maior desempenho ($C_2\_D\_MM_4\_GM_2$).

Nesse jogo de linguagem, que pode ser caracterizado como um jogo de tradução de jogos de linguagem da situação da realidade para jogos de linguagem da situação-problema, os estudantes precisam decidir qual linguagem matemática será adequada para formular um problema matemático e com que finalidade o uso de regras matemáticas será feito na atividade para construir um modelo matemático. A aprendizagem está associada, portanto, ao uso de regras matemáticas para formular um problema matemático, considerando as variáveis, hipóteses e simplificações em uma linguagem matemática.

Na *elaboração de uma métrica para avaliar o custo-benefício de notebooks*, os estudantes elaboraram um modelo matemático que, nesse caso, consiste em uma métrica, uma interpretação do conjunto de medidas utilizadas para medir o desempenho e o preço, com a finalidade de determinar o notebook com melhor custo-benefício para compra. Nesse jogo de linguagem, os estudantes recorreram ao conceito de distância euclidiana de dois pontos no plano cartesiano e o valor mínimo do conjunto de medições do custo-benefício dos notebooks. Em termos matemáticos, seja $d_{M,C_n} = \sqrt{(10 - d_n)^2 + (p_n)^2}$ a distância euclidiana dos pontos $C_n(d_n, p_n)$, que expressa o desempenho e o preço dos notebooks coletados, ao ponto $M(10,0)$, que expressa o notebook ideal, com $n = \{A, B, C, D, \dots, J\}$ como o conjunto dos notebooks coletados, tem-se que o notebook com melhor-custo benefício é aquele que atende a métrica $\min\left(d_{M,C_n}\right) = \min\,(d_{M,C_A}, d_{M,C_B}, \dots, d_{M,C_j})$.

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada à elaboração de uma regra matemática, expressa por meio de uma métrica, para interpretar um conjunto de medidas do custo-benefício de notebooks, normatizando a ação de um consumidor na tomada de decisão de compra desse produto.

Na *resposta para o problema matemático* os estudantes aplicaram a métrica construída para determinar o ponto no plano cartesiano que possui menor distância euclidiana do ponto M(10, 0). Como resultado, encontraram que o ponto C_C é aquele que atende esses requisitos. Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada à aplicação de uma regra matemática para resolver um problema do domínio matemático e envolve o domínio de técnicas matemáticas, como o cálculo da distância euclidiana entre pontos e a determinação do valor mínimo de um conjunto de valores.

Na *análise do modelo matemático*, os seguintes jogos de linguagem foram identificados: tomada de decisão de compra de um notebook em relação ao seu custo-benefício, avaliação qualitativa dos resultados.

A *tomada de decisão de compra de um notebook em relação ao seu custo-*

benefício consiste em um jogo de linguagem que, no desenvolvimento dessa atividade, envolveu a tradução da resposta matemática para uma resposta para o problema na linguagem natural, indicando qual dos dez notebooks pesquisados deve ser comprado de acordo a métrica construída. Os estudantes traduzem o ponto C_C, considerado como aquele que possui menor distância euclidiana do ponto $M(10{,}0)$ na resposta matemática, para o modelo de notebook a ser comprado, isto é, o notebook nomeado como C. Ao fazer essa tradução, os estudantes se envolvem em um jogo de linguagem de tomada de decisão.

Em relação à aprendizagem nesse jogo de linguagem, pode-se considerar que ela se constitui na capacidade de tomada de decisão a partir de um modo de ver a situação-problema, com base em uma métrica construída e na capacidade de traduzir a resposta matemática para uma resposta para a situação-problema na linguagem natural.

Na *avaliação qualitativa dos resultados*, a validação do modelo matemático não pode ser feita no sentido de confrontar os resultados obtidos por meio do modelo matemático com informações da realidade. Dessa maneira, os estudantes recorreram a uma avaliação qualitativa dos resultados, analisando os impactos dos resultados no discurso associado ao problema formulado e considerando a influência da mudança dos requisitos na construção da métrica. Esse tipo de avaliação se faz necessário em atividades de modelagem matemática do tipo prescritivo (Niss, 2015).

Nesse jogo de linguagem, o modelo matemático construído tem a função de uma regra, que mostra qual decisão *deve* ser tomada. Ao ser o próprio critério de correção e regulação do fenômeno, ele não pode ser falseado, mas apenas criticado e aprimorado. Nesse caso, os estudantes observaram a necessidade de inserir um critério de desempate como parte da métrica e recorreram a um *review* de um site especializado em tecnologia sobre o notebook encontrado como resultado da aplicação do modelo, para sinalizar a razoabilidade desse resultado.

> PP: Acho que falta um critério de desempate. Veja que tanto o B quando o G a distância euclidiana do ponto (10,0) é a mesma. Contudo, eles possuem coordenadas diferentes. É que no caso a menor distância deu só um notebook, mas pode acontecer de modo geral de dar mais de um notebook na menor distância.
> E8: Faz sentido a gente colocar um critério de desempate para aquele que tenha um melhor desempenho. E aí um terceiro critério, caso haja empate novamente, o que é bem difícil de acontecer, o menor preço ($C_2\_W\_MM_4\_GM_2$).
> O site "*Tilt*", pertencente ao grupo Uol, realizou uma "Review" sobre o notebook em questão. Eles destacam que o computador é bem equilibrado, sendo muito recomendado para estudo e trabalho, e sendo um pouco inferior para o uso em jogos que exige maior capacidade de placas de vídeo, item que não estava em análise no nosso problema. O site ainda destaca que dificilmente outro computador teria as mesmas características por um preço

menor ($C_2\_RE\_MM_4\_GM_2$).

A aprendizagem dos estudantes nesse jogo de linguagem sinaliza à aquisição de uma técnica de avaliação qualitativa do modelo matemático e de seus resultados, com foco nas propriedades estruturais desse modelo e nas suas implicações para o fenômeno modelado.

Onze jogos de linguagem foram identificados nessa atividade, tendo como embasamento as ações dos estudantes na inteiração com a situação-problema, na construção do modelo matemático e na análise do modelo matemático, indicados no Quadro 44.

Quadro 44 - Identificação dos jogos de linguagem associados à aprendizagem na atividade Compra de um notebook

Fases do desenvolvimento da atividade	**Jogos de linguagem**	**Sinalização de aprendizagem**
Inteiração com a situação-problema	Escolha de um tema passível de ser modelado	Capacidade de perceber se o tema escolhido é passível de ser modelado, o que envolve uma familiaridade dos estudantes com atividades de modelagem matemática; e a formulação de uma justificativa aceitável acerca da relevância do tema escolhido.
	Compreensão da situação da realidade	Uso de conhecimentos e informações acerca da situação da realidade e à capacidade de simplificá-la, tornando-a passível de ser modelada.
	Coleta de informações	Ser capaz de identificar que informações devem ser coletadas e como coletar essas informações, essa uma técnica importante do fazer modelagem matemática.
	Formulação de um problema	Aprendizagem de uma técnica fundamental do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática: formular problemas. O uso dessa técnica revela a intencionalidade dos estudantes ao trabalhar com modelagem matemática.
Construção do modelo matemático	Elaboração de índices para medir o desempenho e o preço dos notebooks	Formulação de regras para organização de informações coletadas da situação da realidade, com base em critérios bem fundamentados em modos de ver de especialistas e na sua própria forma de vida.
	Formulação de hipóteses	Aquisição de um modo de ver a situação-problema e a explicitação do uso que está sendo feito de termos da situação-problema.
	Formulação de um problema matemático	Uso de regras matemáticas para formular um problema matemático, considerando as variáveis, hipóteses e simplificações e uma linguagem matemática adequada.
	Elaboração de uma métrica para avaliar o custo-benefício de notebooks	Elaboração de uma regra matemática, expressa por meio de uma métrica, para interpretar um conjunto de medidas do custo-benefício de notebooks, normatizando a ação de um consumidor na tomada de decisão de compra de um notebook.
	Resposta para o problema matemático	Aplicação de uma regra matemática para resolver um problema do domínio matemático e envolve o domínio de técnicas matemáticas, como o cálculo da distância euclidiana entre pontos e a determinação do valor mínimo de um conjunto de valores.
Análise do modelo matemático	Tomada de decisão de compra de um notebook em relação ao seu custo-benefício	Capacidade dos estudantes de tomada de decisão a partir de um modo de ver a situação-problema, com base em uma métrica construída e na capacidade de traduzir a resposta matemática para uma resposta para a situação-problema na linguagem natural.

	Avaliação qualitativa dos resultados	Aquisição de uma técnica de avaliação qualitativa do modelo matemático e de seus resultados, com foco nas propriedades estruturais desse modelo e nas suas implicações para o fenômeno modelado.

Fonte: os autores.

Na inteiração com a situação-problema, os jogos de linguagem envolvem conhecimentos dos estudantes acerca do tema e o uso de técnicas do fazer modelagem matemática como simplificação, coleta de informações e formulação de um problema entram em ação, com a finalidade de tornar uma situação da realidade passível de ser modelada, do ponto de vista dos estudantes. Isso requer uma familiaridade com atividades de modelagem matemática, com uma diversidade de situações já estudadas em momentos anteriores (Almeida; Dias, 2004). Em termos wittgensteinianos, essa familiarização pode ser compreendida como um *treinamento* dos estudantes em relação às técnicas do fazer modelagem matemática, realizado no decorrer da disciplina e em outras experiências dos estudantes com esse tipo de atividade. Como resultado, a aprendizagem nesses jogos de linguagem se mostra na capacidade dos estudantes de antecipar de maneira ampla os possíveis encaminhamentos que podem surgir de uma situação da realidade (Almeida, 2018; Galbraith; Stillman; Brown, 2017), com o propósito de perceber se essa situação pode desencadear uma atividade de modelagem matemática.

Na construção do modelo matemático, a matematização foi feita por meio da elaboração de índices para medir o desempenho e o preço dos notebooks, da formulação de hipóteses e da formulação de um problema matemático. Nessa atividade, os estudantes precisaram quantificar as informações, elaborando índices de medida que expressam juízos de valores, com base na compreensão da situação da realidade. Ao fazer isso, condições para a construção do modelo matemático são fornecidas, tornando possível a tradução do problema da linguagem natural em um problema matemático e sua resolução. Ao usar regras matemática para traduzir o problema escrito na linguagem natural para um problema matemática, os estudantes atribuem um significado ao uso do termo ‘melhor’ custo-benefício, sendo este considerado como sendo o ponto de menor distância euclidiana ao ponto de referência, que indica o notebook com melhor custo-benefício (maior desempenho e menor preço). A aprendizagem nesses jogos de linguagem se mostra na aquisição de um modo de ver o fenômeno da realidade, a partir do uso de regras matemáticas para traduzir o problema original em um problema matemático.

Na elaboração de uma métrica para avaliar o custo-benefício de notebooks e a formulação de uma resposta para o problema matemático, os estudantes recorreram a conceitos e procedimentos matemáticos, como gráfico de dispersão, distância euclidiana de dois pontos no plano cartesiano e o valor mínimo de um conjunto de valores. Nesses jogos de linguagem, a função desempenhada pela matemática é a prescritiva, que de acordo com Davis e Hersh (2005), ocorre em situações em que o uso da matemática conduz à ação humana. Nessa atividade, a métrica elaborada pode ser considerada como um modelo matemático, que estabelece uma medição do custo-benefício, que conduz, orienta a ação humana de tomar uma decisão diante de uma situação de compra. Nesses jogos de linguagem, a aprendizagem envolve principalmente o uso de regras matemáticas para resolver um problema matemático, ao calcularem as distâncias euclidianas dos pontos $C_n(d_n, p_n)$ ao ponto $M(10,0)$ e, posteriormente, o valor mínimo do conjunto formado por essas distâncias, encontrando uma resposta matemática para o problema matemático.

Na análise do modelo matemático, os estudantes recorreram a uma técnica de validação que busca analisar as implicações do modelo matemático para o fenômeno e as influências dos requisitos considerados na elaboração da métrica, fazendo uma avaliação qualitativa dos resultados. O uso dessa técnica se faz necessário, na medida em que dada a natureza prescritiva da atividade, o modelo matemático é ele próprio padrão de correção e não pode ser falseado a partir de uma avaliação quantitativa, que compara os resultados obtidos com o modelo e as informações quantitativas fornecidas, tomando como critério os erros obtidos nessa comparação, por exemplo (Niss, 2015; Niss; Blum, 2020). A aprendizagem se associa à aquisição de um modo de ver, que leva a uma tomada de decisão, com base em normas estabelecidas na aplicação de um modelo matemático na situação que envolve a compra de um notebook.

No decorrer da atividade, principalmente na construção do modelo matemático, os estudantes se valeram do software GeoGebra para traçar o gráfico de dispersão, cumprindo a função de *visualização*, e do software Excel que cumpriu a função de *cálculo* das distâncias euclidianas entre os pontos C_n e M (Greefrath, 2011).

O ambiente em que os jogos de linguagem puderam ser identificados no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática pode ser caracterizado como um ambiente misto, no qual os estudantes se reuniram em aulas presenciais e realizaram encontros fora do ambiente presencial via Google Meet, realizaram discussões no WhatsApp e recorreram ao Google Docs para produção do relatório escrito, com participação simultânea dos integrantes na escrita.

Em comparação à atividade Salto de Paraquedas desenvolvida no contexto da disciplina Modelagem Matemática na Educação Matemática, na atividade compra de um notebook, as ações dos estudantes se diferenciam no que tange à escolha do tema, a coleta de informações, o papel do modelo matemático e o uso de conceitos matemáticos. Nessa segunda atividade, os jogos de linguagem se direcionam para a finalidade de construir uma métrica para avaliar o custo-benefício de um notebook, atribuindo ao modelo matemático um papel prescritivo, como formatador de um modo de ver o fenômeno modelo. Na atividade Salto de Paraquedas, por sua vez, as ações dos estudantes se desencadeiam a partir de um problema formulado para estudar a velocidade do paraquedista no decorrer do tempo, cujo modelo matemático construído visa descrever como se dá o comportamento desse fenômeno.

4.2.2.5 Descrição da atividade Frota de Veículos

A atividade *Análise da taxa da frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR* foi desenvolvida pelos estudantes do grupo GM4 no período de 06/04/2022 a 27/04/2022 na disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, cujo tema foi escolhido pelo grupo.

Como justificativa para a escolha desse tema, foram consideradas notícias que informam que a taxa de crescimento de veículos é maior que taxa de crescimento da população na cidade de Londrina do estado do Paraná, o que pode gerar congestionamentos devido à alta quantidade de veículos nas ruas e avenidas. Estudos sobre essa temática, segundo os estudantes, se mostram importantes, pois com o "uso de modelos matemáticos que permitem estimar a quantidade de veículos a curto e longo prazo pode contribuir para um bom fluxo veicular, visto que proporciona aos engenheiros de trânsito uma previsão, o que os permite realizar um planejamento adequado" ($C_2\_RE\_MM_6\_GM4$). Diante desse cenário, o seguinte problema foi formulado: "*Em que ano a taxa de veículo por habitante será igual a 1?*" ($C_2\_RE\_MM_6\_GM4$).

Dados foram coletados no site do IPARDES (Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social) sobre a frota de veículos e o crescimento populacional entre o período de 2001 a 2021, na cidade de Londrina, Paraná. Esses dados foram organizados em tabelas e gráficos de dispersão, conforme o Quadro 45.

Quadro 45 - Escolha do tema, formulação do problema e coleta de dados na atividade Frota de Veículos

Análise da taxa da frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR – GM4

Escolha do tema

Atualmente estimar a frota veicular de uma cidade tem sido uma preocupação tanto dos engenheiros de trânsito quanto da própria população, que cada vez mais se encontra em congestionamentos devido à grande quantidade de veículos nas ruas e avenidas.
Em Londrina/PR, segundo o Departamento Estadual de Trânsito (DETRAN-PR), o número de veículos cresceu de 163.089 em 2001 para 399.143, em 2021, isto é, duplicou sua quantidade em 20 anos. Já a população da cidade, segundo o IBGE, cresceu em 125.999, nesse mesmo período.

Formulação do problema

Em que ano a taxa de veículo por habitante será igual a 1?

Coleta de dados

Tabela 1 – Dados sobre a frota de veículos em Londrina/PR

n	Ano	Frota de Veículos - Total
0	2001	163.089
1	2002	168.817
2	2003	179.082
3	2004	189.967
4	2005	210.257
5	2006	220.637
6	2007	235.457
7	2008	251.349
17	2018	380.745
18	2019	388.130
19	2020	392.823
20	2021	399.143

Fonte: IPARDES (2021)

Tabela 2 – Dados sobre a população em Londrina/PR

n	Ano	População Estimada - IBGE
0	2001	454.871
1	2002	460.909
2	2003	467.334
3	2004	480.822
4	2005	488.287
5	2006	495.696
6	2007	-
7	2008	505.184
17	2018	563.943
18	2019	569.733
19	2020	575.377
20	2021	580.870

Fonte: IPARDES (2021)

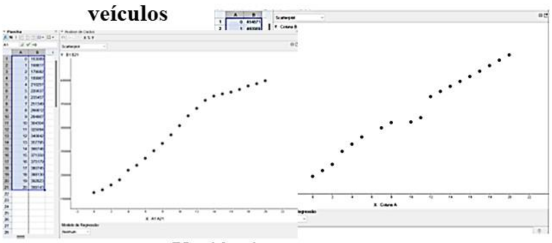
Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$.

Na matematização, os estudantes selecionaram variáveis, realizaram simplificações e formularam hipóteses acerca do fenômeno, por meio de gráficos de dispersão traçados do GeoGebra, a respeito da frota de veículos e da população de 2001 a 2021 na cidade de Londrina, e de informações fornecidas em estudos sobre dinâmicas populacionais, como as hipóteses utilizadas em modelos populacionais clássicos.

As hipóteses formuladas consideram cenários hipotéticos para o comportamento da frota de veículos e da população no decorrer do tempo na cidade de Londrina, conforme o Quadro 46.

Quadro 46 - Matematização da atividade Frota de Veículos

Gráfico da frota de veículos | **Gráfico da população**



Variáveis

P(t): população de Londrina/PR no decorrer do tempo t
t: tempo (em anos)
Q(t): frota de veículos em Londrina/PR no decorrer do tempo t
n: variável auxiliar que expressa unidades de tempo tal que n = t-2001
T(t) = Q(t) / P(t)

Simplificações

Desconsideraremos os dados da população nos anos de 2007 e 2010.

Hipóteses

H: a variação da população em relação ao tempo é proporcional à população presente e a população de certa espécie, vivendo num determinado meio, atinge um limite máximo sustentável, isto é, a população tende a se estabilizar a partir de um determinado tempo (modelo logístico de Verhulst).

H_1: a taxa de variação da frota em relação ao tempo é proporcional a diferença entre a frota limite (assíntota) e a frota presente. A frota de veículos tende a se estabilizar com o passar do tempo, porém não possui um ponto de inflexão aparente (modelo exponencial assintótico).

H_2: a quantidade de veículos cresce indefinidamente com o passar do tempo em uma razão geométrica.

H_3: a taxa de variação da quantidade de veículos por habitante ($T = \frac{Q}{P}$) em relação ao tempo é proporcional a diferença entre a taxa limiteL_2 (assíntota) e a taxa T presente. A taxa de veículo por habitante tende a se estabilizar com o passar do tempo, porém não possui um ponto de inflexão aparente (modelo exponencial assintótico).

Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$.

Na construção dos modelos matemáticos, os estudantes realizaram três resoluções possíveis. A primeira resolução considera o modelo populacional de Verhulst para o crescimento populacional e um crescimento exponencial assintótico para a frota de veículos na cidade de Londrina. Para construir os dois modelos, usaram o método de Ford-Walford com a finalidade de obter os valores das assíntotas, com o auxílio do CurveExpert e GeoGebra na realização de ajustes de curvas (Quadro 47).

Quadro 47 - Modelos matemáticos obtidos na resolução 1 na atividade Frota de Veículos

Resolução 1 – Frota de Veículos

Modelos matemáticos obtidos

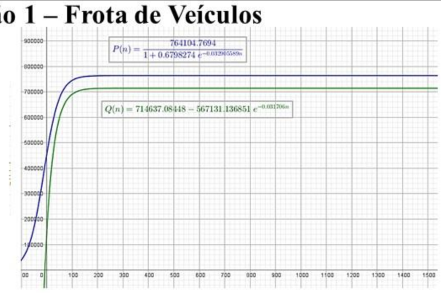
$$P(n) = \frac{764.104,7694}{1 + (0,6798274)e^{-0,032905589n}}$$

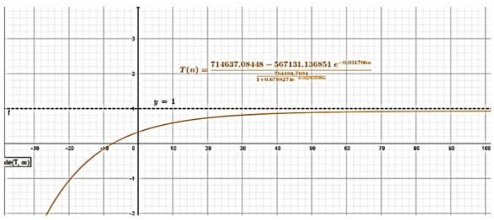
$$Q(n) = 714.637,08448 - 567131,136851e^{-0,031706n}$$

Fazendo a divisão dos modelos Q(n) e P(n):

$$T_1(n) = \frac{714.637,08448 - 567131,136851e^{-0,031706n}}{\frac{764.104,7694}{1 + (0,6798274)e^{-0,032905589n}}}$$

Assim, a taxa de veículo por habitante se aproxima muito de 1, entretanto não alcança tal valor. Logo, não haverá um ano em que a taxa de veículo por habitante será igual a 1.
A assíntota da taxa veículo por habitante é dada por: $\frac{714.637,08448}{764.104,7694} = 0,935260599$





Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$.

Como resultado da resolução 1, os estudantes observaram que a taxa de veículos por habitante nunca será igual a 1, pois o modelo resultante é assintótico, com o valor da assíntota igual a 0,935260599.

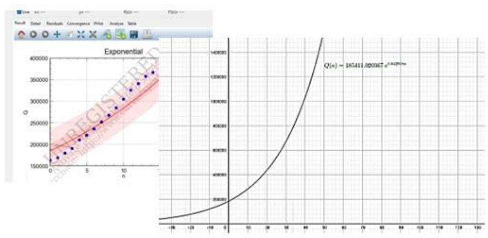
Na resolução 2, os estudantes consideraram o mesmo modelo para a população na cidade de Londrina obtido na resolução 1 e construíram um modelo exponencial crescente para descrever a frota de veículos na cidade. Para essa construção, utilizaram o Curve Expert para realizar um ajuste exponencial aos dados coletados da frota de veículos. Como resultado, determinaram que a taxa de veículo por habitante será igual a 1 na cidade de Londrina no ano de 2028 (Quadro 48).

Quadro 48 - Modelos matemáticos obtidos na resolução 2 na atividade Frota de Veículos

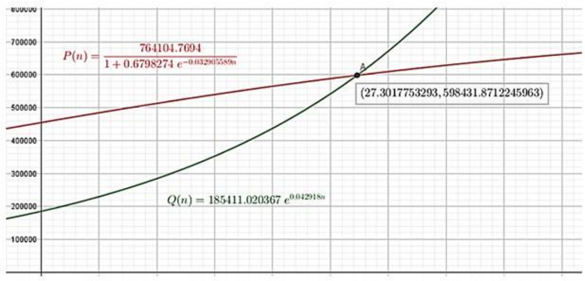
Resolução 2

Modelo da frota de veículos

$$Q(n) = 185411{,}020367e^{0{,}042918n}$$



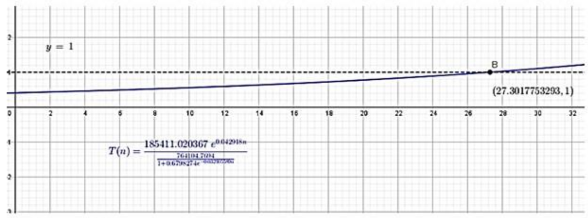
Intersecção entre o modelo da população e o modelo da frota de veículos



Fazendo a divisão dos modelos Q(n) e P(n) para analisar a taxa de veículo por habitante:

$$T_2(n) = \frac{185411{,}020367e^{0{,}042918n}}{\frac{764.104{,}7694}{1+(0{,}6798274)e^{-0{,}032905589n}}}$$

Logo, nesse cenário, em 2028 a taxa de veículo por habitante em Londrina será igual a 1.



Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$.

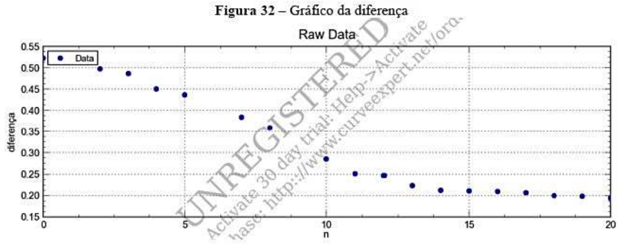
Na resolução 3, os estudantes construíram um modelo matemático exponencial assintótico da taxa de veículos por habitante, realizando um ajuste de curva aos pares ordenados $(n, \frac{Q_n}{P_n})$ formados a partir dos dados coletados da frota de veículos (Q_n) e da população (P_n) na cidade de Londrina de 2001 a 2021. Em um primeiro momento, utilizaram o método de Ford-Walford para determinar o valor da assíntota (L_3) e, em seguida, realizaram um ajuste exponencial aos pares ordenados $(n, L_3 - T_n)$ com o auxílio do *software* Curve Expert. Como resultado, concluíram que a taxa de veículos por habitante nunca será igual a 1, considerando-se que esse modelo tem uma assíntota com valor de 0,88125438 (Quadro 49).

Quadro 49 - Modelos matemáticos obtidos na resolução 3 na atividade Frota de Veículos

Resolução 3

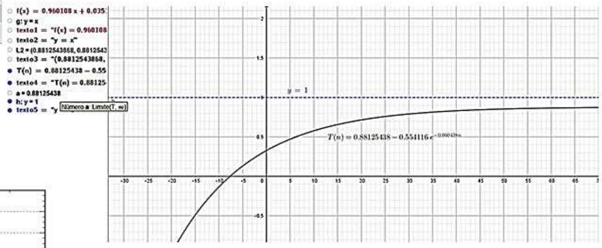
n	Ano	Frota de Veículos (Q)	População Estimada (P)	$T_3 = \frac{Q}{P}$
0	2001	163.089	454.871	0,358539
1	2002	168.817	460.909	0,366270
2	2003	179.082	467.334	0,383199
3	2004	189.967	480.822	0,395088
4	2005	210.257	488.287	0,430601
5	2006	220.637	495.696	0,445105
18	2019	388.130	569.733	0,681249
19	2020	392.823	575.377	0,682723
20	2021	399.143	580.870	0,687147

Figura 32 – Gráfico da diferença



Nessa resolução, o modelo obtido foi:

$$T_3(n) = 0,88125438 - 0,554116e^{-0,060438n}$$



Veja que $T_3 \to 1$, isto é, a taxa de veículo por habitante se aproxima muito de 1, entretanto não alcança tal valor, já que o limite máximo a ser alcançado é L_3=0,88125438. Assim, considerando o modelo aplicado, não haverá um ano em que a taxa de veículo por habitante será igual a 1 na cidade de Londrina.

Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$.

Na validação, os estudantes validaram os dois modelos matemáticos da taxa de veículos por habitante e da população na cidade de Londrina em relação ao tempo e os dois modelos construídos para a frota de veículos, confrontando os resultados numéricos obtidos com esses modelos e os dados coletados e calculando o erro percentual (Quadro 50).

Quadro 50 - Validação dos modelos matemáticos na atividade Frota de veículos

Exemplo de cálculo do erro percentual

n	Ano	População P	Popul. pelo Modelo	Erro Percentual
0	2001	454.871	454.871,0000801273	1,76153E-08
1	2002	460.909	460.908,9999115743	1,91851E-08
2	2003	467.334	466.906,1333216747	0,091554793
3	2004	480.822	472.859,6012390073	1,65599718
4	2005	488.287	478.766,69210976	1,949736096
5	2006	495.696	484.624,7862545077	2,233468445
6	2007	-	490.431,3598516319	-
7	2008	505.184	496.183,988538155	1,781531375
8	2009	510.707	501.880,3506212596	1,728319639
9	2010	-	507.518,2298962352	-
10	2011	511.279	513.095,5180690207	0,355289004
11	2012	515.707	518.610,2167838629	0,562958576
12	2013	537.566	524.060,4392588832	2,51235397
13	2014	543.003	529.444,4115345031	2,496963823
14	2015	548.249	534.760,4733417188	2,460292068
15	2016	553.393	540.007,0785991264	2,418881591
16	2017	558.439	545.182,795549355	2,373796323
17	2018	563.943	550.286,3065471733	2,421644289
18	2019	569.733	555.316,4075129835	2,53041205
19	2020	575.377	560.272,0070666885	2,625234052
20	2021	580.870	565.152,1253580363	2,705919507

Validação dos modelos da taxa de veículo por habitante

Verifica-se que o modelo 2 (T2) é o que apresenta o maior erro percentual, não sendo, portanto, o mais adequado para modelar os dados da taxa de veículo por habitante.
O modelo 3 se mostra melhor, já que possui erros percentuais menores.

Validação do modelo da população

Analisando as informações podemos observar que são relativamente aceitáveis e coerentes e, portanto, acreditamos que o modelo obtido para a população se mostra bastante adequado para descrever os dados.

Validação dos modelos da frota de veículos

O modelo obtido na Resolução 1 é mais adequado para descrever os dados da frota de veículos na cidade de Londrina, já que o erro percentual é relativamente menor se comparado ao modelo obtido na Resolução 2.

Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$.

Na interpretação dos resultados, características do fenômeno e notícias foram utilizadas como base. Nas resoluções 1 e 3 os estudantes obtiveram como resultado que não haverá um ano em que a taxa de veículos por habitante será igual a 1 na cidade de Londrina. Na resolução 2, os estudantes encontraram que tal evento ocorrerá no ano de 2018.

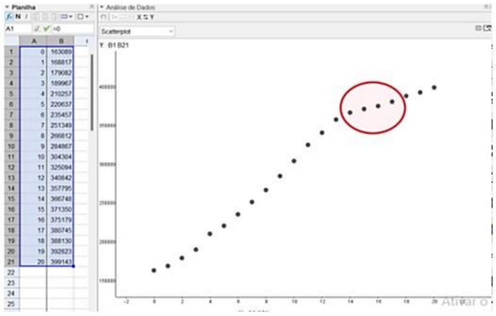
Com base nas características do fenômeno, julgaram que o resultado obtido na resolução 2 não é condizente, dado que a frota de veículos cresceria indefinidamente de acordo com o modelo encontrado nessa resolução. Como justificativa, consideraram que já existem medidas sendo implantadas para reduzir o número de veículos em circulação, como o incentivo do uso de bicicletas e o uso cada vez maior de carros de aplicativo.

Outra justificativa utilizada para indicar que os modelos assintóticos são mais coerentes para a frota de veículos foi a de que a taxa de crescimento do número de veículos por habitante tende a diminuir, de acordo com análise gráfica (Quadro 51).

Quadro 51 - Interpretação dos resultados na atividade Frota de Veículos

Interpretação dos resultados

Observando os próprios dados Q/P, obtidos pela divisão dos dados de Q e P vemos que a taxa de veículo por habitante realmente parece estar reduzindo sua taxa de crescimento, tendendo a um limite, isso pois a população, mas principalmente a frota de veículos, tem reduzido sua taxa de crescimento.
Porém, se analisarmos o gráfico dos dados da frota vemos que esse decrescimento na taxa de crescimento do número de veículos é mais evidente a partir de 2016 e 2017. Anterior a isso, os dados evidenciavam uma tendência de crescimento exponencial.



Verificamos que vários fatores influenciam na taxa de crescimento da frota e da população. Assim, os modelos assintóticos determinados parecem ser mais condizentes com a realidade. Em ambos os casos, a conclusão foi que não haveria um ano em que a taxa de veículo por habitante na cidade seria igual a 1.
Se analisarmos o último dado que temos, isto é, de 2021, a taxa de veículo por habitante era de 0,687147. Em 2015, essa mesma taxa era de 0,668944. Assim, em 6 anos houve um aumento de 0,018203 na taxa de veículo por habitante. Assim, considerando que a taxa de veículo por habitante tende a reduzir sua taxa de crescimento, não seria possível considerar que já em 2028 haveria um veículo por habitante na cidade.

Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$.

Em síntese, no desenvolvimento da atividade *Análise da taxa da frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR*, os estudantes estudaram um problema importante em diferentes campos que tratam da urbanização e da otimização do trânsito. Ao resolver o problema, três resoluções diferentes foram realizadas a partir de diferentes hipóteses sobre o comportamento da frota de veículos e da população na cidade de Londrina no decorrer do tempo. Ao interpretar os resultados e validar os modelos matemáticos, os estudantes precisaram avaliar qual resolução faz sentido em relação as características do fenômeno modelado e realizaram inferências sobre as implicações de cada modelo para o comportamento do fenômeno no futuro.

4.2.2.6 Identificação de jogos de linguagem que constituem aprendizagem na atividade Frota de Veículos

Na atividade *Análise da taxa da frota de veículo por habitante na cidade de Londrina/PR*, descreve-se nessa subseção os jogos de linguagem associados à aprendizagem a partir das ações dos estudantes do grupo GM4 em três fases: inteiração com a situação-problema, construção do modelo matemático e análise do modelo matemático. Essas fases levam em consideração as ações características do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, conforme a literatura (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, Almeida, 2022).

Na *inteiração com a situação-problema*, foram identificados os jogos de linguagem: escolha de um tema passível de ser modelado, compreensão da situação da realidade, coleta de informações e formulação de um problema.

Na *escolha de um tema passível de ser modelado*, diferentes ideias surgiram durante as discussões dos estudantes, considerando suas experiências anteriores com outras atividades de modelagem matemática ou interesses pessoais. Essas ideias foram pouco a pouco sendo abandonadas, ao perceberem a falta de disponibilidade de informações e ao considerarem que já sabiam como resolver, o que não levaria a um problema genuíno. Em outras palavras, os estudantes julgaram que esses temas não são passíveis de serem modelados, como mostra o diálogo:

> E16: A gente tem de pegar uma coisa contínua né, que tem variação do tempo e que tem dados.
> E17: Que dá para a gente coletar dados, ou dados experimentais.
> E17: Eu sempre penso no problema da pipoca. O da pipoca era um clássico.
> E20: O da drenagem também é legal né, mas já fizeram.
> E17: Eu gosto muito do da pipoca, acho que é porque tinha experimento, por isso fiquei muito interessada. Fiz um monte de pipoca, queimei várias.
> E17: Talvez, pensar alguma coisa do tipo.
> E16: Eu acho que a gente podia fazer algo em relação a velocidade máxima, sabe... que tem no radar.
> E17: Nossa, é verdade.
> E17: Mas o que sobre o radar?
> E16: Não sei o que exatamente, mas não tem várias formas de radar? Um que é a velocidade instantânea.
> E19: Calcula pela distância NÉ.
> E17: O que tem a caixinha embaixo da câmera é instantânea. O que tem a faixa no chão é esse que calcula por meio da distância.
> E15: Os dados ou pode ser testado, ou a gente pode pegar em uma tabela né, que deve ter em algum lugar. O problema é que não dá para testar no radar né, por exemplo, hoje vou passar em um radar para ver o que acontece, não dá né.
> E20: Qual é o problema daí?

> E17: Como posso não tomar multa no radar, passando correndo.
> E19: Quão rápido você tem que passar no radar para ele não te pegar.
> E16: A gente pode pegar esse que é o da faixa, igual o que o professor de análise falou, e analisar como que a velocidade.
> E17: É, mas não vamos ter dados né.
> E20: E isso a gente já sabe como fazer né, é só fazer a velocidade média ($C_2\_D\_MM_6\_GM4$).

Ao perceberem que uma determinada situação não é passível de ser modelada e fornecerem justificativas, os estudantes fazem uma antecipação do fazer modelagem matemática, lançando um olhar prospectivo sobre o desenvolvimento da atividade (Almeida, 2018; Galbraith; Stillman; Brown, 2017). Após não encontrarem informações suficientes para trabalhar o tema radar de trânsito, optaram pelo tema da frota de veículos, tendo inicialmente como justificativa a quantidade de dados disponíveis e, posteriormente, considerando a relevância do tema para a questão da urbanização de uma cidade.

> E20: Então na aula a gente estava discutindo e a E16 sugeriu falar de radar, algo nesse sentido. Mas ai fomos pesquisar e não achamos muitas informações sobre radar.
> E16: A gente foi procurar, mas não encontramos muitos dados. Ou era uma coisa muito difícil ou era muito fácil, porque tem muitas particularidades do radar. Aí tentamos pesquisar sobre infrações de trânsito no site do IBGE e algo mais específico sobre a velocidade, mas é difícil encontrar esses dados específicos da velocidade, entendeu? Ficou muito amplo. Só que aí pesquisando, eu e a E20 estávamos vendo e lá no IBGE tem vários dados legais e a gente achou sobre a frota de veículos. Lá, eles têm dados sobre a frota em todos os munícipios. Aí a gente pensou e se a gente fizesse sobre a frota de veículos em londrina.
> PP: Tá, mas por que é importante estudar a frota de veículos?
> E20: porque está crescendo o número de veículos né e está tendo muito trânsito né.
> E17: mobilidade urbana né eu acho.
> E16: E tem cidades que já fazem rodízio de veículos, quando será que a gente vai precisar fazer isso aqui na cidade de Londrina.
> E20: É essa importância no caso ($C_2\_V\_MM_6\_GM4$).

Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem envolve a capacidade de perceber se o tema escolhido é passível de ser modelado, antecipando possíveis desdobramentos do fazer modelagem matemática, e a formulação de uma justificativa aceitável a respeito da relevância do tema. Isso requer uma familiarização com atividades de modelagem matemática (Almeida; Dias, 2004).

Na *compreensão da situação da realidade*, os estudantes buscaram compreender que fatores relacionados à temática seriam considerados para o desenvolvimento da atividade. Para tanto, consideraram como ponto de partida uma problemática envolvida nas discussões sobre mobilidade urbana, envolvendo notícias e a percepção pessoal acerca dos congestionamentos gerados pela quantidade de veículos em circulação na cidade de Londrina. Ao buscarem informações sobre o tema, encontram que tanto a população, quanto a frota de veículos apresentam um crescimento de 2001 a 2021. De posse dessa informação, realizaram um “recorte” da situação da realidade, simplificando-a e selecionando a população e a frota de veículos como fatores relevantes para investigar o tema.

> E16: A nossa ideia final foi essa, fazer a análise do crescimento da frota de veículos e comparar com o crescimento populacional da cidade de Londrina.
> PR: Qual é o problema exatamente, os dados que coletaram?
> E16: então, a gente tem visto bastante congestionamento né, por isso que tem um monte de notícia falando da zona azul, que querem colocar na gleba. A gente vê que já tem bastante problema de mobilidade urbana.
> E17: Isso, na nossa reunião de quarta passada, a gente começou a falar da frota de veículos e a gente está olhando para algo que melhorasse a mobilidade.
> E16: É então a gente está vendo que a população está crescendo e frota de veículos também.
> PR: como é que vocês realizaram essas estimativas para a população? Usaram o que?
> E16: No site do IBGE tem a população e do Detran tem a frota. Ai a gente pegou do IPARDES que coloca os dados tanto da população quanto da frota ($C_2\_D\_MM_6\_GM4$).

Nesse jogo de linguagem, os estudantes fazem uso de uma técnica importante do fazer modelagem matemática que é a de simplificar a situação, tendo em conta que esta tem “tantas facetas que você não pode levar tudo em consideração” (Pollak, 2012). A aprendizagem aqui sinaliza o uso de conhecimentos e informações acerca da situação da realidade e à capacidade de simplificá-la, tornando-a passível de ser matematizada.

No jogo de linguagem *coleta de informações*, dados quantitativos prontos foram pesquisados a respeito da frota de veículos e da população na cidade de Londrina de 2001 a 2021 em fontes confiáveis, IBGE e IPARDES, organizados na forma de tabelas e gráficos para facilitar o seu tratamento. A aprendizagem nesse jogo de linguagem envolve ser capaz de identificar que informações devem ser coletadas, como e onde coletar essas informações. Trata-se do domínio de uma técnica importante do fazer modelagem matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Niss; Blum, 2020).

Na *formulação do problema*, o seguinte problema foi formulado: “Em que ano a taxa de veículo por habitante será igual a 1?”, cujo objetivo foi estimar em que ano a frota de veículos se igualaria a população na cidade de Londrina. Ao formularem esse problema, os estudantes delineiam a finalidade da atividade, que pode ser caracterizada como sendo a de realizar uma previsão acerca da situação da realidade. Essa finalidade está intimamente relacionada com a compreensão da situação da realidade, uma vez que os estudantes consideraram que um aspecto que influencia diretamente a mobilidade urbana é a taxa de veículo por habitante na cidade.

Outro aspecto que foi levado em consideração na formulação de um problema foram os possíveis conhecimentos matemáticos que seriam necessários para resolvê-lo. Uma estudante integrante do grupo sugeriu trabalhar com a teoria dos grafos e formular um problema a partir dessa teoria. Contudo, os outros integrantes mostraram não conhecer essa teoria e chegaram a um acordo de formular um problema que fosse passível de ser resolvido de acordo com a matemática que já conheciam, o que revela a capacidade dos estudantes de antecipar possíveis encaminhamentos matemáticos para um determinado problema. Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem está associada ao uso de uma técnica para formular problemas a partir de uma situação da realidade, tendo como base seus conhecimentos acerca dessa situação e os seus conhecimentos matemáticos.

Na *construção do modelo matemático*, os jogos de linguagem envolvidos nas ações dos estudantes foram: análise do comportamento dos dados, formulação de diferentes hipóteses acerca do comportamento das variáveis, tradução das hipóteses escritas em uma linguagem natural para uma linguagem matemática, elaboração de diferentes resoluções matemáticas e obtenção de respostas matemáticas para o problema. Os dois primeiros estão associados à matematização.

Em um primeiro momento, os estudantes realizaram uma *análise do comportamento dos dados* nos gráficos construídos sobre a frota de veículos e da população em relação ao tempo, que desencadeou na elaboração de uma estratégia inicial para construir possíveis modelos matemáticos que pudessem auxiliar na resolução do problema. Essa estratégia foi realizar ajustes de curvas aos dados, utilizando o Curve Expert, considerando três modelos matemáticos: um linear, um exponencial e um logístico (modelo de Verhulst para a dinâmica populacional). Contudo, após a intervenção da professora-regente, os estudantes mudaram a estratégia e passaram a considerar o método de Ford-Walford para calcular o valor da assíntota presente no modelo de Verhulst.

> PR: E qual modelo vocês usaram para estimar a população?
> E16: A gente fez o gráfico dos dois, da frota de veículos e da população e olhando os dados a gente pensou em três modelos principais: o linear, o exponencial e o de Verhulst né. Aí nossa ideia foi colocar no curve para calcular o coeficiente de correlação entre eles e os dados.
> PR: Acho que assim, usar o curve para ajustar não é muito legal né, porque já tem modelos clássicos né.
> E16: Mas ele tem o modelo logístico né, porque tem a assíntota.
> PR: Vocês podem calcular né, fazer a EDO e para determinar a assíntota vocês podem usar Ford-Walford. Ai depois vocês podem usar a opção que quiserem: ou utilizem a assíntota e coloca ela na EDO de Verhulst ou vocês terminam a modelagem usando o método de Ford-Walford. Mas, para a população o clássico é o Verhulst, então vocês podem usar o método de Ford-Walford e depois estimar a população. E para os automóveis, não sei se tem o ponto de inflexão, então eu acho que vocês podem achar a assíntota e montar outro modelo assintótico.
> PP: É, acho que a frota não vai crescer infinitamente, também tem assíntota.

Nesse diálogo, a professora-regente e o professor-pesquisador buscaram mostrar aos estudantes aspectos da situação da realidade não considerados por eles, como a necessidade de considerar modelos clássicos para a população e o comportamento dos dados relativos à frota de veículos como um comportamento assintótico. Essa persuasão os levou, em relação à aprendizagem, a verem de um modo diferente o comportamento do fenômeno, ao levar em consideração aspectos que não puderam ser observados apenas na observação do comportamento dos dados.

Esse outro modo de ver desencadeou na *formulação de diferentes hipóteses acerca do comportamento das variáveis*, em que três cenários hipotéticos foram considerados, cujas hipóteses emergiriam de pressupostos de modelos clássicos, como é o caso, por exemplo, do modelo populacional de Verhulst, que se baseia na hipótese: "a variação da população em relação ao tempo é proporcional à população presente de certa espécie, vivendo num determinado meio, atinge um limite máximo sustentável, isto é, a população tende a se estabilizar a partir de um determinado tempo (modelo logístico de Verhulst)" ($C_2\_D\_MM_6\_GM4$).

Dessa maneira, pode-se dizer que os estudantes pensaram no modelo matemático antes da formulação de hipóteses. A bem da verdade, as hipóteses decorreram da percepção de possíveis modelos que poderiam ser usados para resolver o problema. Essa percepção vai ao encontro do que Niss (2010) denomina de antecipação implementada com um aspecto da matematização, em que os estudantes antecipam o domínio matemático que pode ser usado para elaborar um modelo matemático acerca da situação da realidade e resolver as questões colocadas sobre ela. Dessa forma, nessa atividade, a formulação de hipóteses se fundamenta não somente nas características do fenômeno, mas também nos conhecimentos que os estudantes têm de modelos clássicos. A aprendizagem nesse jogo de linguagem se mostra na aquisição de um modo de ver a situação-problema, a partir de uma estruturação matemática constituída com base em pressupostos de modelos matemáticos clássicos.

Com base na formulação das hipóteses, a *tradução das hipóteses escritas em uma linguagem natural para uma linguagem matemática* foi realizada com o uso de EDOs como linguagem matemática, conforme o Quadro 52.

Quadro 52 - Tradução das hipóteses em linguagem matemática na atividade Frota de Veículos

Tradução das hipóteses em linguagem matemática

H: a variação da população em relação ao tempo é proporcional à população presente e a população de certa espécie, vivendo num determinado meio, atinge um limite máximo sustentável, isto é, a população tende a se estabilizar a partir de um determinado tempo (modelo logístico de Verhulst). ➡ $\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP\left(1 - \dfrac{P}{L}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$

H_1: a taxa de variação da frota em relação ao tempo é proporcional a diferença entre a frota limite (assíntota) e a frota presente. A frota de veículos tende a se estabilizar com o passar do tempo, porém não possui um ponto de inflexão aparente (modelo exponencial assintótico). ➡ $\dfrac{dQ}{dn} = k(L - Q)$

H_2: a quantidade de veículos cresce indefinidamente com o passar do tempo em uma razão geométrica. ➡ $\dfrac{dQ}{dn} = kQ$

H3: a taxa de variação da quantidade de veículos por habitante ($T = \frac{Q}{P}$) em relação ao tempo é proporcional a diferença entre a taxa limite L_2(assíntota) e a taxa T presente. A taxa de veículo por habitante tende a se estabilizar com o passar do tempo, porém não possui um ponto de inflexão aparente (modelo exponencial assintótico). ➡ $\dfrac{dT}{dn} = k(L_2 - T)$

Fonte: $C_2\_RE\_MM_6\_GM4$

Nessa tradução os estudantes usam o conceito de derivada como taxa de variação instantânea (da população, da frota de veículos e da taxa de veículos por habitante) e o conceito de proporcionalidade e o de assíntota, como um limitante do comportamento dos dados. Ao usar esses conceitos, os estudantes seguem regras matemáticas que possibilitam expressar as hipóteses em EDOs. Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem se evidencia no uso de regras matemáticas para traduzir as hipóteses em uma linguagem matemática.

Na *elaboração de diferentes resoluções matemáticas*, os estudantes realizaram três resoluções diferentes. A primeira resolução consistiu na obtenção de um modelo logístico para a população e um modelo exponencial assintótico para a frota de veículos. Para isso, resolveram as EDOs associadas à cada modelo, utilizando o método para resolução de EDOs de variáveis separáveis e o método de Ford-Walford para obtenção dos valores das assíntotas. Os valores dos parâmetros do modelo logístico foram obtidos a partir da substituição dos dados na solução geral da EDO e para o modelo exponencial assintótico, após obterem o valor da assíntota, os estudantes recorreram à um ajuste de curvas realizado no *software* Curve Expert.

Na segunda resolução, utilizaram o mesmo modelo logístico para a população da primeira resolução e construíram um modelo exponencial para a frota de veículos. Esse modelo exponencial foi construído a partir da resolução da EDO associada à hipótese H_2 e os parâmetros foram obtidos por meio de um ajuste de curvas realizado no Curve Expert.

Na terceira resolução, construíram pares ordenados que relacionam a variável auxiliar n, sendo $n = t - 2002$ (com t indicando o ano), e a razão entre a frota de veículos Q_n e a população P_n, que indica a taxa de veículos por habitante ($T_n = \frac{Q_n}{P_n}$). Em seguida, resolveram a EDO formulada a partir da hipótese H_3 e obtiveram um modelo exponencial assintótico, cujos parâmetros foram obtidos também por ajustes de curvas aos pares ordenados (n, T_n), por meio do Curve Expert.

Nesse jogo de linguagem, os estudantes usam regras matemáticas para resolver EDOs, para obter o valor das assíntotas e para ajustar curvas em um *software*. Ao fazer isso, se envolvem em um jogo de linguagem matemático e a aprendizagem se mostra no uso de regras matemáticas para construir modelos matemáticos, de acordo com um determinado domínio matemático.

Na *obtenção de respostas matemáticas para o problema*, os estudantes prosseguiram em uma estratégia parecida para as três resoluções matemáticas: construir os gráficos dos modelos matemáticos no *software* GeoGebra; plotar o ponto de intersecção entre as curvas; construir uma função T(n) da taxa de veículos por habitante em relação ao tempo, a partir da razão entre os modelos matemáticos de $Q(n)$ e $P(n)$ e seu respectivo gráfico; plotar o ponto em que $T = 1$ no gráfico de $T(n)$ e obter o valor de n para essa ordenada, conforme os Quadros 46, 47 e 48 e o diálogo a seguir:

> E16: Para o primeiro cenário, a gente considerou ambos os modelos, para a população e para a frota, assintóticos, aí para a população a gente usou o Verhulst e para a frota um modelo exponencial assintótico. O modelo que a gente encontro foi o P(n) ai e o Q(n) [*apontando para os registros escritos dos modelos matemáticos nos slides*]. Fazendo a razão das duas funções a gente vê que taxa de veículo por habitante se aproxima de 1 mas nunca será 1, na verdade, se fazermos o limite daquela função da taxa vai dar 0,9 alguma coisa.
> E16: Para o segundo cenário, a gente considerou que a frota vai crescer indefinidamente e a gente considerou o modelo exponencial. Esse modelo exponencial foi considerado a partir do comportamento dos dados, em que a gente analisou a variação e obteve que o exponencial é melhor que o linear. Então a gente determinou esse modelo exponencial para a frota de veículos, mas a da população o modelo não alterou. Ai a gente obteve uma intersecção e fazendo a razão entre as duas funções a gente encontrou que em 2028 a taxa de veículo por habitantes será igual a 1.
> PR: Ou seja, que o número de habitantes será igual ao número de veículos.
> E15: No terceiro cenário, a gente fez a divisão dos dados da população pela frota e a gente encontrou esse modelo [*apontando para o registro escrito do modelo matemático de $T(n)$ na terceira resolução*] e a gente obteve que não vai ter um ano que a taxa de veículos por habitante será igual a um, a gente verifica isso também por limite ($C_2\_D\_MM_6\_GM4$).

Como respostas para o problema, concluíram que nas resoluções 1 e 3, a taxa de veículos por habitante não atingirá 1. A justificativa se deu utilizando o limite das funções construídas e pela percepção de que o valor das assíntotas nos modelos construídos para a taxa de veículos por habitante na primeira e na terceira resolução são 0,935260599 e 0,88125438, respectivamente. Já na segunda resolução, os estudantes traçaram o gráfico das funções para a população e para a frota e determinaram o ponto de intersecção entre as duas curvas, o que foi possível a partir das características do modelo matemático para a frota de veículos, que é uma função exponencial crescente e, portanto, crescerá indefinidamente.

Ao buscar responder matematicamente o problema, os três modelos matemáticos para a taxa de veículos por habitante ($T_1(n)$, $T_2(n)$ e $T_3(n)$) obtidos foram utilizados. Nesse jogo de linguagem, a aprendizagem se caracteriza no uso de regras matemáticas para resolver o problema, em uma linguagem matemática. Nesse caso, as regras envolveram o uso de limites de uma função e a determinação de pontos de intersecção entre duas funções.

Na *análise do modelo matemático*, os estudantes se envolverem nos jogos de linguagem: avaliação quantitativa, avaliação comparativa e avaliação qualitativa.

Na *avaliação quantitativa*, confrontaram os resultados quantitativos obtidos com os modelos matemáticos (três modelos matemáticos para a taxa de veículos por habitante, dois para a frota de veículos em relação ao tempo e um para a população em relação ao tempo, na cidade de Londrina) com os dados coletados incialmente no IBGE e no IPARDES. Com esse confronto, recorreram ao cálculo dos erros percentuais entre tais resultados, validando os modelos matemáticos com base nesse critério. Nesse jogo de linguagem, as ações dos estudantes indicam a capacidade de avaliar a validade de um modelo matemático em relação ao fenômeno, com base em critérios quantitativos.

Na *avaliação comparativa*, compararam os modelos matemáticos obtidos entre si e indicaram aquele que é mais razoável para realizar o fenômeno, tendo como critério de comparação os erros percentuais obtidos na avaliação quantitativa.

> E15: Para validação do modelo, a gente comparou os dados apresentados com os dados obtidos com os três modelos obtidos nas três resoluções [*para a taxa de veículos por habitante* $T_1(n)$, T_2 (n) *e* $T_3(n)$] e cálculo do erro percentual.
> E16: Esses valores que estão em vermelho, são os que apresentam maior erro percentual. A gente percebeu que o modelo 2 é o que apresenta maior erro percentual, portanto não é adequado. Ai comparando o modelo 1 com o modelo 3 e nós consideramos que modelo 3 é o mais adequado porque tem um erro percentual menor. [...]
> Para melhor analisar, a gente comparou os dados da tabela 1 e 2 para população também. E aí a gente olhando os erros para população, a gente viu que o modelo se mostra adequado, pois os erros percentuais são aceitáveis. [...]
> A gente validou da mesma forma os dois modelos para a frota e obtivemos que o modelo 1 da frota será mais adequado, pois tem um erro menor ($C_2\_D\_MM_6\_GM4$).

Nesse jogo de linguagem, as ações dos estudantes sinalizam para a capacidade de comparar diferentes modelos matemáticos construídos para um mesmo fenômeno e avaliar qual deles é mais adequado para investigar esse fenômeno, com base em critérios objetivos, que nesse caso, é o erro percentual entre os dados coletados e os resultados obtidos com os modelos matemáticos.

Na *avaliação qualitativa dos modelos matemáticos*, realizaram uma análise das propriedades envolvidas na estrutura matemática subjacente a cada modelo matemático, indicando possíveis implicações que podem ser geradas na adoção desses modelos para realizar previsões acerca da taxa de veículos por habitantes na cidade de Londrina e tomando uma decisão sobre qual modelo matemático seria mais adequado para essa finalidade, tendo como pano de fundo as características do fenômeno. Ao analisarem o comportamento dos modelos matemáticos em relação ao tempo e ao lerem algumas notícias da cidade que mostram a implementação de políticas públicas com o objetivo de reduzir o número de veículos em circulação, como a implementação de ciclovias, os estudantes indicaram que não faz sentido considerar que a frota de veículos irá crescer indefinidamente. Essa percepção foi complementada com uma análise do gráfico dos dados da frota de veículos que mostra um intervalo de tempo para o qual ocorre uma redução na taxa de crescimento de veículos no decorrer do tempo.

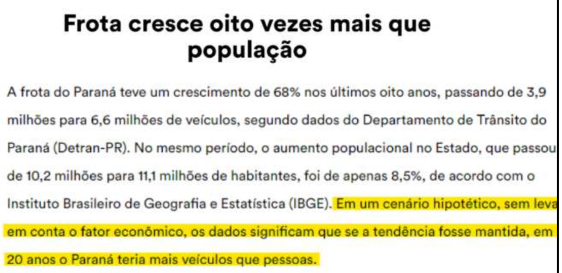
No início dessa atividade, na inteiração com a situação-problema, os estudantes haviam indicado uma tendência de crescimento exponencial da Frota de Veículos, com base em notícias que previam que a frota estava crescendo oito vezes mais que a população na cidade de Londrina, o que sinalizava para um futuro ponto de intersecção entre a frota e a população e, consequentemente, para um instante futuro no qual a taxa de veículos por habitantes seria um. Contudo, ao analisarem o gráfico, perceberam que essa tendência se mostrava no período anterior a 2016, data em que a notícia foi publicada, e que posteriormente a esse período, o crescimento da taxa da frota de veículo em relação ao tempo tende a diminuir. Com isso, eles concluíram que as resoluções que levaram a construção de modelos assintóticos são mais adequadas para realizar previsões sobre o fenômeno, o que resulta na não possibilidade de determinar um ano, em que a taxa de veículos por habitante será igual a um (Quadro 53).

Quadro 53 - Avaliação qualitativa dos modelos matemáticos na atividade Frota de Veículos

Em duas resoluções (Resolução 1 e 3) obtivemos que não haveria um ano em que a taxa de veículo por habitante seria igual a 1 na cidade de Londrina, já na Resolução 2 obtivemos como resposta que no ano de 2028 tal evento ocorreria. Esse resultado foi possível pois consideramos, para a frota, um modelo exponencial. Nesse sentido, a frota de veículos cresceria indefinidamente, o que, na realidade, não se verifica, pois já estão sendo implantadas algumas políticas públicas com vistas a redução do número de veículos em circulação, através do incentivo do uso de bicicletas, por exemplo.


Plano prevê 290 km de ciclovias em Londrina até 2045

Fonte: Folha de Londrina (2022)


Frota cresce oito vezes mais que população

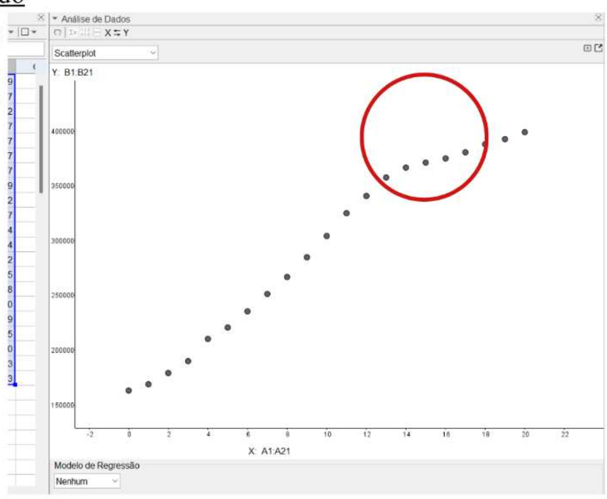
A frota do Paraná teve um crescimento de 68% nos últimos oito anos, passando de 3,9 milhões para 6,6 milhões de veículos, segundo dados do Departamento de Trânsito do Paraná (Detran-PR). No mesmo período, o aumento populacional no Estado, que passou de 10,2 milhões para 11,1 milhões de habitantes, foi de apenas 8,5%, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Em um cenário hipotético, sem leva em conta o fator econômico, os dados significam que se a tendência fosse mantida, em 20 anos o Paraná teria mais veículos que pessoas.

Fonte: Folha de Londrina (2016)

Ainda, observando os próprios dados de Q/P, em que Q foram os dados retirados do Detran-PR e P do IBGE, vemos que essa taxa (de veículo por habitante) realmente parece estar reduzindo sua taxa de crescimento, tendendo a um limite, isso pois a população, mas principalmente a frota de veículos, tem reduzido sua taxa de crescimento. Entretanto, se analisarmos o gráfico dos dados da frota Q, vemos que esse decrescimento na taxa de crescimento do número de veículos é mais evidente a partir de 2016 e 2017, o que é relativamente recente. Anterior a isso, os dados evidenciavam uma tendência de crescimento exponencial.

Tanto que em notícias desse período verificamos cenários impactantes que pareciam indicar um crescimento exponencial da frota, conforme notícia da Folha de Londrina de 2016

Gráfico dos dados da frota Q



Assim, os modelos assintóticos determinados parecem ser mais condizentes com a realidade. Em ambos os casos, a conclusão foi que não haveria um ano em que a taxa de veículo por habitante na cidade seria igual a 1.

Fonte: $C_2\_D\_MM_6\_GM4$.

Nesse jogo de linguagem, entra em cena o uso da técnica de avaliação qualitativa para analisar os modelos matemáticos e tomar uma decisão acerca da razoabilidade desses modelos em relação às características do fenômeno investigado. Os estudantes recorrem à conhecimentos, às informações do fenômeno e à conhecimentos matemáticos vinculados aos modelos matemáticos construídos. A aprendizagem, nesse jogo de linguagem, sinaliza uma mudança no modo de ver o fenômeno, baseado na avaliação qualitativa dos modelos matemáticos construídos.

Em síntese, onze jogos de linguagem associados à aprendizagem foram identificados no desenvolvimento dessa atividade, relacionados à inteiração com a situação-problema, à construção do modelo matemático e à análise do modelo matemático, conforme indica o Quadro 54.

Quadro 54 - Identificação dos jogos de linguagem associados à aprendizagem na atividade Frota de Veículos

Fases do desenvolvimento da atividade	**Jogos de linguagem**	**Sinalização de aprendizagem**
Inteiração com a situação-problema	Escolha de um tema passível de ser modelado	Capacidade de perceber se o tema escolhido é passível de ser modelado, antecipando possíveis desdobramentos do fazer modelagem matemática, e a formulação de uma justificativa aceitável a respeito da relevância do tema
	Compreensão da situação da realidade	Uso de conhecimentos e informações acerca da situação da realidade e à capacidade de simplificá-la, tornando-a passível de ser matematizada.
	Coleta de informações	Ser capaz de identificar que informações devem ser coletadas e como coletar essas informações, essa uma técnica importante do fazer modelagem matemática.
	Formulação de um problema	Uso de uma técnica para formular problemas a partir de uma situação da realidade, tendo como base seus conhecimentos acerca dessa situação e os seus conhecimentos matemáticos.
Construção do modelo matemático	Análise do comportamento dos dados	Ver de um modo diferente o comportamento do fenômeno, ao levar em consideração aspectos que não puderam ser observados apenas na observação do comportamento dos dados.
	Formulação de diferentes hipóteses acerca do comportamento das variáveis	Aquisição de um modo de ver a situação-problema, a partir de uma estruturação matemática constituída com base em pressupostos de modelos matemáticos clássicos.
	Tradução das hipóteses escritas em uma linguagem natural para uma linguagem matemática	Uso de regras de matemática para traduzir as hipóteses em uma linguagem matemática.
	Elaboração de diferentes resoluções matemáticas	Uso de regras matemáticas para construir modelos matemáticos, de acordo com um determinado domínio matemático
	Obtenção de respostas matemáticas para o problema	Uso de regras matemáticas para resolver o problema, em uma linguagem matemática
Análise do modelo matemático	Avaliação quantitativa dos modelos matemáticos	Capacidade dos estudantes de avaliar a validade de um modelo matemático em relação ao fenômeno, com base em critérios quantitativos.
	Avaliação comparativa dos modelos matemáticos	Capacidade de comparar diferentes modelos matemáticos construídos para um mesmo fenômeno e avaliar qual deles é mais adequado para investigar esse fenômeno, com base em critérios objetivos
	Avaliação qualitativa dos modelos matemáticos	Mudança no modo de ver o fenômeno, baseado na avaliação qualitativa dos modelos matemáticos construídos

Fonte: os autores.

No desenvolvimento dessa atividade, os estudantes mostraram preocupações em investigar um tema que envolvesse uma problemática autêntica em uma determinada esfera social. Ao escolherem investigar a frota de veículos e sua relação com a população na cidade de Londrina, tendo em vista as informações que mostram um alto crescimento da frota de veículos e os problemas sociais que esse crescimento pode causar, os estudantes revelam o interesse em investigar uma situação autêntica estudada por profissionais e por pesquisadores envolvidos na questão da mobilidade urbana. De acordo com Martins e Almeida (2021), o uso da modelagem matemática como uma possibilidade de resolver problemas autênticos na sala de aula pode ser entendido sob dois pontos de vista:

> um relacionado à perspectiva da modelagem aplicada em que a autenticidade da modelagem matemática refere-se aos problemas aplicados na indústria ou na ciência; o segundo aponta a autenticidade como associada a uma atividade de modelagem matemática em que a situação-problema advém de um contexto de fora da escola, ou seja, de contextos da realidade ou da cotidianidade da vida dos alunos. A discussão emergente está associada aos diferentes tipos de modelos matemáticos que emergem nas atividades, considerando sua relação com modelos utilizados por especialistas da área de aplicação da situação-problema. A autenticidade em atividades de modelagem matemática é oriunda da gênese dos problemas, quando estes são advindos da experiência profissional, bem como do campo de trabalho dos profissionais (Martins; Almeida, 2021, p. 121).

A situação-problema investigada tem relação com os problemas estudados no campo das ciências do trânsito e das dinâmicas populacionais. A investigação desencadeou o uso de modelos clássicos para resolver o problema e de diferentes modelos matemáticos que levam em conta possíveis cenários que podem ocorrer em relação ao comportamento da taxa de veículos por habitante em relação ao tempo na cidade de Londrina.

Na inteiração com a situação-problema, destaca-se que ao escolher um tema passível de ser modelado, compreender a situação da realidade, coletar informações e formular um problema, os estudantes mostram serem capazes de perceber quais possíveis caminhos e desdobramentos desse tema para o seu fazer modelagem, realizando uma antecipação global da atividade (Almeida, 2018; Galbraith; Stillman; Brown, 2017). Ser capaz de realizar essa antecipação exige uma familiaridade com atividades de modelagem, adquirida em experiências anteriores com uma diversidade de situações.

Na construção do modelo matemático, percebe-se que a matematização consistiu na análise do comportamento dos dados, na formulação de diferentes hipóteses acerca do comportamento das variáveis e na tradução das hipóteses escritas em uma linguagem natural para uma linguagem matemática, em que os estudantes mobilizam seus conhecimentos acerca do fenômeno e seus conhecimentos matemáticos. Aqui também ocorreu uma antecipação implementada dos conhecimentos matemáticos que seriam necessários para resolver o problema, de modo que as hipóteses se originaram de pressupostos levados em consideração por modelos clássicos da população e daqueles utilizados na literatura para a frota de veículos. Isso se deve, dentre outras coisas, ao tipo de problema estudado e a intervenção da professora-regente e do professor-pesquisador que chamaram a atenção para a importância de se levar em consideração modelos clássicos, já utilizados para esse tipo de problema. A aprendizagem nesses jogos de linguagem sinaliza a aquisição de um modo de ver a situação da realidade, com base em regras matemáticas e hipóteses utilizadas na construção de modelos clássicos.

Na elaboração de diferentes resoluções matemáticas e obtenção de respostas matemáticas para o problema, os estudantes usaram várias regras matemáticas, como um método de resolução de EDOs de primeira ordem com variáveis separáveis, ajuste de curvas, método de Ford-Walford para determinar o valor da assíntota, gráficos de funções, entre outros. Três modelos para a taxa de veículos por habitante na cidade de Londrina foram obtidos a partir de modelos matemáticos da população e da frota de veículos, que levam em conta diferentes hipóteses. Ao cumprir com a finalidade desses jogos de linguagem acionados, a aprendizagem se evidencia no uso de regras matemáticas para construir diferentes modelos matemáticos e para determinar soluções matemáticas para um problema. Esses jogos de linguagem se dão no interior de um domínio matemático.

Na análise do modelo matemático, os estudantes recorreram à diferentes técnicas para avaliar a razoabilidade dos modelos matemáticos obtidos e para elaborar uma resposta na linguagem da situação problema, sejam elas: avaliação qualitativa, quantitativa e comparativa. Isso mostra uma aprendizagem de técnicas de análise de modelos matemáticos, que podem gerar uma mudança de ver o fenômeno, com base nas implicações geradas por esses modelos em relação ao comportamento do fenômeno.

No decorrer da atividade, o uso de *software* como o GeoGebra e o Curve Expert se fez presente para realizar ajustes de curvas, traçar e analisar gráficos associados ao modelo. Além disso, os estudantes usaram o *software* Excel para calcular os erros percentuais na validação. Percebemos, portanto, que o uso das tecnologias digitais se deu como uma parceira aos estudantes (Geiger, 2005), facilitando a realização de cálculos e promovendo a visualização e a experimentação dos modelos matemáticos (Greefrath, 2011).

O ambiente do desenvolvimento dessa atividade pode ser caracterizado como um ambiente misto, em que encontros foram realizados na sala de aula presencial com a participação do professor-pesquisador e a professora regente e outros entre os estudantes de forma extraclasse em reuniões no Google Meet, discussões no WhatsApp e produção simultânea do relatório escrito no Google Docs.

Diferentemente das atividades Salto de Paraquedas e Compra de um Notebook desenvolvidas no contexto da disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, na atividade frota de veículos os estudantes consideraram diferentes modelos matemáticos, construídos a partir de diferentes hipóteses acerca do comportamento da população e da frota de veículos ao longo do tempo na cidade de Londrina. Esses modelos matemáticos foram construídos, tendo como finalidade realizar predições acerca do fenômeno, se aproximando do papel do modelo da atividade Salto de Paraquedas e distanciando-se da atividade Compra de um Notebook. Outro fator que se destaca nessa atividade em comparação com as outras, diz respeito a análise comparativa das implicações dos modelos matemáticos para o fenômeno, de como que diferentes percepções dos estudantes conduziram a diferentes resoluções e uso de regras matemáticas na atividade.

5 MOVIMENTO 3: EM BUSCA DE UM DIÁLOGO ENTRE O MOVIMENTO 1 E O MOVIMENTO 2

No terceiro movimento, busca-se ver conexões a partir dos elos intermediários estabelecidos no decorrer do primeiro e segundo movimento, em relação aos usos do termo aprendizagem na literatura e da aprendizagem de estudantes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática; a aprendizagem mediada por modelos matemáticos; e um entendimento de modelagem matemática em relação às condições de aprendizagem.

5.1 UM DIÁLOGO ENTRE OS USOS DA APRENDIZAGEM NA LITERATURA E NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Nessa seção, coloca-se em diálogo os traços característicos do uso do termo aprendizagem na literatura, em relação aos entendimentos e as inferências dos textos, com os jogos de linguagem que constituem aprendizagem identificados no decorrer do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, cujo foco se deu na análise de modelos, e na disciplina Modelagem Matemática na Educação Matemática, com foco em uma abordagem holística, na qual os estudantes realizam o processo completo do fazer modelagem matemática.

Em um primeiro momento, busca-se ver relações entre os traços característicos dos entendimentos de aprendizagem na literatura e os jogos de linguagem identificados nas atividades de modelagem, que se associam à aprendizagem em ação. No movimento 1, dos entendimentos de aprendizagem expressos pelos autores, mostrou-se que a aprendizagem: (i) tem natureza cognitiva; (ii) se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas; (iii) é condicionada pela linguagem, cultura e práticas.

Nas atividades desenvolvidas, aspectos que podem aludir a ideia de que a *aprendizagem tem natureza cognitiva*, como percepção, antecipação, modo de ver e compreensão são termos que apareceram na descrição dos jogos de linguagem no movimento 2, por exemplo: na constituição de um modo de ver de que forma os parâmetros de um modelo matemático influenciam no comportamento do fenômeno (AM_1); na capacidade de perceber se o tema escolhido é passível de ser modelado, antecipando possíveis desdobramentos do fazer modelagem matemática e de formular uma justificativa aceitável a respeito da relevância do tema (MM_6); na compreensão da situação da realidade (MM_1, MM_4, MM_6).

Para Wittgenstein, os termos usados para designar um processo mental, como os citados, não podem ser usados de forma descolada da linguagem, pois ao fazer isso pode-se incorrer na postulação da existência de uma linguagem privada ao indivíduo, um processo mental oculto, inacessível para o outro. Os conceitos psicológicos se dão nos jogos de linguagem com os quais nos envolvemos nas mais variadas atividades em uma forma de vida.

Sobre a percepção, Wittgenstein apresenta na segunda parte do *Investigações Filosóficas* uma discussão gramatical acerca do conceito psicológico 'notar um aspecto', diferenciando o uso de "ver" do uso de "ver-como". O primeiro caso, segundo Moreno (1995, p. 88), diz respeito a uma percepção que apresenta apenas e somente aquilo que é visto, ao realizarmos uma descrição, um desenho ou uma cópia do que é percebido. O segundo caso, ocorre quando alguém observa um objeto e de repente nota sua semelhança com outra fisionomia, ela vê que o objeto não se modifica, apena vê de um modo diferente. Wittgenstein denomina essa experiência de "perceber um aspecto". Para exemplificar, o filósofo apresenta a figura Coelho-Pato de Jastrow (Figura 6).

Figura 16 - Figura Coelho-Pato

Fonte: Wittgenstein (IF, p. 255).

Ao observar essa figura é possível vê-la ora como um pato, ora como um coelho. E isso depende se já o conceito de pato ou de coelho já estiver sido apropriado, mediante ao domínio de técnicas de emprego da palavra 'pato' e 'coelho'. Como aponta Gottschalk (2006):

> Ver imediatamente na figura um coelho implica em já dominarmos uma série de técnicas de apresentação do simples. Já nos apresentaram coelhos, sabemos que se trata de um animal, que come cenouras, tem orelhas grandes, comparamos vários coelhos entre si, etc. São esses diversos empregos da palavra "coelho" que nos permitem atribuir significado aos traços empíricos diante de nossos olhos e atribuir significado à figura. Ver a mesma figura *como* pato, também pressupõe que se tenha de antemão o conceito de pato, e que se possa lançar mão de determinadas técnicas de comparação, para que se atribua aos mesmos traços empíricos o significado de pato (Gottschalk, 2006, p. 75-76).

Assim, ver e ver-como não dependem de processos mentais, mas "pressupõem determinadas capacidades aprendidas, são atitudes diferentes de um mesmo processo constitutivo dos significados que atribuímos à nossa experiência" (Gottschalk, 2006, p. 76). Ver algo de determinada maneira pressupõe que já dominemos um conceito.

Nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas, pode-se exemplificar como os estudantes passam a ver de outra maneira determinados conceitos e o comportamento do fenômeno. Na atividade Salto de Paraquedas (AM_1), por exemplo, os estudantes puderam *ver* o campo de direções das EDOs e as curvas integrais traçadas nesse campo *como* o comportamento da velocidade do paraquedista durante a queda-livre e após a abertura do paraquedas do decorrer do tempo, para diferentes massas do paraquedista, o que pressupõe que os estudantes já dominem o conceito de campo de direções de uma EDO e saibam que os vetores indicam o comportamento de suas soluções. Esse ver-como conduz à percepção de um aspecto do fenômeno: a massa é diretamente proporcional a velocidade do paraquedista. De modo semelhante, na atividade Compra de um Notebook (MM_4), a partir do gráfico cartesiano dos pontos de pares ordenados que relacionam os índices de preço e de desempenho, os estudantes consideram uma maneira diferente de *ver* o uso do termo 'melhor custo-benefício', *como* aquele cujo ponto possui menor distância euclidiana do ponto $M(10,0)$, isso pressupõe que os estudantes possuam o conceito de distância euclidiana de dois pontos e dominem uma técnica para aplicar esse conceito.

No que tange à compreensão em atividades de modelagem matemática, sob uma perspectiva wittgensteiniana, Almeida e Seki (2018) argumentam que a gramática da compreensão é diferente da gramática dos estados mentais e compreender algo está associado a uma capacidade, uma habilidade de agir de acordo com uma maneira esperada em práticas públicas de linguagem. Seki e Almeida (2021) destacam que a compreensão em atividades de modelagem matemática pode ocorrer a partir do seguir regras, do uso e das explicações dos estudantes nos diversos jogos de linguagem da situação-problema, da matemática e da própria modelagem matemática.

Nas atividades do movimento 2, a compreensão da situação da realidade, se deu mediante ao uso de conhecimentos e informações acerca dessa situação e à capacidade de simplificá-la, tornando-a passível de ser modelada, e se manifesta nas explicações que os estudantes fazem acerca do fenômeno, por exemplo, das forças que agem sobre o paraquedista durante o salto (AM_1, MM_1) e sobre a cápsula no Bungee Rocket (AM_3); da funcionalidade de fatores que influenciam o desempenho de um notebook (MM_4); de como a taxa de habitantes por veículo influencia na mobilidade urbana (MM_6). Já a compreensão matemática se manifesta no modo como os estudantes reagem a partir das intervenções do professor-pesquisador ou da professora-regente, por exemplo, ao calcularem a integral $\int \frac{1}{1-u^2} du$ por frações parciais e por substituição trigonométrica (MM_1) ou ao usarem corretamente regras matemáticas no decorrer da construção e da análise dos modelos matemáticos.

O conceito de antecipação, por sua vez, é utilizado na literatura da área de

Modelagem Matemática como uma ação metacognitiva em que os estudantes lançam um olhar prospectivo sobre o desenvolvimento da atividade, antecipando possíveis encaminhamentos matemáticos e em relação ao fazer modelagem matemática (Almeida, 2018, 2022; Niss, 2010).

Na perspectiva wittgensteiniana, é preciso tomar um cuidado ao tomar este conceito como uma descrição de um estado mental, pois ao antecipar ações antes mesmo delas ocorrerem quando, por exemplo, deve-se continuar uma sequência '+2", pode dar a entender que as aplicações da regra estão contidas na própria regra'. Nesse ponto, Wittgenstein argumenta que estamos inclinados a expressões como "'as passagens já estão propriamente feitas; mesmo antes de eu fazê-las por escrito, verbalmente ou em pensamento'. Era como se fossem pré-determinadas, antecipadas, de uma forma singular – como só ter-em-mente pode antecipar a realidade" (Wittgenstein, IF, § 188). Em contraposição, para Wittgenstein o que explica o fato de podermos antecipar a aplicação de uma regra é porque fomos treinados a agir de modo regular de determinadas maneiras e não outras, não sendo aqui necessário recorrer a uma intuição ou a adivinhação da aplicação da regra.

A antecipação de encaminhamentos matemáticos e do fazer modelagem matemática frente uma situação-problema é condicionada a um treinamento em uma prática de uso de regras, que se faz na familiarização dos estudantes com atividades desse tipo. Não se espera de um estudante que nunca tenha tido contato com modelagem matemática esse tipo de ação. Nas atividades, o resultado desse treinamento se mostra quando os estudantes julgam se um determinado tema ou problema pode desencadear uma atividade de modelagem matemática, de acordo com as informações disponíveis, os seus conhecimentos matemáticos e os seus conhecimentos acerca da situação-problema. Por exemplo, quando os estudantes do grupo GM4 abandonaram a ideia de trabalhar com o tema radar de trânsito por não terem encontrado informações suficientes e optaram por estudar a frota de veículos na cidade de Londrina, considerando que eles já conheciam modelos matemáticos clássicos que poderiam ser usados para modelar a população e a frota de veículos (MM_6). Isso mostra a realização de uma antecipação de possíveis desdobramentos de um tema escolhido para o fazer modelagem matemática. Além disso, mostra a necessidade dos estudantes de aprender novas regras matemáticas, de modo a ver suas possibilidades de uso ao desenvolver atividades de modelagem matemática.

Quanto ao traço *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas*, indica-se que, nas atividades do movimento 2, essas interações se dão no interior dos jogos de linguagem identificados e podem ser vistas nos diálogos entre professor e estudantes, estudantes e estudantes, estudante consigo próprio e na inteiração dos estudantes com as orientações para o desenvolvimento da atividade (como as regras que orientaram esse desenvolvimento), com os recursos tecnológicos e com o ambiente educacional.

As inteirações promovidas podem ser entendidas como um fator essencial para inserção nos jogos de linguagem. O professor é responsável, conforme Williams (1994), por estender um convite para que os estudantes sejam inseridos em uma prática, até que eles possam ao longo do treinamento passar a agirem com autonomia. No caso das atividades desenvolvidas nas duas disciplinas, o professor-pesquisador recorreu à uma espécie de roteiro que orientou os estudantes na produção do relatório final e a intervenções pontuais para mostrar como aplicar uma regra matemática específica. Por exemplo, na atividade Bungee Rocket (AM_3), o professor-pesquisador mostrou aos estudantes como calcular o período e a frequência de uma função trigonométrica qualquer e eles aplicaram essa regra para indicar o período e frequência da solução de um PVI; na atividade Frota de Veículos, os estudantes passaram a considerar modelos assintóticos após um questionamento da professora-regente acerca da construção do modelo matemático que eles tinham feito (MM_6). Segundo Almeida e Tortola (2022, p. 236), o professor "é o mestre da prática, aquele que auxilia os alunos na inserção nos jogos de linguagem ou na proposição de novos jogos de linguagem". Isso é uma condição necessária para que ocorra aprendizagem na perspectiva de Wittgenstein.

O traço *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*, por sua vez, mostra, em relação aos outros dois traços e os jogos de linguagem identificados no movimento 2, que tanto os aspectos cognitivos, quanto os aspectos relacionados às inteirações são mediados por jogos de linguagem, cujos critérios para agir nesses jogos são dados pelas práticas de uso regulares de uma determinada comunidade ou cultura. Esse traço pode ser compreendido, portanto, como condição para os outros dois traços característicos relacionados aos entendimentos de aprendizagem em modelagem matemática.

Após as conexões estabelecidas entre os traços característicos dos entendimentos de aprendizagem do movimento 1 e os jogos de linguagem que constituem aprendizagem nas atividades de modelagem matemática identificados no movimento 2, passa-se agora para as conexões com os traços característicos referentes às inferências dos textos acerca da aprendizagem em modelagem matemática identificados movimento 1, os quais são: (i) *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos*; (ii) os *estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas*; (iii) *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática*; (iv) *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões;* (v) *a aprendizagem* *em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*; (vi) *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares*; (vii) *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática*.

O traço *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos* se mostra no uso de regras matemáticas nos jogos de linguagem envolvidos no desenvolvimento das atividades. Na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, essas regras dizem respeito aos conceitos matemáticos estudados nessa disciplina, como o de soluções (particulares, geral e de equilíbrio), métodos de resolução de EDOs de primeira e segunda ordem e de resolução de PVIs. Ao usar essas regras nas atividades com foco na análise de modelos, os estudantes seguem normas para operar nos jogos de linguagem, adquirindo novos significados que se articulam com aqueles aprendidos durante a disciplina. Por exemplo, na atividade Salto de Paraquedas, os estudantes puderam ver as soluções de uma EDO como o modo em que a velocidade do paraquedista se comporta no decorrer do tempo, por meio da análise qualitativa das EDOs, recorrendo aos seus campos de direção, e da análise das soluções analíticas dos PVIs. Na atividade *Bungee Rocket*, por sua vez, os estudantes puderam ver as implicações das diferentes soluções para o deslocamento da cápsula no decorrer do tempo, usando a solução do PVI 1 para ver esse deslocamento como harmônico simples, e a solução do PVI 2 para indicar um movimento livre amortecido e classificá-lo como superamortecido, amortecimento crítico ou subamortecido a depender do valor de β. Na medida em que as regras matemáticas são usadas nessas situações, as atividades possibilitam aos estudantes adquirirem novos significados para os conceitos da disciplina, para além do âmbito estritamente matemático, ampliando a sua gramática interna.

Na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, as regras matemáticas usadas não foram circunscritas em um domínio matemático específico, mas emergiram das especificidades de cada situação-problema e dos conhecimentos matemáticos dos estudantes. Na atividade Salto de Paraquedas, os estudantes puderam usar regras e técnicas matemáticas, não somente para analisar as soluções, mas para obter as soluções das EDOs formuladas, recorrendo a diferentes formas de expressão do modelo matemático. Na atividade Compra de um Notebook, as regras matemáticas se constituíram na organização dos dados coletados na construção de índices classificatórios para o preço e o desempenho, na construção de gráficos e no uso da distância euclidiana entre dois pontos como uma métrica para avaliar o custo-benefício dos computadores. Na atividade Frota de Veículos, diferentes resoluções matemáticas levaram ao uso de diferentes regras matemáticas para a construção de modelos logísticos, exponenciais e exponenciais assintóticos e o uso técnicas para obter o valor das assíntotas e dos pontos de intersecção entre as curvas. Ao não se limitarem a apenas um domínio matemático específico, os estudantes puderam articular diferentes regras matemáticas e estabelecer relações de sentido, de modo a obter modos de ver o fenômeno modelado.

Nas duas disciplinas, as regras matemáticas funcionam como formas de descrição dos fenômenos, elas fornecem uma maneira de organizar as situações empíricas (Souza; Barbosa, 2019), são condições para constituição de significados desses fenômenos (Sousa; Almeida, 2019) e [ajudam a compreender as coisas, a ver determinados aspectos. Com o uso empírico que é feito da matemática nas atividades desenvolvidas, mostra-se a *aprendizagem não somente de conteúdos matemáticos, mas também de conhecimentos de outras áreas*, em que os estudantes passam a ver que: quanto maior a massa do paraquedista maior serão as velocidades terminais durante o salto o (AM_1, MM_1); o movimento da cápsula no Bungee Rocket é subamortecido, pois caso contrário a cápsula oscilaria infinitamente sem estabilizar (AM_3); o notebook com melhor custo-benefício é aquele cujo par ordenado que relaciona o desempenho e o preço tem a menor distância euclidiana do ponto (10, 0) (MM_4); se adotamos modelos assintóticos para a população e a frota de veículos na cidade de Londrina, a taxa de veículos por habitante nunca será igual a 1 (MM_6).

Em relação ao traço característico que indica que em modelagem matemática, *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares*, ao olhar para os jogos de linguagem das atividades do movimento 2, pode-se dizer que tal posicionamento se constitui em tomar uma *atitude*, de considerar outras formas de ver os conceitos matemáticos e as situações da realidade mediante ao uso de regras e técnicas, comparando o modo usual de aplicar essas regras em situações estritamente matemáticas com outras situações. Como sinaliza Gottschalk (2004, p. 87), aprender “é ser capaz de ver de outra maneira, sem que essa outra maneira seja uma ‘variação’ de uma hipótese inicial do aluno. Em outras palavras, aprender é estar disposto a comparar seu modo usual de empregar certa imagem com outro”.

Almeida e Tortola (2022) argumentam que nos jogos de linguagem que emergem em atividades de modelagem matemática, pode ocorrer uma mudança de hábitos, de forma sistemática com a orientação do professor e as interações entre os estudantes na imersão nesses jogos. A mudança de atitude ou de hábitos dos estudantes em práticas escolares requer uma mudança em termos de jogos de linguagem, não abandonando aqueles tradicionais das aulas de matemática, mas promovendo o uso de regras matemáticas em novos jogos, de modo que outros modos de ver possam ser incorporados na gramática interna dos estudantes.

A mudança de atitude imbricada na consideração de ver de outras maneiras é semelhante ao traço característico que sinaliza que *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões*. Ao trazer elementos da perspectiva filosófica de Wittgenstein para tecer considerações acerca da criticidade e normatividade em atividades de modelagem matemática, Sousa *et. al* (2023, p. 8) argumentam que nesse tipo de atividade, “as regras matemáticas formatam nossos modos de ver o mundo e pensar criticamente pode ser entendido, sob essa base filosófica, como ser capaz de imaginar outras possibilidades, de introduzir novos paradigmas, novas regras a serem seguidas”. No contexto da disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, a atividade Compra de um notebook envolve elementos que podem se associar à esse ponto de vista acerca da criticidade, uma vez que os estudantes foram capazes de introduzir uma nova regra, baseado em um sistema de referência formado por regras matemáticas, para determinar o melhor custo-benefício de um notebook e tomar uma decisão de compra. Imaginar uma outra maneira de ver o conceito de custo-benefício é uma evidência da criticidade.

A *aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática* é um traço característico que leva em conta a influência de fatores emocionais e motivacionais na aprendizagem. O interesse pode ser entendido, segundo Elfringhoff e Schukajlow (2021, p. 12), como “um fator motivacional que caracteriza a relação entre uma pessoa e um objeto”, e refere-se a componentes relacionados aos valores e às emoções, sendo facilitada quando uma pessoa percebe um objeto como significativo. Esse conceito de interesse como um fator motivacional, conforme sinaliza Hidi e Renninger (2006, p. 112), diz respeito a um “estado psicológico de engajar ou a predisposição de reengajar-se com classes particulares de objetos, eventos ou ideias ao longo do tempo”.

Gottschalk (2018, p. 115) indica que, sob uma perspectiva wittgensteiniana, a própria motivação do sujeito pode ser vista como um “conjunto de regras linguísticas que aprendemos a seguir, a saber, como *critérios* para a aplicação da palavra “motivação”, e não como um estado psicológico autônomo, independente de fatores externos”. A autora pontua que o que move a ação do sujeito não são supostas entidades mentais, mas são “uma ou mais regras que fazem da gramática dos usos das palavras que foram incorporadas ao longo de sua vida” (Gottschalk, 2018, p. 115).

A partir dos escritos de Wittgenstein sobre a filosofia da matemática, Floyd

(2011) argumenta que o interesse da matemática não diz respeito a existência ou inexistência de objetos, tampouco é meramente psicológica, “em vez disso, o que nos interessa é que a nossa maneira de olhar certas situações – tanto empírica quanto matematicamente – é alterada, e torna-se mais interessante” (Floyd, 2011, p. 152). O interesse pela matemática, segundo a autora, surge da atividade investigativa da matemática, que envolve um trabalho com os detalhes de uma prova e suas relações com outras provas e requer “o desenvolvimento de um faro para detectar, no contexto de um argumento, quais noções são rigorosas e quais não são, quais formas de “prosa” são “gás” (potencialmente enganosas) e quais não são, quais afetam nossas noções comuns extramatemáticas e quais não” (Floyd, 2011, p. 163). Nas palavras de Wittgenstein, “os conceitos nos conduzem às investigações. Eles são a expressão do nosso interesse, e conduzem o nosso interesse” (Wittgenstein, IF, § 570).

No âmbito das atividades de modelagem matemática do movimento 2, os conceitos matemáticos, como instrumentos de linguagem, conduzem os estudantes a aplicar de determinadas maneiras as regras matemáticas em uma situação não-matemática e com isso, os possibilita, vê-la de outras formas, fortalecendo o interesse pela matemática. Isso se evidencia, por exemplo, quando os estudantes se mostram dispostos a comparar diferentes modos de ver o fenômeno a partir da análise das implicações de diferentes modelos matemáticos para o seu comportamento, nas atividades Salto de Paraquedas (AM_1) e Bungee Rocket (AM_3), e ao considerarem que o comportamento da taxa de veículos por habitantes na cidade de Londrina no decorrer do tempo pode ser visto como assintótico ou como um comportamento exponencial a depender do modelo matemático usado (MM_6).

A disposição em fazer modelagem matemática aqui também não necessita da postulação de entidades mentais como condição, mas se dá no sentido de “ser capaz de” e “poder”, fazer certas coisas em nossas práticas humanas. Morelli (2018, p. 108), sugere que Wittgenstein usa o conceito de disposição de uma maneira desnaturalizada, como “padrões de comportamento que foram aprendidos por meio de treinamento e educação em um determinado sistema ou forma de vida”. A disposição para fazer modelagem depende, portanto, da aprendizagem das regras associadas a esse fazer, a partir de um treinamento.

Tanto o interesse, quanto a disposição em modelagem matemática são conceitos que não precisam ser aplicados a partir de critérios mentais, mas se dão nos mais variados jogos de linguagem que se constituem nas atividades, quando os estudantes se mostram capazes de ver de outras maneiras a situação da realidade por meio dos usos da matemática e quando seguem regras envolvidas no fazer modelagem matemática, sejam aquelas que orientam a análise de modelos ou as ações dos estudantes em uma abordagem holística.

Em relação aos traços *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática* e *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*, há diversas abordagens na literatura que indicam que o importante na aprendizagem em modelagem matemática é o desenvolvimento de competências[19] (Cevikbas; Kaiser; Schukajlow, 2022; Niss; Højgaard, 2019; Kaiser; 2007; Maaβ, 2006; Zanim, 2015, 2021). Algo recorrente nessas teorias é que há uma primazia de um saber fazer sobre um saber quê. Um exemplo disso se mostra na caracterização de Niss e Højgaard (2019, p. 20) de uma competência matemática, em que a competência de modelagem matemática é entendida como um tipo:

> O núcleo de uma competência matemática é a aplicação da matemática em contextos e situações que apresentam um certo tipo de desafio. Em outras palavras, uma competência se concentra em aspectos de fazer matemática ativamente. Em contraste, saber matemática significa estar de posse de conhecimento factual sobre definições matemáticas, conceitos, resultados (proposições e teoremas), algoritmos, fórmulas, teorias e assim por diante (Niss; Højgaard, 2019, p. 20).

Uma consequência direta dessa dicotomia entre saber fazer (desenvolvimento de competências) e saber quê (aquisição de conhecimentos) pode gerar o fortalecimento de outra dicotomia, conforme sinaliza Tortola, Seki e Almeida (2022), do utilitarismo|formalismo na aprendizagem em modelagem, em que o foco no desenvolvimento de competências se daria a partir do favorecimento do utilitarismo.

Esse fortalecimento ocorre quando se adota uma atitude dogmática, ao considerar que as competências descrevem um estado mental e compreender a aprendizagem por competências se destinaria a desvendar como funciona o seu mecanismo cognitivo. Sob uma perspectiva wittgensteiniana, essa atitude pode ser evitada quando dirige-se o olhar para a aprendizagem a partir dos jogos de linguagem e o seu papel na relação entre o saber quê (regras) e o saber fazer (seguir regras).

[19] Existem uma diversidade de definições de competências na Modelagem Matemática na Educação Matemática (Cevikbas; Kaiser; Schukajlow, 2022). Por exemplo, no projeto KOM[19], competência (*competence)* é definida como a "prontidão perspicaz de alguém para agir adequadamente em respostas aos desafios de determinadas situações" (Niss; Højgaard, 2019, p. 12). Sob essa ótica, a competência (*competence*) matemática é a "prontidão perspicaz de alguém para agir apropriadamente em resposta a todos os tipos de desafios matemáticos pertencentes a determinadas situações" (Niss; Højgaard, 2019, p. 12). A competência de modelagem é considerada como uma competência específica de matemática por esses autores e é definida como: "Esta competência centra-se nos modelos matemáticos e na modelagem, ou seja, na matemática utilizada para lidar com questões, contextos e situações extramatemáticas. Ser capaz de construir tais modelos matemáticos, bem como analisar e avaliar criticamente modelos existentes ou propostos, levando em conta os propósitos, dados, fatos, características e propriedades do domínio extramatemático que está sendo modelado, são o núcleo desta competência. Envolve relacionar-se e navegar dentro e através dos processos-chave do "ciclo de modelagem" em suas várias manifestações" (Niss; Højgaard, 2019, p. 16).

Nessa perspectiva, ao adquirir um conceito não aprendemos somente uma regra, mas uma maneira de segui-la em um ou mais jogos de linguagem, por meio de um treinamento que conecta o aprendiz com a gramática do conceito, ou seja, com um conjunto de regras que aprendemos a seguir e constituem a sua significação. A apropriação de significados de um conceito não se dá em um golpe só, mas nas suas aplicações em diferentes situações, em que os estudantes vão paulatinamente, por semelhanças e dessemelhanças de família, ampliando sua gramática. Segundo Gottschalk (2020, p. 16), "a maneira como aplico a palavra que expressa o conceito mostra qual regra estou seguindo. Em outras palavras, o *como* precede *o quê*, e não o contrário! É a gramática que diz *o que é* o objeto". Isso implica, para a autora, que nossas certezas vão sendo tacitamente assimiladas na prática da linguagem e formam a condição para que os conhecimentos sejam adquiridos. As regras são aprendidas na sua aplicação, no domínio de técnicas convencionadas e não dependem de uma intuição ou uma interpretação em cada caso. Cabe ao professor mostrar "não só as regras de novos jogos de linguagem (saber que), como também de apresentar exemplos *suficientes* (e não exaustivos) de *como* segui-las" (Gottschalk, 2020, p. 16)

Ser competente em um jogo de linguagem pressupõe aprender as suas regras e isso implica aprender as suas aplicações. Quando adquirimos um conceito mediante a uma determinada instrução ou treinamento em um jogo de linguagem, aprendemos um modo de usá-lo. Ryle (2010) argumenta que aprender a fazer algo é aprender um método ou um *modi operandi*[20]. Isso não implica agir de forma uniforme, mas de modo regular de acordo com os modos de agir dos praticantes desse jogo. Cabe ao professor, mestre da prática, conforme Williams (1994), mostrar aos estudantes como seguir as regras desse jogo, é ele que possui a competência normativa associada à prática social e fornece as condições básicas para que o treinamento seja bem-sucedido, ou seja, para que o estudante iniciante se torne um habilidoso e, portanto, autônomo.

No âmbito da modelagem matemática, ao considerar as competências sob a ótica da aprendizagem em jogos de linguagem, pode-se dizer que para que os estudantes desenvolvam competências de modelagem matemática, de matemática e de recursos tecnológicos é preciso que aprendam as regras e como segui-las nos jogos de linguagem que constituem essas atividades. Isso evidencia que os estudantes não intuem ou descobrem qual

[20] Para Ryle (2010), um método é uma maneira de fazer algo que pode ser aprendida. Uma maneira de fazer algo, um *modus operandi* é algo geral, em dois sentidos: o primeiro é que os *modi operandi* são propriedade pública e, o segundo, é que não há limite para o número de ações que podem ser executadas dessa maneira, em outras palavras, o método é aplicável em qualquer lugar e momento, e por qualquer pessoa.

conceito matemático pode ser aplicado a partir de uma situação-problema da realidade, mas usam as regras matemáticas de acordo com técnicas aprendidas, a partir de seus usos em diferentes jogos de linguagem, sejam aqueles internos à própria matemática ou aqueles que envolvem algum uso empírico externo à matemática, de modo que ao fazer modelagem matemática os estudantes aprendem um novo uso desse conceito, ampliando sua gramática de usos.

Aprender a fazer modelagem matemática, aprender a usar matemática em situações-problema ou aprender a usar tecnologias digitais com foco no desenvolvimento de competências correlatas, implica aprender seus jogos de linguagem. Isso significa que os estudantes precisam aprender os métodos e as técnicas de aplicação das regras que orientam as suas ações nesses jogos. Por exemplo, nas atividades do movimento 2, as regras envolvidas no fazer modelagem foram apresentadas pelo professor-pesquisador a partir de um roteiro para elaboração do relatório final e questionamentos ao longo das discussões, que traziam elementos normativos de como prosseguir no desenvolvimento da atividade; as regras matemáticas foram aplicadas de acordo com modos de uso ensinados anteriormente, como é o caso do uso do método de Ford-Walford na atividade Frota de Veículos (MM_6), bem como de modos de uso mostrados pelo professor-pesquisador ao longo das atividades, como é o caso da resolução da integral $\int \frac{1}{1-u^2} du$ por substituição trigonométrica na atividade Salto de Paraquedas no contexto 2; as regras associadas ao uso de tecnologias envolveram modos de usar os diferentes recursos oferecidos pelo GeoGebra, Excel e CurveExpert para construção e análise de modelos, em que alguns casos foram mostrados pelo professor-pesquisador e, em outros casos, foram realizados de forma autônoma pelos estudantes, evidenciando um domínio das regras desses jogos de linguagem tecnológicos.

A partir dessas conexões, é possível ver que tanto os traços característicos relativos aos entendimentos de aprendizagem, quanto às inferências sobre a aprendizagem em modelagem matemática, ambos identificados na literatura, podem se mostrar nos diferentes jogos de linguagem que emergem no desenvolvimento das atividades, não sendo necessário postular a existência de estados e objetos extralinguísticos como condição para aferir sobre a aprendizagem.

5.2 APRENDIZAGEM MEDIADA POR MODELOS MATEMÁTICOS

Nessa seção, busca-se ver relações internas entre os jogos de linguagem associados à aprendizagem que foram identificados no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, com foco na análise de modelos, e na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, com foco em uma abordagem holística da modelagem.

Essas relações podem ser caracterizadas, em um primeiro momento, na identificação de traços característicos da aprendizagem por semelhanças de família entre os jogos de linguagem constituídos nas atividades desenvolvidas em cada uma das disciplinas. Em um segundo momento, busca-se ver as semelhanças e dessemelhanças de família que surgem ao comparar os traços característicos dos jogos de linguagem constituídos nas duas disciplinas, entre si.

Na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, ao comparar os jogos de linguagem associados à aprendizagem nas atividades Salto de Paraquedas e *Bungee Rocket*, é possível identificar os traços característicos da aprendizagem, quando o foco está na análise de modelos matemáticos previamente formulados pelo professor-pesquisador:

- *Identificação do papel das regras matemáticas no uso do modelo matemático*: se mostra nos jogos de linguagem que indicam análises do comportamento das soluções, do fenômeno e da influência dos parâmetros do modelo matemático nesse comportamento e na formulação de justificativas para classificar o movimento associado ao fenômeno. A aprendizagem nesse caso sinaliza para a constituição de um modo de ver e a construção de argumentos para efetuar considerações acerca do fenômeno a partir do uso que é feito das regras matemáticas no modelo matemático analisado. Esse modo de ver direciona-se tanto para os conceitos matemáticos estudados na disciplina, quanto para as implicações de mudanças do modo de se aplicar as regras matemáticas na descrição do comportamento deste fenômeno.
- *Aplicação de regras matemáticas para obter uma solução para o problema*: se mostra nos jogos de linguagem constituídos no uso de regras matemáticas da disciplina e de outros contextos matemáticos para resolver os Problemas de Valor Inicial (PVIs) de modo analítico, verificar as soluções desses PVIs, calcular o período e a frequência do movimento e obter uma solução matemática para o problema. Esse traço mostra um aspecto da aprendizagem, como o uso de regras matemáticas em situações empíricas, que pressupõe o domínio de técnicas. Ao serem usados nessa prática de uso, os conceitos matemáticos podem adquirir outros significados, como ver a solução de equilíbrio como a velocidade do paraquedista ou da cápsula no

Bungee Rocket em que a aceleração é nula, que ocorre quando as forças que agem sobre esses corpos se equilibram.

- *Uso de recursos tecnológicos para análise do modelo*: se mostra nos jogos de linguagem em que os estudantes constroem campos de direção, gráficos das soluções dos modelos matemáticos, criam controles deslizantes para analisar a influência dos parâmetros no comportamento do fenômeno, por meio do *software* GeoGebra, fornecendo uma dinamicidade à análise dos modelos matemáticos. O aspecto da aprendizagem evidenciado por esse traço consiste no uso de regras matemáticas de modo articulado com as regras da linguagem do *software*, para realizar estimativas, conjecturas, cálculos, simulações e experimentações acerca do fenômeno estudado e do modelo matemático.
- *Uso de regras e técnicas para avaliação do modelo e interpretação dos resultados*: se mostra nos jogos de linguagem envolvidos na avaliação dos modelos matemáticos, quando os estudantes julgam sua razoabilidade frente ao fenômeno, a partir do uso de técnicas como a comparativa, quantitativa e qualitativa. Esse traço indica que a aprendizagem envolve a aquisição de técnicas consideradas importantes para o fazer modelagem matemática, principalmente aquelas usadas para estabelecer uma relação de volta do domínio matemático para a situação da realidade modelada.

Esses quatro traços característicos evidenciam, por meio dos jogos de linguagem identificados, uma forma de caracterizar a aprendizagem nas atividades de modelagem matemática com foco na análise de modelos, como o uso e a identificação de regras e técnicas matemáticas, da modelagem matemática e de recursos tecnológicos de modo articulado. Esses aspectos fornecem aos alunos uma ampliação do escopo de situações em que as regras matemáticas da disciplina podem ser aplicadas, os conceitos matemáticos adquirem novos usos e, portanto, novos significados para os estudantes (Quadro 55).

Quadro 55 - Traços característicos da aprendizagem nas atividades com foco na análise de modelos

Traços característicos da aprendizagem	Atividade	Fase	Jogos de linguagem
Identificação do papel das regras matemáticas no uso do modelo matemático	Salto de Paraquedas	Análise qualitativa das soluções das EDOs	Análise das soluções em relação ao comportamento do fenômeno
			Percepção da influência dos parâmetros no comportamento das soluções do modelo matemático e no comportamento do fenômeno

		Avaliação do modelo matemático e interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado	Análise da influência dos parâmetros no comportamento do fenômeno
	Bungee Rocket	Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples	Análise do comportamento da solução a partir do seu gráfico e em relação ao fenômeno
			Análise da influência de parâmetros no comportamento da solução
		Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido	Formulação de justificativa para a classificação do movimento como livre e amortecido
			Análise do comportamento da solução nos três casos de amortecimento
Aplicação de regras matemáticas para obter uma solução para o problema.	Salto de Paraquedas	Análise das soluções analíticas dos PVIs	Obtenção de uma expressão matemática para calcular as velocidades terminais do paraquedista (soluções de equilíbrio)
			Construção da solução analítica de cada PVI a partir da solução geral
			Verificação da solução analítica
			Construção da função da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo
	Bungee Rocket	*Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples*	Resolução analítica do PVI 1
			Cálculo do período e da frequência do movimento
		Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido	Resolução do PVI 2 considerando três casos possíveis (movimento superamortecido, amortecimento crítico e subamortecido)
		Avaliação e interpretação dos modelos matemáticos em relação ao fenômeno	Resolução dos problemas propostos
Uso de recursos tecnológicos para análise do modelo.	Salto de Paraquedas	*Análise qualitativa das soluções das EDOs*	Construção de campos de direção do GeoGebra
			Estimativas de diferentes valores associados ao fenômeno por meio do uso do gráfico das soluções
		Avaliação do modelo matemático e interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado	Análise da influência dos parâmetros no comportamento do fenômeno
	Bungee Rocket	*Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples*	Análise do comportamento da solução a partir do seu gráfico e em relação ao fenômeno
			Cálculo do período e da frequência do movimento
			Análise da influência de parâmetros no comportamento da solução
		Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido	Análise do comportamento da solução nos três casos de amortecimento
		Avaliação e interpretação dos modelos matemáticos em relação ao fenômeno	Resolução dos problemas propostos
Uso de regras e técnicas para avaliação do modelo e interpretação dos resultados.	Salto de Paraquedas	*Avaliação do modelo matemático e interpretação das soluções em relação ao fenômeno modelado*	Comparação dos resultados obtidos com a análise das soluções analíticas e com a análise qualitativa das soluções
			Comparação entre as soluções do modelo matemático e o comportamento do fenômeno
	Bungee Rocket	*Análise do modelo matemático do movimento harmônico simples*	Interpretação dos resultados em relação ao fenômeno
		Análise do modelo matemático do movimento livre amortecido	Comparação das três soluções possíveis em relação ao comportamento do fenômeno
		Avaliação e interpretação	Avaliação comparativa dos dois modelos

		dos modelos matemáticos em relação ao fenômeno	matemáticos

Fonte: os autores.

Na disciplina Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, a comparação dos jogos de linguagem identificados nas atividades Salto de Paraquedas, Compra de um Notebook e Frota de Veículos resultou nos seguintes traços característicos:

- *Identificação de uma situação-problema*: se mostra nos jogos de linguagem envolvidos principalmente na inteiração com a situação-problema das atividades. Identificar uma situação-problema é uma ação que se faz mediante a escolha de um tema, compreensão da situação da realidade, coleta de informações, elaboração de índices de medidas para organização dos dados e formulação de um problema. Esse traço indica que na aprendizagem nessas atividades ocorre o uso de conhecimentos, regras e técnicas para perceber e tornar uma situação da realidade em uma situação-problema passível de ser modelada, isso requer que os estudantes sejam capazes de formular uma justificativa aceitável acerca da relevância do tema escolhido, identificar que informações devem ser coletadas e como coletá-las, formular ou usar regras para organização das informações e antecipar possíveis desdobramentos do fazer modelagem matemática.
- *Tradução entre proposições na linguagem da situação-problema e proposições na linguagem matemática*: se mostra, por um lado, nos jogos de linguagem que se constituem na tradução da linguagem natural para uma linguagem matemática, sendo eles: análise do comportamento dos dados, matematização (formulação de hipóteses e seleção de variáveis) e formulação de um problema matemático; por outro lado, na tradução de uma linguagem matemática para a linguagem natural da situação-problema, que se revela na formulação de uma resposta na linguagem natural e na tomada de decisões a partir dos resultados obtidos. Traduzir expressões linguísticas de um jogo de linguagem a outro é por si só um jogo de linguagem e envolve, no caso de atividades de modelagem matemática, a aprendizagem do uso de regras de tradução (como a análise do comportamento dos dados, matematização e formulação de um problema matemático) e de regras dos jogos de linguagem da matemática e dos jogos de linguagem da situação-problema, de modo a

constituir um modo de ver a situação modelada, mediante a uma lente matemática.

- *Uso de regras matemáticas para construir modelos e obter uma solução matemática para o problema*: se revela nos jogos de linguagem que emergem na construção do(s) modelo(s) matemático(s) nas atividades, como uma ou mais resoluções do problema matemático, expressão do modelo matemático, elaboração de uma métrica e resposta para o problema matemático. O aspecto da aprendizagem revelado por esse traço se mostra na capacidade dos estudantes de usar regras matemáticas para resolver um problema matemático, na aquisição de diferentes modos de expressão matemática do modelo matemático (gráfica, algébrica, tabular, entre outros) e requer o domínio de técnicas matemáticas para aplicação dessas regras. Isso pode exigir a intervenção do professor para mostrar como essas regras podem ser usadas na construção de um modelo matemático.
- *Uso de regras e técnicas para avaliação do modelo e interpretação dos resultados*: é um traço característico dos jogos de linguagem identificados na interpretação de resultados e validação do modelo matemático, como a avaliação qualitativa, comparativa e quantitativa dos resultados e do modelo matemático. Nesse caso, a aprendizagem está associada ao ser capaz de usar diferentes técnicas de avaliação (qualitativa, comparativa e quantitativa), com a finalidade de analisar a razoabilidade do modelo matemático e dos resultados frente às características da situação modelada.
- *Uso de recursos tecnológicos para construir e analisar modelos*: permeia diferentes fases do desenvolvimento das três atividades, em que recursos como GeoGebra, Excel e CurveExpert foram utilizados nos jogos de linguagem da compreensão da situação da realidade, coleta de informações, análise do comportamento dos dados, formulação de hipóteses, expressão do modelo matemático, resolução matemática do problema, obtenção de uma resposta para o problema e avaliação quantitativa dos modelos matemáticos. Nesses jogos, os recursos empregados possibilitaram aos estudantes visualizarem gráficos, realizarem simulações, cálculos e validar o modelo matemático. Em relação à aprendizagem, esse traço revela a capacidade de usar regras específicas da linguagem de cada *software* em articulação com as regras matemáticas e conhecimentos acerca da situação-problema. Além

disso, é importante que os estudantes reconheçam o potencial de cada recurso tecnológico, de modo a não fazer um uso equivocado.

Quando o foco está em uma abordagem holística da modelagem matemática, na qual os estudantes vivenciam o ciclo de modelagem como um todo, pode-se dizer que os cinco traços característicos da aprendizagem identificados na comparação dos jogos de linguagem que emergiram nas atividades desenvolvidas na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática mostram que a aprendizagem se caracteriza no uso de regras na identificação de uma situação-problema, de tradução entre jogos de linguagem distintos, na construção de modelos matemáticos, na avaliação do modelo matemático e no uso de recursos tecnológicos (Quadro 56).

Quadro 56 - Traços característicos da aprendizagem nas atividades em uma abordagem holística da modelagem

Traços característicos da aprendizagem	**Atividade**	**Fase**	**Jogos de linguagem**
Identificação de uma situação-problema	Salto de Paraquedas	Inteiração com a situação-problema	compreensão da situação realidade
			Formulação do problema
	Compra de um notebook	Inteiração com a situação-problema	Escolha de um tema passível de ser modelado
			Compreensão da situação da realidade
			Coleta de informações
			Formulação de um problema
		Construção do modelo matemático	Elaboração de índices para medir o desempenho e o preço dos notebooks
	Frota de veículos	Inteiração com a situação-problema	Escolha de um tema passível de ser modelado
			Compreensão da situação da realidade
			Coleta de informações
			Formulação de um problema
Tradução entre proposições na linguagem da situação-problema e proposições na linguagem matemática	Salto de Paraquedas	Construção do modelo matemático	matematização
			Formulação de um problema matemático
		Análise do modelo matemático	Resposta para o problema na linguagem da situação-problema
	Compra de um notebook	Construção do modelo matemático	Formulação de hipóteses
			Formulação de um problema matemático
		Análise do modelo matemático	Tomada de decisão de compra de um notebook em relação ao seu custo-benefício
	Frota de veículos	Construção do modelo matemático	Análise do comportamento dos dados
			Formulação de diferentes hipóteses acerca do comportamento das variáveis
			Tradução das hipóteses escritas em uma linguagem natural para uma linguagem matemática
Uso de regras matemáticas para construir modelos e obter uma solução matemática para o problema	Salto de Paraquedas	Construção do modelo matemático	Resolução do problema matemático
			Expressão do modelo matemático
	Compra de um notebook	Construção do modelo matemático	Elaboração de uma métrica para avaliar o custo-benefício de notebooks
			Resposta para o problema matemático
	Frota de veículos	Construção do modelo matemático	Elaboração de diferentes resoluções matemáticas
			Obtenção de respostas matemáticas para o problema

Uso de regras e técnicas para avaliação do modelo e interpretação dos resultados	Salto de Paraquedas	Análise do modelo matemático	Interpretação dos resultados em relação ao fenômeno
			validação do modelo matemático
	Compra de um notebook	Análise do modelo matemático	Avaliação qualitativa dos resultados
	Frota de veículos	Análise do modelo matemático	Avaliação quantitativa dos modelos matemáticos
			Avaliação comparativa dos modelos matemáticos
			Avaliação qualitativa dos modelos matemáticos
Uso de recursos tecnológicos para construir e analisar modelos	Salto de Paraquedas	Construção do modelo matemático	Expressão do modelo matemático
		Análise do modelo matemático	Resposta para o problema na linguagem da situação-problema
	Compra de um notebook	Inteiração com a situação-problema	Compreensão da situação da realidade
			Coleta de informações
		Construção do modelo matemático	Formulação de hipóteses
			Resposta para o problema matemático
	Frota de veículos	Inteiração com a situação-problema	Compreensão da situação da realidade
			Coleta de informações
		Construção do modelo matemático	Análise do comportamento dos dados
			Elaboração de diferentes resoluções matemáticas
			Obtenção de respostas matemáticas para o problema
		Análise do modelo matemático	Avaliação quantitativa dos modelos matemáticos

Fonte: os autores.

Ao olhar para a aprendizagem, sob uma perspectiva wittgensteiniana, nas atividades desenvolvidas, não se pode esperar uma definição única da aprendizagem, mas modos de caracterizá-la em cada contexto de uso a partir dos traços característicos identificados nos variados jogos de linguagem. Comparando os traços característicos associados aos jogos de linguagem identificados nas duas abordagens, pode-se ver que as diferenças em relação à aprendizagem nas atividades desenvolvidas se mostram no papel que os jogos de linguagem assumem nas ações dos estudantes.

Na análise de modelos, sinaliza-se que os jogos de linguagem constituídos, usando a terminologia de Wittgenstein, funcionam como objetos de comparação que permitem estruturar um modo de ver o fenômeno a partir da identificação do papel desempenhado pelas regras matemáticas e da aplicação dessas regras, do uso de recursos tecnológicos, do uso de técnicas para avaliação do modelo matemático e interpretação dos resultados. De fato, na atividade Salto de Paraquedas, os estudantes compararam diferentes abordagens para analisar as soluções das EDOs, uma qualitativa usando campos de direção e outra analítica. Já na atividade *Bungee Rocket*, compararam diferentes modelos matemáticos e suas implicações para o comportamento do fenômeno, utilizando para isso os gráficos das soluções e simulações a partir da modificação de valores dos parâmetros. A articulação desses jogos de linguagem depende de aspectos circunstanciais relacionados aos conceitos e métodos de resoluções que já tinham sido ensinados no decorrer da disciplina, do uso do *software* GeoGebra, das características da situação-problema e do modelo matemático. Esses aspectos quando vistos em conjunto nos fornece uma maneira de compreender a aprendizagem na análise de modelos como algo que se dá na constituição de diferentes modos de ver o fenômeno e os conceitos matemáticos da disciplina a partir do uso de regras nos jogos de linguagem que atuam como objetos de comparação.

Já na abordagem holística, os estudantes se engajam no ciclo completo de modelagem matemática e os jogos de linguagem envolvidos nas diferentes fases das atividades se mostram nas articulações de elementos normativos e descritivos do fazer modelagem, do uso da matemática, das especificidades da situação-problema e do uso de recursos tecnológicos. Os jogos de linguagem funcionam ora como condições para significação das ações dos estudantes, ora como sistemas de referência que orientam a tradução de expressões linguísticas entre diferentes jogos de linguagem, internos ou externos à matemática. Isso requer o domínio de diferentes técnicas associadas ao fazer modelagem matemática e ao uso de conceitos e procedimentos matemáticos para construir e analisar modelos. Nesse contexto, a aprendizagem não se limita ao uso de regras de uma determinada disciplina, mas se dá nas diferentes relações estabelecidas entre os jogos de linguagem, a partir de regras de tradução, de inferências e de descrição.

Em relação às semelhanças, em ambas as abordagens, a aprendizagem assume características associadas à construção de modos de ver os fenômenos e conceitos matemáticos. No caso da análise de modelos, esses aspectos se dão predominantemente em relação as especificidades da estrutura matemática subjacente aos modelos matemáticos e suas implicações para o fenômeno. Na abordagem holística, para além das especificidades da estrutura matemática, esses modos de ver se estabelecem também na condução de diferentes encaminhamentos, direcionados pela compreensão da situação-problema e a formulação do problema. Em ambos os casos, os estudantes utilizam regras e técnicas para avaliação do modelo matemático e para interpretação dos resultados em relação ao fenômeno e realizam traduções de um jogo de linguagem matemático para um jogo de linguagem da situação-problema.

Com base nessas conexões, pode-se perceber que diferentes aprendizagens podem ocorrer a partir dos jogos de linguagem que são jogados pelos estudantes no decorrer das atividades, seja com ênfase na análise de modelos ou na abordagem holística. Tais jogos de linguagem constituem essas aprendizagens e podem ser vistos também como constituintes do próprio fazer modelagem matemática, sugerindo uma compreensão da modelagem matemática como atividade linguística.

5.3 Modelagem matemática como atividade linguística: o que torna possível a aprendizagem?

Os jogos de linguagem identificados nas atividades nas duas disciplinas fornecem elementos para ver o uso da modelagem matemática em sala de aula como uma atividade linguística. Esse modo de ver encontra subsídios nas interlocuções na literatura entre a filosofia da linguagem e da matemática, com base em Wittgenstein, e a Modelagem Matemática na Educação Matemática (Almeida; Tortola, 2022; Almeida; Sousa; Tortola, 2021; Carvalho; Silveira, 2019; Caldeira; Costa; Cambi, 2020; Sousa; Almeida, 2021; Souza; Barbosa, 2014; 2019, entre outros).

Almeida e Tortola (2022) argumentam que os jogos de linguagem podem ser caracterizados como meios de ação dos estudantes em atividades de modelagem matemática. Eles constituem essas atividades e, segundo Caldeira, Costa e Cambi (2020), fornecem o sistema de referência para compreender os termos associados (matemática, realidade, modelo, matematização e inteiração) à modelagem matemática como intrinsecamente linguísticos, cujos significados se dão em seus usos.

É nas práticas de uso que as atividades de modelagem matemática ganham forma e significado. Esse modo de ver implica em considerar que o seu próprio fazer pode ser reorganizado a depender das configurações que os seus jogos de linguagem tomam nas diferentes práticas de uso. Isso não significa uma relativação radical do que se considera por modelagem matemática. O que a modelagem é constitui-se em sua gramática, no seu conjunto de usos subjacentes a diferentes perspectivas, entendimentos, objetivos e abordagens que se cristalizam em regras, semelhantes entre si, que orientam o seu fazer nas práticas pedagógicas. Isso se dá, pois, na perspectiva de Wittgenstein, as regras envolvidas nos jogos de linguagem não contêm em si todas as suas aplicações possíveis, mas diferentes aplicações de uma mesma regra podem ser feitas.

Esperar, portanto, uma definição única e universal sobre o que significa aprender em modelagem matemática, de modo independente dos jogos de linguagem que se constituem em cada um do seu fazer, é incorrer a uma atitude dogmática que leva a reduzir a aprendizagem, por exemplo: apenas à capacidade do pensamento de construir e manipular representações matemáticas e, a partir delas, produzir significações, resultado de uma concepção cartesiana do conhecimento, segundo Brito (2018); ou apenas à um saber fazer de forma independente de um saber quê, pressupondo que apenas a observação e experimentação empírica da matemática no fazer modelagem matemática é suficiente para que ocorra aprendizagem, como destacado por Tortola, Seki e Almeida (2022).

Esses reducionismos estão vinculados a uma concepção referencial da linguagem, cujo significado das proposições matemáticas e do conceito de aprendizagem se dá na descrição de objetos externos à linguagem, presentes em um mundo ideal, mental ou empírico. Evita-se tal atitude, quando estrutura-se uma visão panorâmica, em um primeiro movimento, a partir do ver relações internas entre os usos do termo aprendizagem na literatura, que mostra uma tecitura formada por uma rede de semelhanças de família entre os entendimentos de aprendizagem, entendimentos de modelagem matemática e as inferências sobre a aprendizagem, o que revela a ausência de uma definição única de aprendizagem na área; e em um segundo movimento, a partir dos diferentes jogos de linguagem associados à aprendizagem que surgem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em abordagens distintas, como a análise de modelos e a abordagem holística.

Ao ver esses jogos de linguagem, uma mesma situação-problema, com mesmos dados e modelos matemáticos podem constituir jogos de linguagens distintos nessas diferentes abordagens e, portanto, diferentes atividades de modelagem matemática e sinalizações da aprendizagem. Esse é o caso da atividade Salto de Paraquedas. No contexto da análise de dados, ao analisarem um modelo matemático pré-existente, o uso das regras matemáticas da disciplina se direcionou à análise qualitativa e analítica das soluções das EDOs e dos PVIs para realizar um tratamento matemático do problema, o que sinalizou à aprendizagem mediada pela comparação entre modos de ver o fenômeno e conceitos matemáticos da disciplina, comparando um modo usual com aqueles fornecidos pelo desenvolvimento da atividade. No contexto da abordagem holística, ao matematizarem a situação-problema e construírem o modelo matemático, os estudantes são inseridos em jogos de linguagem de tradução entre proposições empíricas e proposições matemáticas, cujas regras são desencadeadas a partir do modo de ver o fenômeno (nas hipóteses e seleção de variáveis) e no uso de diferentes conceitos e técnicas matemáticas, o que possibilitou aos estudantes uma aprendizagem que não consiste apenas em identificar regras, mas articulá-las em relações internas entre diferentes jogos de linguagem.

Esse exemplo mostra que a aprendizagem em modelagem matemática depende de como as regras associadas ao uso da matemática, das tecnologias digitais e do fazer modelagem matemática são seguidas nos diferentes jogos de linguagem caracterizados no decorrer das ações dos estudantes. As conexões entre esses jogos mostram que os aspectos cognitivos e emocionais correlatos ao processo de aprendizagem são internos à linguagem. Isso não significa negar a existência de estados mentais, mas apenas perceber que eles não são condições para que os estudantes aprendam em modelagem.

Em relação à matemática, a aplicação dogmática se dá quando pensa-se que os fundamentos do seu uso nas atividades de modelagem estão presentes: em um mundo platônico, ao propor uma possível separação entre o reino da matemática e uma suposta realidade independente, na qual revela seus padrões através da matemática, indicando uma concepção realista, como aponta Barbosa (2009); em estruturas mentais, conforme uma concepção intuicionista da matemática; em descrições de fatos de um mundo empírico, em que a matemática seria uma mera representação desses fatos, decorrente de uma concepção empirista da matemática, conforme sinalizado por Klüber, Tambarussi e Mutti (2021).

Uma consequência dessas imagens é considerar que a modelagem matemática segue pressupostos e encaminhamentos dos métodos das ciências naturais, cujas hipóteses seriam observações empíricas a serem testadas como verdadeiras ou falsas. Almeida, Sousa e Tortola (2021) argumentam que o termo 'hipótese' adquire outro significado no seu uso em atividades de modelagem. Segundo os autores, a formulação de hipóteses indica "um modo de ver dos alunos, vem ancorada em suas experiências e fornece elementos para as ações posteriores. Assim, alterações nas hipóteses transformam as ações e o constructo conceitual delas resultante bem como a compreensão da situação em estudo" (Almeida; Sousa; Tortola, 2021, p. 88). A hipótese, complementa os autores, "é uma maneira de perceber a realidade e não se estabiliza em um estado de dúvida completo" (Almeida; Sousa; Tortola, p. 88).

A visão panorâmica mostra que elementos normativos associados aos conceitos matemáticos e às informações da situação-problema estão relacionados às hipóteses. Isso se mostra nas atividades do movimento 2, principalmente na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, na qual os estudantes foram responsáveis por matematizar a situação-problema. Por exemplo, na atividade Salto de Paraquedas (MM_1), os estudantes se valeram de informações acerca das forças que agem sobre o paraquedista no decorrer do salto e utilizaram a segunda Lei de Newton como uma proposição gramatical, que fornece uma forma de descrição matemática da variação da velocidade do paraquedista como uma EDO de primeira ordem; na atividade Compra de um Notebook (MM_3) as hipóteses se basearam em critérios associados às experiências dos modeladores e à opinião de um especialista em tecnologias para classificação dos índices de desempenho e de preço dos notebooks, formando um critério normativo que fornece um modo de ver o custo-benefício de notebook. Na atividade Frota de Veículos (MM_6), os estudantes se basearam em informações acerca das especificidades do comportamento da frota de veículos e da população na cidade de

Londrina no decorrer do tempo e em experiências anteriores com modelos clássicos populacionais e da literatura para ver o fenômeno como assintótico.

Outra consequência é não ter clara a diferença entre os papeis exercidos pelas proposições empíricas e os exercidos pelas proposições matemáticas nas atividades. Isso parece evidenciar que nas traduções entre a linguagem natural da situação-problema e a linguagem matemática, há uma tradução literal de palavras ou símbolos, reduzindo a tradução, segundo Silveira (2014), a um simples processo de codificação e decodificação ente essas linguagens. Para a autora, "é preciso buscar o sentido das palavras que estão além dessa tradução, bem como o sentido das regras matemáticas que estão imersas no texto" (Silveira, 2015, p. 288).

Carvalho e Silveira (2019, p. 188) argumentam que como os jogos de linguagem das atividades de modelagem seguem regras convencionadas, os alunos utilizam "regras de interpretação da linguagem natural para que, em seguida, fizessem a tradução para a linguagem matemática, que também possui suas regras". Essas regras de interpretação estão associadas aquelas usadas pelos estudantes para perceber determinados aspectos do fenômeno, vendo-os de uma determinada maneira. Sob essa perspectiva, nos jogos de linguagem de tradução identificados no desenvolvimento das atividades, há em primeiro lugar, um ver-como que se baseia na interpretação de determinados aspectos do fenômeno e do uso de regras matemáticas de modo normativo, como formas de descrição e regras de inferência, para converter proposições empíricas em outras proposições de mesma natureza. Traduzir em modelagem matemática não é meramente descrever. De acordo com Oliveira (2007, p. 221), "quem traduz não apenas descreve, mas sim define o original – pois seleciona os aspectos considerados pertinentes em seu escopo enquanto objeto a ser traduzido".

Os usos da matemática se dão no uso de regras matemáticas convencionadas que, no âmbito da modelagem matemática, possibilita a organização de experiências (Souza; Barbosa, 2019) e a apropriação de significados (Sousa; Almeida, 2019), a partir da constituição de diferentes modos de ver e de suas comparações na construção e na análise de modelos matemáticos. Essas regras não dependem de um processo de intuição ou de abstração das situações da realidade, mas são aplicadas de acordo com técnicas, que são aprendidas por meio de treinamento. Nesse sentido, não se espera que os estudantes descubram por si só as regras matemáticas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. É necessário o aprendizado de modos de aplicá-las e isso requer que o professor mostre aos estudantes esses modos e estenda um convite para que eles sejam inseridos nos jogos de linguagem envolvidos no fazer modelagem matemática. Nas atividades descritas no movimento 2, as regras matemáticas foram empregadas a partir de técnicas já aprendidas anteriormente ou ensinadas no desenrolar das atividades, conforme necessidades identificadas pelo professor-pesquisador e pela professora-regente.

Em relação ao treinamento, por um lado, a modelagem pode ser uma parte dele, atuando em um segundo nível de condicionamento para aprendizagem matemática, nos termos definidos por Moreno (2018), ao fornecer novas situações de uso para regras matemáticas, como condições para constituição de seus significados, ampliando-se a gramática de uso, como é o caso das atividades desenvolvidas na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. Por outro lado, mas não independente de um treinamento matemático, ela pode ser o próprio treinamento, quando os estudantes aprendem as regras associadas ao fazer modelagem matemática a partir de uma familiarização gradativa para passar de modos de agir dependentes do professor para modos de agir autônomos, sendo capazes de realizar o ciclo completo em uma abordagem holística, este é caso das atividades na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Nesse segundo caso, um primeiro nível do treinamento consistirá no ensino ostensivo de termos específicos, como hipóteses, simplificação, modelo matemático, matematização, validação, mostrando suas aplicações em diferentes exemplos, sejam eles teóricos a partir de definições ou práticos, em diferentes atividades.

Diante de tais considerações, pode-se dizer que as condições para aprendizagem em modelagem matemática se dão no treinamento, em que os estudantes aprendem determinadas técnicas de aplicação das regras. Ao fazer isso os estudantes vão adquirindo tacitamente determinadas certezas baseadas nos modos de agir regulares na atividade matemática e de modelagem, que formam as condições para aquisição de conhecimento no decorrer das práticas. Essas certezas se constituem na cristalização dos usos das expressões linguísticas associadas aos diferentes jogos de linguagem em regras, formando o sistema de referência, de ordem gramatical, sob o qual os estudantes estabelecem critérios de correção para aplicação das regras matemáticas e das regras de modelagem matemática.

6 RESULTADOS: INDICATIVOS DA VISÃO PANORÂMICA

Como dito do início, a visão panorâmica estruturada na presente pesquisa consiste em aguçar o olho para ver concatenações acerca dos usos do termo aprendizagem na literatura e da aprendizagem em ação, de como ela ocorre nos diversos jogos de linguagem que se constituem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, ao longo de três movimentos, que em conjunto, constituem a visão panorâmica almejada.

No primeiro movimento, com a descrição dos usos do termo aprendizagem em publicações em periódicos na área de pesquisa da Modelagem Matemática na Educação Matemática, com foco nos entendimentos de aprendizagem e em inferências produzidas nos textos a partir das ações de estudantes acerca do conteúdo, dos meios e condições da aprendizagem em modelagem matemática, diferentes traços característicos foram identificados, que mostram, em primeiro lugar, que a aprendizagem, como conceituada na literatura, tem natureza cognitiva, se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas e é condicionada pela linguagem, cultura e práticas. Em segundo lugar, mostram que, em atividades de modelagem matemática, os estudantes aprendem: conteúdos matemáticos; não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas; a resolver problemas usando modelagem matemática; a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões; competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática; a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares. Mostra-se também que a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática.

Ao relacionar esses traços característicos com os entendimentos de modelagem matemática dos textos, possibilitou-se olhar para o conceito de aprendizagem nessa área como uma tecitura de semelhanças de família, que indica a necessidade de considerar o papel da linguagem na aprendizagem dos estudantes, com a finalidade de evitar uma atitude dogmática que privilegia puramente aspectos cognitivos ou sociais, como pares dicotômicos. Essa tecitura mostra uma complicada rede de relações acerca de diferentes aspectos que formam uma *fisionomia* de como a aprendizagem tem sido caracterizada na área.

Destaca-se na tecitura que diferentes teorias são utilizadas para deliberar a respeito do tema aprendizagem: perspectivas cognitivistas que focam na cognição dos indivíduos, nos seus estilos de aprendizagem e no modo como constroem conhecimento e atribuem significados; perspectivas interacionistas, que discutem a aprendizagem com base nas interações entre professor e estudantes e outros elementos didáticos da prática pedagógica; e perspectivas sociais que estudam o papel da linguagem, de elementos culturais e das práticas sociais na aprendizagem. Essas perspectivas sugerem diferentes modos de ver a aprendizagem. Contudo, quando descoladas das ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática, podem levar a uma concepção metafísica acerca da aprendizagem, atribuindo a esse conceito um papel referencial, cujo significado estaria naquilo que o conceito representa, presente em no mundo físico, mental ou ideal.

No movimento 2, ao seguir a orientação de Wittgenstein, de conduzir o emprego metafísico das palavras (aprendizagem) de volta para seu emprego cotidiano, que no caso da presente pesquisa, podem ser entendidas como as práticas de modelagem matemática, dirige-se o olhar para a aprendizagem em jogos de linguagem que se constituem nas atividades desenvolvidas em dois contextos educacionais: a disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e a disciplina Modelagem Matemática na perspectiva de Educação Matemática de um curso de Licenciatura em Matemática.

Dispondo de abordagens distintas em relação ao fazer modelagem em cada um desses contextos, denominadas como análise de modelos e abordagem holísticas, respectivamente, a descrição das ações dos estudantes e a identificação dos jogos de linguagem, quando comparados e postos em diálogo no movimento 3, sinalizam para diferentes modos de ver a aprendizagem mediada por modelos matemáticos.

Na análise de modelos, a aprendizagem se mostra na identificação do papel das regras matemáticas no uso do modelo matemático, na aplicação de regras matemáticas para obter uma solução para o problema e no uso de recursos tecnológicos para análise do modelo. Nessas ações, os jogos de linguagem funcionam como objetos de comparação que permitem estruturar um modo de ver o fenômeno ao fornecerem aos estudantes possibilidades para o uso de conceitos da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias em situações diferentes daquelas estritamente matemáticas. Os estudantes se apropriam de outros significados para esses conceitos, a partir de novos usos, ampliando-se a rede de significados subjacentes à aprendizagem de outras formas de aplicar as regras matemáticas da disciplina.

Na abordagem holística, em que os estudantes se engajam no ciclo completo de modelagem, na inteiração com a situação-problema, construção e análise de modelos matemáticos, a aprendizagem se mostra na identificação de uma situação-problema*,* na tradução entre proposições na linguagem da situação-problema e proposições na linguagem matemática, no uso de regras matemáticas para construir modelos e obter uma solução matemática para o problema, no uso de regras e técnicas para avaliação do modelo e interpretação dos resultados e no uso de recursos tecnológicos para construir e analisar modelos. Nessa abordagem, os jogos de linguagem fornecem condições para a significação das ações dos estudantes e atuam como sistemas de referência para o uso de regras matemáticas e para a tradução entre proposições de diferentes linguagens. É na interlocução entre os diferentes jogos de linguagem, a partir de regras de tradução, de inferências e de descrição, que os estudantes aprendem conceitos matemáticos, da situação-problema e a resolver problemas usando a modelagem matemática.

Esses modos de ver a aprendizagem nessas duas abordagens nos mostra que em cada contexto de uso podemos caracterizar a aprendizagem de uma maneira diferente, ou seja, diferentes aprendizagens, que guardam semelhanças de família entre si, uma vez que os jogos de linguagem se distinguem nesses diferentes modos de fazer modelagem matemática. Essa caracterização da aprendizagem se distancia de perspectivas que buscam uma generalização para o que é aprendizagem e como ela se dá em atividades de modelagem matemática, na medida em que os jogos de linguagem que sinalizam essa aprendizagem, são circunstanciais e provisórios, e podem ser outros em outras práticas de uso.

No que tange às relações entre o movimento 1 e o movimento 2, estabelecidas no movimento 3, estas propiciam aguçar o olhar para ver os seguintes detalhes da aprendizagem em modelagem matemática:

- Tanto os fatores externos (associados às interações) quanto os fatores internos (percepção, modos de ver, antecipação, interesse, disposição) são mediados por jogos de linguagem, que dispõem de critérios públicos de uma forma de vida para estabelecer relações entre eles, dissolvendo a dicotomia interno|externo;
- A aprendizagem de conteúdos matemáticos e de outras áreas do conhecimento em modelagem matemática se dão no uso de regras matemáticas e nas suas funções desempenhadas em cada contexto de uso;
- A mudança de atitude que a modelagem matemática promove é da atitude em considerar outras maneiras de ver o fenômeno e os conceitos matemáticos a partir do uso de regras e técnicas convencionadas, essa mudança pode promover a criticidade quando outras maneiras de aplicar as regras são imaginadas, levando à introdução de novas regras e paradigmas que formatam a nossa maneira de ver o mundo;
- O interesse e a disposição em modelagem matemática não são meramente estados psicológicos, mas se dão nos mais variados jogos de linguagem que

se constituem nas atividades e são expressos por meio do uso de conceitos;

- Ser competente em modelagem matemática e no uso de recursos tecnológicos nesse tipo de atividade não diz respeito ao uso do termo competência como descrição de um estado mental, mas, antes de tudo, implica aprender as regras dos jogos de linguagem por meio de treinamento para que se possa tornar-se um habilidoso nessa prática.

Esses resultados da visão panorâmica estruturada indicam que os diferentes fatores que influenciam a aprendizagem em modelagem matemática são articulados no interior de jogos de linguagem, que quando postos em diálogo, rompem com dicotomias como interno|externo, saber fazer|saber quê e utilitarismo|formalismo que circundam as discussões acerca da temática de aprendizagem na literatura. De fato, os jogos de linguagem podem ser vistos como atividades linguísticas guiadas por regras, que articulam linguagem, pensamento e mundo, de maneira que os aspectos, que são geralmente colocados em pares dicotômicos, são interdependentes e dependem do uso de uma ou mais regras que fazem parte da gramática de usos e são adquiridas ao longo de diversas práticas.

Sob essa ótica, as condições que tornam possível a aprendizagem são internas às próprias práticas de modelagem, na inserção dos estudantes nos diversos jogos de linguagem, mediante a aquisição de regras e modos de segui-las, valendo-se para isso de treinamento, na qual a modelagem matemática pode ser uma parte dele ou ser o próprio treinamento, a depender do objetivo pedagógico associado. É nesse de processo de uso de conceitos matemáticos e procedimentos do fazer modelagem em diferentes situações e atividades, que os estudantes vão paulatinamente adquirindo certezas, que se cristalizam a partir da regularidade nos modos de agir no uso da matemática e na modelagem, formando o sistema de referência, sob o qual critérios de correção para a aplicação de regras são estabelecidos e passam a orientar as ações dos estudantes.

Ao considerar as condições para a aprendizagem como sendo intrinsicamente linguísticas, evita-se aplicações dogmáticas de imagens da matemática (realistas, empiristas ou idealistas), da linguagem e de termos associados à modelagem matemática (como hipóteses e modelos matemáticos), que levam as crenças ingênuas de considerar que apenas o fazer modelagem leva a aprendizagem ou que aprender matemática reduz na capacidade de manipulação de representações matemáticas. Enquanto atividade linguística, a modelagem matemática envolve regras, cujas aplicações dependem do domínio de técnicas e, portanto, não são descobertas ou de alguma maneira intuídas pelos estudantes. Cabe ao professor, mestre da prática, quando necessário mostrar como seguir essas regras para que os estudantes passem a agir de forma autônoma, em algum momento, nessas atividades.

Nas diversas definições da aprendizagem, uma característica que parece se evidenciar nas diferentes teorizações existentes é a de que *aprendizagem implica em mudança*, seja comportamental, cognitiva, social ou biológica. Considerando-se a visão panorâmica estruturada, parece ser natural perguntar: que mudança seria essa promovida pela aprendizagem em atividades de modelagem matemática?

Evitando-se pontos de vista dogmáticos e tomando a modelagem matemática como uma atividade linguística, que ganha forma e significado nas suas práticas de uso, vê-se que aquilo que torna possível aprender em atividades de modelagem matemática não se restringe a algo de natureza extralinguística, mas consiste em um conjunto amplo de ações, finalidades, conhecimentos, ambientes, regras, entre outros aspectos, que caracterizam jogos de linguagem com os quais os estudantes precisam lidar no desenvolvimento desse tipo de atividade.

A mudança que se almeja na aprendizagem em atividades de modelagem é, dentre outras coisas, uma mudança no modo de ver o mundo e os conceitos matemáticos. Essa mudança não implica em abandonar o modo de ver antigo, mas uma ampliação desse modo de ver é realizada a partir da aquisição de outros modos de ver que podem ser adquiridos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Ocorre uma ampliação da gramática interna dos estudantes, em que imagens do mundo são formadas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa, buscou-se *estruturar uma visão panorâmica da aprendizagem em atividades de modelagem matemática a partir de uma perspectiva wittgensteiniana*. Com essa visão panorâmica, buscou-se ao longo do texto, olhar para as relações internas entre os usos do termo aprendizagem na literatura e para os jogos de linguagem que se constituem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, de acordo com abordagens distintas do fazer modelagem. Ao fazer isso, diferentes modos de ver a aprendizagem na região de inquérito da pesquisa puderam ser identificados, que mostram uma maneira de evitar aplicações dogmáticas de imagens que se constituem quando se discute as questões: O que é aprendizagem em atividades de modelagem matemática? Como se dá essa aprendizagem? Que condições a tornam possível?

Duas dessas imagens são indicadas e criticadas por Brito (2018) e Tortola, Seki e Almeida (2022). A primeira diz respeito a ideia de a aprendizagem fundamenta-se na concepção cartesiana do conhecimento, que postula uma dualidade entre sujeito e objeto, cuja aprendizagem se caracteriza na capacidade do pensamento de construir e manipular representações matemáticas e, a partir delas, produzir significações (Brito, 2018). A segunda imagem é aquela em que pondera um privilegiamento do uso empírico da matemática, em detrimento do seu uso gramatical, em que a aprendizagem é vista apenas como um saber-fazer (Tortola; Seki; Almeida, 2022).

A aplicação dogmática dessas imagens gera o fortalecimento de dicotomias como: empírico|gramatical em relação aos usos da matemática; saber fazer| saber quê associada à caracterização da aprendizagem; interno|externo, associada à separação entre pensamento e linguagem. Dilui-se tais dicotomias, por meio da visão panorâmica, ao considerar como esses aspectos se interrelacionam nos jogos de linguagem, evidenciando conexões entre os diferentes usos do termo aprendizagem e na aprendizagem em ação em atividades de modelagem matemática. O resultado que se obtém não é uma nova teorização, mas se aproxima de uma atitude, a de considerar o funcionamento dos usos do termo aprendizagem e da aprendizagem em ação em uma variedade de práticas de uso. É a falta de compreensão da aprendizagem em diferentes jogos de linguagem que leva à obstrução da visão clara de sua significação e a um esvaziamento epistêmico de sua caracterização na literatura.

Para estruturar tal visão panorâmica, o percurso metodológico da pesquisa se inspira em procedimentos terapêuticos elaborados a partir da terapia filosófica de Wittgenstein. Esses procedimentos, organizados por Moreno (2000), se referem a descrições e exemplificações acerca dos usos da palavra associada a um conceito em situações de uso efetivas ou inusitadas, mas não segue pressupostos de um método padronizado, uma vez que o emprego de uma atitude terapêutica depende das especificidades associadas ao tema em estudo.

Considerando-se o tema aprendizagem em atividades de modelagem matemática, o percurso metodológico se organiza em três movimentos. No primeiro movimento, descreve-se os usos do termo aprendizagem em uma amostra da literatura selecionada em vinte e dois artigos publicados sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática nos últimos cinco anos no portal Periódicos, da CAPES. Essa descrição dirigiu-se para as seguintes questões: Como a aprendizagem é entendida na literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática?; O que se pode inferir das ações dos estudantes relativamente à aprendizagem em atividades de modelagem matemática?; Que relações podem ser estabelecidas entre os entendimentos de modelagem matemática, os entendimentos de aprendizagem e as inferências das ações dos estudantes acerca da aprendizagem em atividades de modelagem matemática nos textos selecionados?

Essa descrição resultou na formação de uma tecitura, que mostra uma rede de semelhanças de família entre os traços característicos dos entendimentos de aprendizagem, das inferências acerca da aprendizagem e os entendimentos de modelagem matemática. Ao olhar para essa tecitura percebe-se que na literatura, os entendimentos de aprendizagem se conectam em três traços característicos: *aprendizagem tem natureza cognitiva*, cujo foco se dirige para ações cognitivas dos estudantes para caracterizar a aprendizagem em atividades de modelagem matemática em termos do desenvolvimento de competências e de construção de conhecimentos; *aprendizagem se dá nas interações do indivíduo com o meio, com as pessoas, com as coisas*, na qual o foco da aprendizagem se dá nas interações entre os estudantes e entre estudantes e professor e nas interações do estudante com o meio (*milieu*); *aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas*, que foca em condições externas associadas à linguagem, à cultura e aos aspectos envolvidos nas práticas escolares.

Para evitar uma atitude dogmática sobre o que se entende por aprendizagem, faz-se importante que esses traços característicos não sejam considerados de forma isolada, mas de modo interrelacionado, sem ponderar a necessidade de fundamentos extralinguísticos para a aprendizagem. Ao buscar ver essas relações, sob uma perspectiva wittgensteiniana, aspectos cognitivos, psicológicos, interacionais são constituídos nos jogos de linguagem que fornecem as condições e os critérios públicos para deliberar acerca da aprendizagem. Sob uma perspectiva wittgensteiniana, ao direcionar nossa atenção para o papel que a linguagem desempenha na aprendizagem, pode-se ver que aquilo que torna possível a aprendizagem e a significação encontram sua origem nas práticas de uso da linguagem em uma comunidade, construídas nos modos de agir regulares dos seus usuários.

No que tange às inferências dos textos acerca da aprendizagem em atividades de modelagem matemática a partir das ações dos estudantes, o movimento 1 mostra que os traços característicos identificados se assemelham aquilo que a literatura denomina de justificativas para inserção da modelagem matemática em práticas escolares (Blum, 2015). Em geral, os traços característicos podem ser vistos de modo relacionado à duas razões indicadas por Niss e Blum (2020), modelagem para o bem da matemática e a matemática para o bem da modelagem matemática.

Na modelagem para o bem da matemática, mostra-se na literatura que: *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos*; a *aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e a motivação em aprender matemática, bem como a disposição para fazer modelagem matemática*; *os estudantes aprendem a tomar um posicionamento específico nas práticas escolares*. Sob esse ponto de vista, a modelagem é considerada um meio para a aprendizagem matemática e está intimamente relacionada à justificativa psicológica.

Na matemática para o bem da modelagem, mostra-se na literatura que *os estudantes aprendem a ser críticos, reflexivos e criativos e desenvolvem a capacidade de tomada de decisões*; *os estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas*; *os estudantes aprendem a resolver problemas usando modelagem matemática; a aprendizagem em atividades de modelagem matemática promove o desenvolvimento nos estudantes de competências e habilidades de comunicação, argumentação, colaboração e fluência tecnomatemática*. Nessa segunda ótica, matemática é vista como ferramenta para o desenvolvimento de competências de modelagem matemática e fornece justificativas de natureza pragmática, formativa e cultural.

A tecitura mostra uma predominância de um enfoque na modelagem para o bem da matemática. Há, assim, um indicativo da necessidade de mais pesquisas na literatura que busquem elucidar como a modelagem matemática promove o desenvolvimento de aspectos formativos, críticos e culturais.

No movimento dois, apresenta-se uma descrição dos jogos de linguagem que constituem a aprendizagem em atividades de modelagem matemática. Esses jogos de linguagem funcionam como uma ferramenta terapêutica para olhar para o modo como a aprendizagem se dá nessas atividades a partir das funções que a linguagem desempenha na aprendizagem em ação. Visando uma variabilidade em termos de jogos de linguagem, dois modos distintos de fazer modelagem matemática foram considerados, a análise de modelos na disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e a abordagem holística na disciplina Modelagem Matemática na perspectiva de Educação Matemática de um curso de Licenciatura em Matemática.

Na primeira abordagem, os estudantes analisaram modelos matemáticos previamente formulados pelo professor-pesquisador a respeito dos fenômenos *Salto de Paraquedas* e *Bungee Rocket*. Os jogos de linguagem nessas atividades, aos serem comparados entre si no movimento 3, mostram que a aprendizagem na análise de modelos possui os seguintes traços característicos: *Identificação do papel das regras matemáticas no uso do modelo matemático*; *Aplicação de regras matemáticas para obter uma solução para o problema*; *Uso de recursos tecnológicos para análise do modelo*; *Uso de regras e técnicas para avaliação do modelo e interpretação dos resultados*. Mediante a esses traços, um modo de ver a aprendizagem nessa abordagem é como ampliação do escopo de situações em que as regras matemáticas da disciplina podem ser aplicadas. Nessa ampliação os conceitos matemáticos adquirem novos usos e, portanto, novos significados para os estudantes.

Essas características se mostram no papel desempenhado dos jogos de linguagem que constituem aprendizagem nas atividades de análise de modelos, como objetos de comparação em que os estudantes podem comparar diferentes abordagens para análise um modelo matemático ou comparar modelos matemáticos entre si, em vistas a deliberar acerca do fenômeno e dos aspectos associados às Equações Diferenciais Ordinárias.

Na abordagem holística, os estudantes se inteiraram da situação-problema, construíram e analisaram modelos matemáticos nas atividades *Salto de Paraquedas*, *Compra de um Notebook* e *Frota de Veículos*. Comparando os jogos de linguagem identificados nas três atividades entre si no movimento 3, a aprendizagem se caracteriza nos traços: *Identificação de uma situação-problema*; *Tradução entre proposições na linguagem da situação-problema e proposições na linguagem matemática*; *Uso de regras matemáticas para construir modelos e obter uma solução matemática para o problema*; *Uso de regras e técnicas para avaliação do modelo e interpretação dos resultados*; *Uso de recursos tecnológicos para construir e analisar modelos*. A aprendizagem nessa abordagem se dá nas diferentes relações estabelecidas entre os jogos de linguagem, a partir de regras de tradução, de inferências e de descrição. Esses jogos de linguagem se mostram nas articulações de elementos normativos e descritivos do fazer modelagem, do uso da matemática, das especificidades da situação-problema e do uso de recursos tecnológicos. Eles podem desempenhar o papel, ora como condição para significação das ações dos estudantes, ora como sistema de referência que orientam essas ações.

Em paralelo com a literatura que versa sobre a construção e a análise de modelos em modelagem matemática (Almeida, 2022; Almeida; Castro; Silva, 2021; Niss; Blum, 2020; Javaroni; Soares, 2012; Soares; Borba, 2011; 2014, entre outros), a presente pesquisa mostra que interfaces podem ser estabelecidas entre a análise de modelos matemáticos e a modelagem matemática ao considerar que os diferentes modos de fazer modelagem dependem das configurações que os seus jogos de linguagem tomam nas diferentes práticas de uso. Como dito no movimento 3, é nas práticas de uso que as atividades de modelagem matemática ganham forma e significado. Assim, a abordagem holística e a análise de modelos enquanto diferentes formas de fazer modelagem matemática podem constituir diferentes tipos de aprendizagem, semelhantes entre si, que se caracterizam nas ações dos estudantes.

Dentre os resultados obtidos com o movimento 3, ao colocar em diálogo o movimento 1 e o movimento 2, ressalta-se que, na visão panorâmica estruturada, as condições que tornam possível a aprendizagem em modelagem matemática são internas aos jogos de linguagem que constituem à própria prática de modelagem, não sendo necessário recorrer a elementos extralinguísticos, associados à estados mentais, fatores motivacionais ou comportamentais. Esse resultado indica a necessidade de direcionar à atenção para as práticas de modelagem, como sendo elas próprias fonte de condições linguísticas para a aprendizagem, indo ao encontro da pesquisa de Brito (2018).

Em linhas gerais, com essa pesquisa, tem-se como pretensão, para além de um modo de compreender a aprendizagem em modelagem, mostrar um modo de operar com esse conceito em pesquisas na área, que não se fecha em procedimentos padronizados, mas adota-se, antes de tudo, uma atitude preventiva, que busca evitar generalizações e aplicações exclusivistas de imagens acerca da matemática, da modelagem matemática e da própria aprendizagem. Trata-se de uma tentativa de superar a resistência de vontade de considerar outros modos de vê-la.

Como toda visão panorâmica, a apresentada nessa pesquisa não é definitiva, mas pode ser revisitada ou aprimorada de acordo com as necessidades associadas à investigação do tema aprendizagem. Nesse contexto, algumas questões podem ser formuladas para uma possível continuidade de pesquisa:

- Qual é o papel da normatividade de jogos de linguagem matemáticos no desenvolvimento de competências matemáticas e de modelagem matemática, com a finalidade de promover aos estudantes o aprender a resolver problemas, usando modelagem?
- Como as condições que tornam possível a aprendizagem, a partir de

entendimento de atividades de modelagem matemática como atividades linguísticas, podem ser discutidos em torno de aspectos pedagógicos e didáticos envolvidos na inserção dessas atividades em sala de aula?

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, João José R. L. O método entre o livro e o álbum (IF § 122). In: Moreno, A. R. (Org.) **Como ler o álbum?** Campinas: Unicamp – Coleção CLE, 2009, p. 205-228.

ALMEIDA, João José R. L. Alguns Pensamentos a Respeito de Wittgenstein e Educação. **Educação & Realidade**, v. 45, n. 3, p. 1-23, 2020.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da.; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werde de. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 42, n. 2, p. 121-145, 2022.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werde de; CASTRO, Élida Maria Velozo de; SILVA, Maria Helena S. da Silva. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria**: **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; TORTOLA, Emerson; MERLI, Renato Francisco. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, ago. 2012.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; TORTOLA, Emerson. Labirintos da linguagem: jogos de linguagem como meio de ação em atividades de modelagem matemática. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 24, n. 2, p. 219-243, 2022.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SOUSA, Bárbara Nivalda Palharini Alvim; TORTOLA, Emerson. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, [S.L.], v. 23, n. 5, p. 66-93, 15 out. 2021.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**. Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SEKI, Jeferson Takeo Padoan. A 'compreensão' em Wittgenstein: repercussões no ensino de ciências e de matemática. **Acta Scientiarum. Education**, v. 43, 2021.

ALMEIDA; Lourdes Maria Werle de. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 19-30, apr. 2018.

ALZERI, Ailson Lopes. Cubagem de Terras e a Integral de Riemann: uma análise crítica dos modelos. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 26, n. 70, p. 47-61, jan. 2021.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BLUM, Werner. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, 2015. p. 73-96.

BLUM, Werner; NISS, Mogens. Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Matematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BLUM, Werner; LEIß, Dominik. How do students' and teachers deal with modelling problems? In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (Eds.). **Mathematical Modelling**: Education, Engineering and Economics Chichester: Horwood, 2007, p. 222-231.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião anual da Anped, 24, 2001, Caxambu. **Anais**... Rio de Janeiro: ANPED, 2001. CD-ROM.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, Salvador, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BORSSOI, Adriana Helena. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. 2013. 256 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BORSSOI, Adriana Helena; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da; FERRUZZI, Elaine Cristina. Aprendizagem colaborativa no contexto de uma atividade de modelagem matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 937-958, 2021.

BRAGA, Roberta Modesto. **Aprendizagem em Modelagem Matemática pelas Interações dos Elementos de Um Sistema de Atividade na Perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström.** 2015. 133 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

BRAZ, Bárbara Cândido. **Contribuições da Modelagem Matemática na constituição de Comunidades de Prática Locais: Um estudo com alunos do Curso de Formação de Docentes**. 2014, 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação para o Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

BRITO, Dirceu dos Santos. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática**: Uma Compreensão Fenomenológica. 2018. 205 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

BRITO, Dirceu dos Santos; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Actualidades Investigativas en Educación**, v. 21, n. 1, p. 169-198, 2021.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 1. p. 35-113.

BRYMAN, Alan. **Social research methods**. 4° ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. Editora Livraria da Física, 2016.

CAHYONO, Adi Nur et al. Learning Mathematical Modelling with Augmented Reality Mobile Math Trails Program: How Can It Work?. **Journal on Mathematics Education**, v. 11, n. 2, p. 181-192, 2020.

CALDEIRA, Ademir Donizeti; DE COSTA, Daniana; CAMBI, Betina. Modelagem matemática e filosofia da linguagem: algumas articulações. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 1, p. 1-21, 2020.

CAMPOS, Ilaine da Silva; ARAÚJO, Jussara de Loiola. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: problematizando a dialética pesquisador| professor. **Acta Scientiae**, v. 17, n. 2, p. 324–339, 2015.

CANTORAL, Ricardo; MORENO-DURAZO, Angélica; CABALLERO-PÉREZ, Mario. Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. **ZDM**, v. 50, p. 77-89, 2018.

CARVALHO, Daniel Santos de; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. Jogos de linguagem na perspectiva de Wittgenstein evidenciados em atividades de Modelagem Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 5, p. 171-190, 2019.

CEVIKBAS, Mustafa; KAISER, Gabriele; SCHUKAJLOW, Stanislaw. A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. **Educational Studies In Mathematics**, v. 109, n. 2, p. 205-236, 15 out. 2021.

CRUZ, Wallison Fernando Nonato da; ARAÚJO, Jussara de Loiola. Concepções de aprendizagem presentes nos trabalhos apresentados na X CNMEM. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2017, Maringá - PR. **Anais**... 2017. CD-ROM.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DOERR, Helen M.; ÄRLEBÄCK, Jonas B.; MISFELDT, Morten. Representations of Modelling in Mathematics Education. In: STILLMAN, G., BLUM, W., KAISER, G. (Eds.).

Mathematical Modelling and Applications: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2017, p.71-81.

ELFRINGHOFF, Mareike Schulze; SCHUKAJLOW, Stanislaw. What makes a modelling problem interesting? Sources of situational interest in modelling problems. **Quadrante**, v. 30, n. 1, p. 8-30, 2021.

FERRI, Rita Borromeo. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer, 2018.

FERRI, Rita Borromeo; LESH, Richard. Should Interpretation Systems Be Considered to Be Models if They Only Function Implicitly? In: STILLMAN, G. A. et al. (Ed.). **Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice**. 15. ed. New York: Springer, 2013. p. 57-67.

FERRUZZI, Elaine Cristina. **Interações discursivas e aprendizagem em Modelagem Matemática**. 2011. 218 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

FIGUEIREDO, Denise Fabiana. **Uma proposta de avaliação de aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática na sala de aula**. 2013. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

FLOYD, Juliet. Das Überraschende: Wittgenstein sobre o surpreendente em Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 24, n. 38, p. 127-170, 2011.

GALBRAITH, Peter. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GALBRAITH, Peter; STILLMAN, Gloria Ann; BROWN, Jill P. The primacy of 'noticing': A key to successful modelling. **Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education**, p. 83-94, 2017.

GERRARD, Steve. A philosophy of mathematics between two camps. In: **The Cambridge Companion to Wittgenstein**. SLUGA, Hans; STERN, David G. (ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1996, pp 171-197.

GEIGER, Vince. Master, servant, partner and extension of self: A finer grained view of this taxonomy. In **Building Connections, Theory, Research and Practice: Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.** Mathematics Education Research Group of Australasia, 2005, p. 369-376.

GOMES, Joice Caroline Sander Pierobon; KOWALEK, Rosângela Maria; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Concepções de Aprendizagem na Modelagem Matemática: um olhar para dois eventos da área. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2022, União da Vitória. **Anais...** União da Vitória: UNESPAR/SBEM-PR, 2022. p. 1-14.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a

Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Caderno de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, SP, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In: IMAGUIRE, Guido; MONTENEGRO, M. A. P.; PEQUENO, T. (ORG.). **Colóquio Wittgenstein** – Série Filosofia. 1ª ed. Fortaleza: UFC, 2006, v. 3, p. 73-93.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, v. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A inserção nos jogos de linguagem da perspectiva de uma epistemologia do uso. **International Studies on Law and Education**, v. 15, p. 63-70, 2013.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. **Ixtli: Revista Latinoamericana de Filosofía de la Educación**, v. 2, n. 4, p. 299-315, 2015.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Fundamentos epistemológicos da educação de uma perspectiva wittgensteiniana. In: AZIZE, Rafael Lopes (org.). **Wittgenstein nas Américas**: legado e convergências. Salvador: Edufba, 2018. p. 53-72.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Uma Reflexão sobre o Sentido Linguístico Rumo a uma Pedagogia de Inspiração Wittgensteiniana. **Educação & Realidade**, v. 45, n. 3, 2020.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Apontamentos para o ensino da matemática escolar sob inspiração wittgensteiniana. **Revista de Educação Matemática**, v. 20, p. 1-20, 2023.

GREENO, James G.; COLLINS, Allan M.; RESNICK, Lauren B. Cognition and Learning. In: BERLINER, D. C.; CALFEE, R. C. (ed.). **Handbook of educational psychology**. New York: Macmillan, 1996. p. 15-46.

GREEFRATH, Gilbert. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**. Hamburgo: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Ed.), 2011. p. 301–304.

GREEFRATH, Gilbert; SILLER, H. S. Modelling and simulation with the help of digital tools. In **Mathematical modelling and applications**. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 529-539.

GREEFRATH, Gilbert; HERTLEIF, Corinna; SILLER, Hans-Stefan. Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 233-244, 2018.

HIDI, Suzanne; RENNINGER, K. Ann. The four-phase model of interest development. **Educational psychologist**, v. 41, n. 2, p. 111-127, 2006.

HUF, Samuel Francisco; BURAK, Dionísio; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA EDUCAÇÃO DO CAMPO. **Educere et Educare**, v. 16, n. 38, p. 451-475, 2021.

HUF, Samuel; BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e relações com abordagens no processo de ensino e aprendizagem no contexto do tema imposto. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 12, n. 2, p. 163-175, 2017.

ILLERIS, Knud. **Teorias contemporâneas da aprendizagem**. Porto Alegre: Penso, 2013.

JAVARONI, Sueli Liberatti; SOARES, Débora da Silva. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 260-275, 2012.

JABLONLA, Eva; GELLERT, Uwe. Mathematisation – demathematisation. In: GELLERT, U.; JABLONKA, E. (Eds.) **Mathematisation and demathematisation**: social, philosophical and educational ramifications. Rotterdam: Sense Publishers, 2007, p. 1-18.

JULIE, Cyril. Making relevance relevant in mathematics teacher education. In: **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)**. New York: Wiley [CD-ROM], 2002. p. 1-8.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KAISER, Gabriele. Modeling and modeling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), **Mathematical modeling (ICTMA 12): Education, engineering and economics.** Chichester, UK: Horwood, p. 110–119, 2007.

KNIJNIK, Gelsa. A ordem do discurso da matemática escolar e jogos de linguagem de outras formas de vida. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 22, 2017.

KHUSNA, H.; HERYANINGSIH, N. Y. The influence of mathematics learning using SAVI approach on junior high school students’ mathematical modelling ability. In: **Journal of Physics: Conference Series**. IOP Publishing, 2018. p. 012009.

KLÜBER, Tiago Emanuel; TAMBARUSSI, Carla Melli; MUTTI, Gabriele de Sousa Lins. Sobre o problema da representação na modelagem matemática na Educação Matemática... In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais...**Uberlândia(MG) Uberlândia, 2021

LITTIG, Jonisario et al. A Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e a Teoria da Situação Didática: identificando aproximações potencializadores da aprendizagem e do desenvolvimento do conhecimento reflexivo. **REnCiMa. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática**, v. 10, n. 1, p. 1-13, 2019.

LÓPEZ-REYES, Luis Javier; JIMÉNEZ-GUTIÉRREZ, Auria Lucia; COSTILLA-LÓPEZ, Diana. The Effects of Blended Learning on the Performance of Engineering Students in Mathematical Modeling. **Education Sciences**, v. 12, n. 12, p. 931, 2022.

LOWE, James; CARTER, Merilyn; COOPER, Tom. Mathematical modelling in the junior secondary years: An approach incorporating mathematical technology. **Australian Mathematics Teacher, The**, v. 74, n. 1, p. 4-12, 2018.

LUNTLEY, Michael. Wittgenstein and the Path of Learning. In: PETERS, Michael A.; STICKNEY, Jeff (ed.). **A Companion to Wittgenstein on Education: Pedagogical Investigations**. Singapore: Springer, 2017. p. 437-451.

MAGNUS, Maria Carolina Machado; CALDEIRA, Ademir Donizeti; DUARTE, Claudia Glavam. Do Modelo Matemático à Modelagem Matemática: descontinuidades históricas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 33, n. 65, p. 1215-1232, 2019.

MARTINS, Bianca de Oliveira; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. MODELAGEM MATEMÁTICA: dos entendimentos às finalidades. **Vidya**, v. 41, n. 1, p. 113-128, 2021.

MEYER, João Frederico da Costa Azevedo. Modelagem Matemática: O desafio de se 'fazer' a Matemática da necessidade…. **Com A Palavra O Professor**, Vitória da Conquista (BA), v. 5, n. 11, p. 140-149, 2020.

MIGUEL, Antonio. Uma encenação terapêutica da Terapia Wittgensteiniana na condução de pesquisas historiográficas. **HISTEMAT**, v. 1, n. 1, p. 203-255, 2015.

MIGUEL, Antonio. Historiografia e terapia na cidade da linguagem de Wittgenstein. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n. 55 p. 368-389, 2016.

MORELLI, Alice. Wittgenstein on dispositions as abilities. A de-naturalized perspective. **Rivista Italiana di Filosofia del Linguaggio**, v. 12, n. 2, 2018.

MORENO, Arley Ramos. **Wittgenstein**: os labirintos da linguagem ensaio introdutório. Campinas: Moderna, 2000.

MORENO, Arley Ramos. Introdução a uma epistemologia do uso. **Caderno crh**, Salvador, v. 25, n. spe 02, p. 73-95, 2012.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: E.P.U., 2018.

MORENO, Arley. Ramos. **Wittgenstein**: através das imagens. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 1995.

MORENO, Arley. Ramos. Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista olhar**. Ano 4, n. 7, p. 93-139, jul-dez, 2003.

MORENO, Arley Ramos**. Introdução a uma pragmática filosófica**. Campinas: Editora Unicamp, 2005.

MORENO, Arley Ramos. For an epistemology of use: one aspect of the wittgensteinian concept of use: construction of the sign and constitution of meaning. In: AZIZE, Rafael Lopes (org.). **Wittgenstein nas Américas**: legado e convergências. Salvador: Edufba, 2018. p. 27-52.

MOURA, Luis Carlos; ALVES, Deive Barbosa. Modelagem Matemática para a Aprendizagem Significativa Crítica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 13, n. 4, p. 1-24, 2022.

NISS, Mogens; HΦJGAARD, Tomas. Mathematical competencies revisited. **Educational Studies in Mathematics**, p.9–28, 2019.

NISS, Mogens, Modelling a crucial aspect of students' mathematical modelling. R. Lesh *et al.* (Eds.), **Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies,** (ICTMA 13) (pp 43--60). New York: Springer, 2010.

NISS, Mogens; BLUM, Werner. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling.** London: Routledge, 2020.

OLIVEIRA, Camila Fogaça de. **A terapia de Wittgenstein e o conceito de função**: uma investigação com Modelagem Matemática. 2018. 215 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

OLIVEIRA, Wagner Teles de Oliveira. Os fatos, o Aprendizado e o Uso das Palavras. In: MORENO, Arley R. (ed.). **Wittgenstein - compreensão: adestramento, treinamento, definição**. Campinas: Coleção CLE, 2014. p. 93-110.

OLIVEIRA, Paulo. Wittgenstein e problemas da tradução. In: MORENO, Arley R. (ed.). **Wittgenstein**. Campinas: Coleção CLE, p. 175-244, 2007.

ORNEK, Funda. Models in Science Education: Applications of Models in Learning and Teaching Science. **International Journal Of Environmental & Science Education**, v. 3, n. 2, p. 35-45, 2008.

PERRENET, Jacob, ZWANEVELD, Bert. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v.1, n. 6, p. 3-21, 2012.

PIRES, Rogério Fernando; COSTA, Cássia Silva; BOIAGO, Carlos Eduardo Petronilho. Modelagem matemática para o estudo de função afim: uma possibilidade de aprendizagem a partir da conta de água. **INTERMATHS**, v. 1, n. 1, p. 77-100, 2020.

POLLAK, Henry Otto. The interaction between Mathematics and other school subjects, **New Trends in Mathematics Teaching**, Volume IV, Paris: UNESKO, 1979.

POLLAK, Henry Otto. Introduction: what is mathematical modeling? In: GOULD, H.; MURRAY, D. R.; SANFRATELLO, A. (Eds.). **Mathematical Modeling Handbook**. Bedford: Comap, 2012. p. 8-11.

POLLAK, Henry Otto. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

RAMÍREZ-MONTES, Guillermo; HENRIQUES, Ana; CARREIRA, Susana. Undergraduate students' learning of linear algebra through mathematical modelling routes. **Canadian**

Journal of Science, Mathematics and Technology Education, v. 21, n. 2, p. 357-377, 2021.

REHFELDT, Márcia Jussara Hepp et al. Modelagem matemática no ensino médio: uma possibilidade de aprendizagem a partir de contas de água. **REnCiMa. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática**, v. 9, n. 1, p. 103-121, 2018.

RYLE, Gilbert. Teaching and Training. In: **The Concept of Education (International Library of the Philosophy of Education Volume 17)**. Routledge, 2010. p. 80-89.

SEKI, Jeferson Takeo Padoan; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. A compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana. **Revista Paradigma**, v. 42, n. 1, p. 106-129, 2021.

SILVA, Cíntia da. **Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática**. 2018. 147f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, Silvana Costa; SILVA, Flaviana dos Santos; MADRUGA, Zulma Elizabete de Freitas. Software Modellus e Modelagem Matemática: um estudo sobre a aprendizagem de função quadrática. **Revista Thema**, v. 16, n. 4, p. 795-809, 2019.

SILVA, Silvana Costa; MADRUGA, Zulma Elizabete de; SILVA, Flaviana dos Santos. Modelagem Matemática como apoio ao ensino e aprendizagem de função quadrática. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, v. 16, n. 21, p. 101-118, 2019.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da; SILVA, Paulo Vilhena da.; TEIXEIRA JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro. A terapia filosófica wittgensteiniana: perspectivas para a Educação Matemática. **Educação, Ciência e Cultura**, v. 23, n. 1, p. 161-175, 2018.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 16, n. 1, p. 47-73, 2014.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Matemática, discurso e linguagem: Contribuições para a Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. – (Coleção contexto da ciência).

STICKNEY, Jeff. A Relevância de Wittgenstein para a Filosofia da Educação: reflexões pessoais sobre usos significativos do pós-fundacionalismo. **Educação & Realidade**, v. 45, n. 3, 2020.

STILLMAN, Gloria Ann; BROWN, Jill P.; GEIGER, Vince. Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT; M. S. (Eds.), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 93–104.

SOARES, Débora da Silva. **Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia: qual o papel do software**? 2012. 341f. Tese (doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SOARES, Débora da Silva. Model Analysis with Digital Technologies: a “hybrid approach”. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive in_uences. Cham: Springer, 2015. p. 453-463.

SOARES, Débora da Silva; BORBA, Marcelo de Carvalho. Fenômeno biológico, sistema dinâmico e noções de Cálculo I: uma proposta. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Londrina: Eduel, 2011. p. 227-248.

SOARES, Débora da Silva; BORBA, Marcelo de Carvalho. The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 575-587, 2014.

SOARES, Débora da Silva; VIER, Guilherme. Os diálogos em um ambiente de análise de modelos e tecnologias: queda de um objeto com resistência do ar. **Educere et Educare**, v. 12, n. 24, Jan./Abr. 2017

SOUZA, Elizabeth Gomes. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. 2012. 145 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.

SOUZA, Elizabeth Gomes; BARBOSA, Jonei Cerqueira. A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 22, n. 1, p. 39-66, 2019.

SOUZA, Elizabeth Gomes; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 31-58, jan./jun. 2014.

SOUZA, Elizabeth Gomes; TAMAYO, Carolina; BENTO, Marcia Maria. Ludwig Wittgenstein, Mathematics, Therapy and Life: research from the group on education, language and cultural practices in brazil. **The Mathematics Enthusiast**, v. 19, n. 1, p. 274-301, 2022.

SOUZA, Jerson Sandro Santos de. Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa: uma relação subjacente. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 241-247, 2021.

SOUSA, Emerson Silva de. de. **ANÁLISE DE MODELOS: UM MÉTODO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. 2019. 396 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

SOUSA, Emerson Silva de. de. Análise de modelos como um método de ensino de matemática na educação básica. **Práxis Educacional**, v. 17, n. 45, p. 1-22, 2021.

SOUSA, Emerson Silva de; VIALI, Lorí.; RAMOS, Maurivan Güntzel. Construção e análise de modelos exponenciais de forma significativa: uma experiência de ensino em sala de aula. **Revista Exitus**, v. 7, n. 2, p. 55, 2017.

SOUSA, Emerson Silva de; LARA, Lorí. Análise de Modelos: uma alternativa metodológica de ensino caracterizada por um grupo de professores do ensino básico. **Research, Society And Development**, v. 7, n. 4, p. 1-17, 2018.

SOUSA, Bárbara Nivalda Palharini Alvim; TORTOLA, Emerson. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de wittgenstein. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021. Cruzeiro do Sul Educacional.

SOUSA, Bárbara Nivalda Palharini Alvim; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Apropriação Linguística e Significado em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 33, n. 65, p. 1195-1214, dez. 2019.

SOUSA, Bárbara Nivalda Palharini Alvim; SEKI, Jeferson Takeo Padoan; MOREIRA, Caio Cesar Valêncio; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. MODELAGEM MATEMÁTICA E OS USOS DA LINGUAGEM: DESDOBRAMENTOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA CRITICIDADE. In: XII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 12., 2023, Porto Alegre. **Anais ...** . Porto Alegre: UFRGS, 2023. p. 1-16.

SUPRIADI, Supriadi. Pre-service elementary teachers: analysis of the disposition of mathematical modeling in ethno mathematics learning. **Ilkogretim Online**, v. 19, n. 3, 2020.

SRIRAMAN, Bharath.; LESH, Richard. Modeling Conceptions Revisited. **ZDM**, Berlim, v. 38, n. 3, p. 247–254, 2006.

TARANTO, Eugenia et al. Fostering students' modelling and problem-solving skills through Operations Research, digital technologies and collaborative learning. **International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology**, [S.L.], p. 1-42, 12 out. 2022.

TORTOLA, Emerson; SEKI, Jeferson Takeo Padoan; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Sobre o Papel da Modelagem na Aprendizagem da Matemática: uma interpretação pautada numa perspectiva wittgensteiniana. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2022, União da Vitória. **Anais...** União da Vitória: UNESPAR/SBEM-PR, 2022. p. 1-17.

XU, Binyan et al. Mathematicians', mathematics educators', and mathematics teachers' professional conceptions of the school learning of mathematical modelling in China. **ZDM–Mathematics Education**, v. 54, n. 3, p. 679-691, 2022.

VALENTE, José Armando. **A Espiral da Espiral de Aprendizagem**: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. 2005. Tese (Livre Docência) Departamento de Multimeios, Mídia e Comunicação, Instituto de Artes (IA), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

VILELA, Denise Silva. **Matemáticas nos usos e jogos de linguagem**: ampliando concepções na educação matemática. 2007. 260 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

ZANIM, Ana Paula. **Competências dos alunos em atividades de Modelagem matemática.** 164f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade

Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ZANIM, Ana Paula. **Um método para a análise de competências dos alunos em atividades de modelagem matemática**. 2021. 136f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

WAKIYAMA, Yachiko Nascimento; MENDOZA, Héctor José García. Diagnóstico da aprendizagem por meio da atividade de situações problema discente em modelagem Matemática dos estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Amazonas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 6, p. 1-25, 2021.

WILLIAMS, Meredith. The significance of learning in Wittgenstein's later philosophy. **Canadian Journal of Philosophy**, v. 24, n. 2, p. 173-203, 1994.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the foundations of mathematics (RFM)**. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts; London, England, 1996.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics (LFM).** Editado por Cora Diamond. Chicago: The University of Chicago Press, 1989.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus (TLP).** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1968. Tradução de: José Arthur Giannotti.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observações sobre o Ramo de Ouro de Frazer** (ORO). Tradução e notas comentadas por João José R. L. Almeida, 2007. Suplemento da Revista Digital Ad Verbum, v. 2, n. 2, p. 186-231. Disponível em: < http://www.psicanaliseefilosofia.com.br/adverbum/revistaadverbum.html>. Acesso em: 20 ago. 2022.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza (DC)**. Tradução de Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70, 2000.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Fichas (Zettel) (Z)**. Lisboa. Edições 70, 1989.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **The Big Typescript. TS 213** (BT). German-English Scholar's Edition. Edited and Translated by C. Grant Luckhardt & Maximilian A. E. Aue. Oxford: Blackwell Publishing, 2005.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas** (IF). 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

ANEXO A: TERMO DE AUTORIZAÇÃO NA DISCIPLINA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado, com o objetivo de investigar as competências dos alunos em atividades de análise e exploração de modelos matemáticos em uma disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias de um curso de Licenciatura em Matemática, sob responsabilidade de Jeferson Takeo Padoan Seki, aluno do curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, orientado pela professora Doutora Lourdes Maria Werle de Almeida, declaro que consinto ao pesquisador Jeferson Takeo Padoan Seki que utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas durante as aulas da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, bem como as respostas a esse questionário, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulga-las em publicações, congressos e eventos da área, com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro, ainda, que fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome do estudante:____;

Assinatura:____.

ANEXO B: TERMO DE AUTORIZAÇÃO NA DISCIPLINA MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado do estudante Jeferson Takeo Padoan Seki do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, orientado pela professora Lourdes Maria Werle de Almeida, declaro que autorizo o uso, a partir da presente data, de registros escritos e transcrições de áudio das gravações durante as aulas bem como respostas às questões incluídas nesse instrumento sem restrições de prazos e citações, podendo divulga-las em publicações, congressos e eventos da área, com a condição de que seja garantido o anonimato, não sendo nome e nenhuma informação pessoal tornada pública. Declaro que abdico de direitos meus e de meus descendentes.

Londrina, 27 de abril de 2022.

Nome do estudante: ____;

Assinatura:____.

ANEXO C: QUESTIONÁRIO RESPONDIDO PELOS ESTUDANTES DA DISCIPLINA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1. Nome: ____ 2. Idade:______
3. Ano que iniciou o curso:_________.
4. Você já cursou outro(s) curso(s) de graduação, se sim qual(is)?
5. Atualmente, além de estudar, você também (se desenvolver outras atividades regulares informe no campo "Outro").
( ) Faz estágio
( ) Trabalha
( ) Participa de projetos na universidade, como: iniciação científica, projeto de ensino, etc.
( ) Outro:
6. Está cursando esta disciplina pela:
( ) Primeira vez ( ) Segunda vez ( ) Terceira vez ( ) Outro: _________

7. Classifique o seu nível de dificuldade no desenvolvimento das atividades, sendo 1. Muito fácil, 2. Fácil, 3. Moderado, 4. Difícil. 5. Muito difícil.

Trabalho 1: Salto de paraquedas.	1	2	3	4	5
Trabalho 2: Copo térmico para cerveja funciona	1	2	3	4	5
Trabalho 3: Bungee Rocket	1	2	3	4	5

8. O desenvolvimento das atividades foi importante para aprender os conteúdos da disciplina Introdução às equações Diferenciais Ordinárias.
1. Discordo totalmente. 2. Discordo. 3. Não estou decidido. 4. Concordo. 5. Concordo totalmente.

Trabalho 1: Salto de paraquedas.	1	2	3	4	5
Trabalho 2: Copo térmico para cerveja funciona	1	2	3	4	5
Trabalho 3: Bungee Rocket	1	2	3	4	5

9. O desenvolvimento das atividades foi importante para:
1. Discordo totalmente. 2. Discordo. 3. Não estou decidido. 4. Concordo. 5. Concordo totalmente.

Aprender o que é uma equação diferencial ordinária, seus tipos, ordens e suas soluções	1	2	3	4	5
Aprender os métodos de resolução de uma equação diferencial ordinária	1	2	3	4	5
Conhecer as aplicações de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem em fenômenos da realidade	1	2	3	4	5
Analisar fenômenos da realidade com base em modelos matemáticos escritos na linguagem das Equações Diferenciais Ordinárias	1	2	3	4	5
Analisar soluções de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem	1	2	3	4	5

10. Caso você entenda que o desenvolvimento das atividades foi importante para outra coisa, indique aqui:____.

Parte 2: Sobre o trabalho 1 "Salto de Paraquedas"

SALTO DE PARAQUEDAS

A variação da velocidade do paraquedista durante o salto, em relação ao tempo, pode ser descrita pela seguinte equação diferencial ordinária.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{m}.v^2$$

Em que $v = v(t)$ é a velocidade do paraquedista, em m/s, no instante t; g é a aceleração da gravidade; λ é o coeficiente de atrito e; m é a massa do paraquedista mais equipamento.

O salto pode ser dividido em duas etapas:

- Queda-livre até o momento de abertura do paraquedas ($0 \leq t < 60$): nessa etapa a variação da velocidade do paraquedista em queda-livre no instante t pode ser descrita pelo seguinte Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_A}{dt} = g - \dfrac{\lambda_1}{m}.(v_A)^2, & em\, I = [0,\ 60) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Sendo $v_A = v_A(t)$ a velocidade do paraquedista em queda-livre no instante t;
$g = 9{,}8\ m/s^2$; $\lambda_1 = 0{,}33628$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_A}{dt} = 9{,}8 - \dfrac{(0{,}33628).(v_A)^2}{m}, & em\, I = [0,\ 60) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

- Após a abertura do paraquedas até o pouso ($60 \leq t \leq 450$): a variação da velocidade do paraquedista com o paraquedas aberto no instante t pode ser descrita pelo seguinte Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_B}{dt} = g - \dfrac{\lambda_2}{m}.(v_B)^2, & em\, I = [60,\ 450] \\ v_B(60) = v_A(60) \end{cases}$$

Sendo $v_B = v_B(t)$ a velocidade do paraquedista com o paraquedas aberto no instante t;
$g = 9{,}8\ m/s^2$; $\lambda_2 = 25{,}74$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_B}{dt} = 9{,}8 - \dfrac{25{,}74}{m}.(v_B)^2, & em\, I = [60,\ 450] \\ v_B(60) = v_A(60) \end{cases}$$

11. A Equação Diferencial Ordinária que descreve a variação da velocidade do paraquedista em relação ao tempo durante o salto tem as seguintes premissas: Assinale V para verdadeiro e F para Falso.

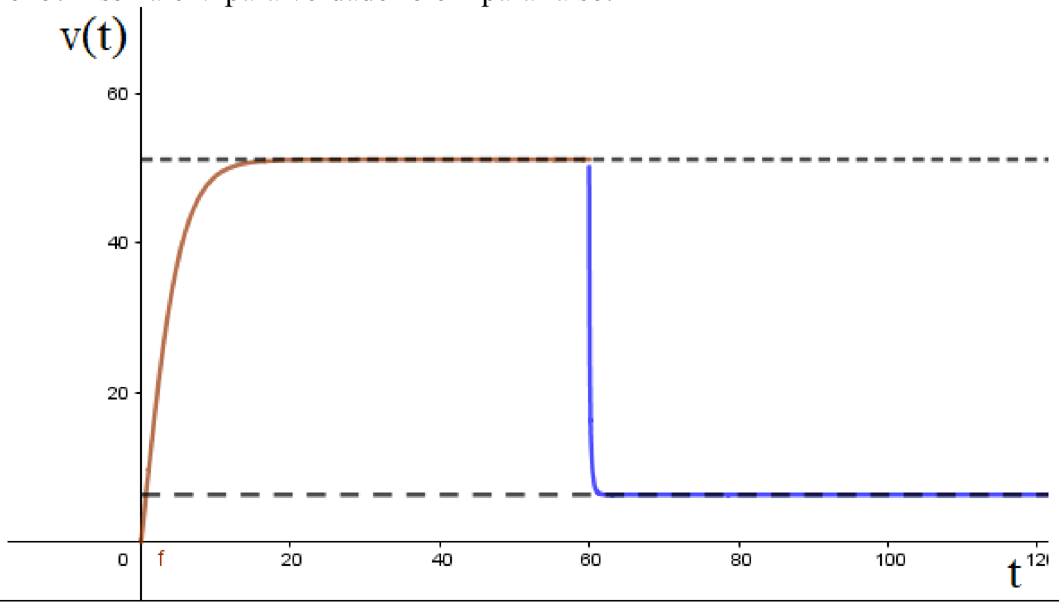
Considera apenas as forças que agem no movimento vertical do paraquedista durante o salto	( ) V	( ) F
Considera apenas as forças que agem no movimento horizontal do paraquedista durante o salto	( ) V	( ) F
A força de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do paraquedista.	( ) V	( ) F
A força de resistência do ar é inversamente proporcional ao quadrado da velocidade do paraquedista.	( ) V	( ) F
A força resultante (soma das forças que agem sobre o paraquedista) é igual ao produto da massa pela aceleração.	( ) V	( ) F
A força resultante (soma das forças que agem sobre o paraquedista) é	( ) V	( ) F

igual a razão da massa pela aceleração.		

12. Qual é influência do parâmetro λ (coeficiente de atrito) no comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do salto?
    a) Quanto maior é o coeficiente de atrito, maior é a velocidade do paraquedista durante o salto e menor é a velocidade terminal para abertura do paraquedas e para o pouso.
    b) Quanto maior é o coeficiente de atrito, menor é a velocidade do paraquedista durante o salto e menor é a velocidade terminal para abertura do paraquedas e para o pouso.
    c) Quanto maior é o coeficiente de atrito, menor é a velocidade do paraquedista durante o salto e maior é a velocidade terminal para abertura do paraquedas e para o pouso.
    d) O coeficiente de atrito não influencia no comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do salto.

13. Qual é influência do parâmetro m (massa do paraquedista) no comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do salto?
    a) Quanto maior a massa do paraquedista, maior é a variação da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo e maior é a velocidade terminal para abertura do paraquedas e para o pouso.
    b) Quanto maior a massa do paraquedista, menor é a variação da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo e menor é a velocidade terminal para abertura do paraquedas e para o pouso.
    c) Quanto maior a massa do paraquedista, menor é a variação da velocidade do paraquedista no decorrer do tenho e maior é a velocidade terminal para abertura do paraquedas e para o pouso.
    d) A massa não influencia no comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo

14. Com base no Gráfico da velocidade do paraquedista (m/s) em relação ao tempo (s) no decorrer do salto apresentado a seguir, que considerações podem ser feitas em relação ao fenômeno? Assinale V para verdadeiro e F para falso.



No intervalo de tempo [0, 60) a velocidade do paraquedista é crescente, tem um comportamento exponencial assintótico e tende a se estabilizar na velocidade de abertura do paraquedas no decorrer do tempo.	( ) V	( ) F
Após a abertura do paraquedas em 60 segundos após sair do avião, a velocidade do paraquedista passa a ser decrescente, tem um comportamento exponencial assintótico e tende a se estabilizar na velocidade de pouso do paraquedista.	( ) V	( ) F

Nos instantes iniciais após a saída do avião, a força de atração da gravidade é maior que a força de resistência do ar. Após cerca de 12 segundos, a força de atração da gravidade se iguala a força de resistência do ar, fazendo com que a velocidade do paraquedista se estabilize na velocidade de abertura do paraquedas.	( ) V	( ) F
Nos instantes iniciais após a saída do avião, a força de atração da gravidade é menor que a força de resistência do ar. Após cerca de 12 segundos, a força de atração da gravidade se iguala a força de resistência do ar, fazendo com que a velocidade do paraquedista se estabilize na velocidade de abertura do paraquedas.	( ) V	( ) F
Nos instantes iniciais após a abertura do paraquedas, a força de resistência do ar aumenta bruscamente e é maior que a força da atração da gravidade, fazendo com que o movimento desacelere. Com o passar do tempo com o paraquedas aberto, a força de resistência do ar se iguala a força de atração da gravidade, fazendo que a velocidade do paraquedista se estabilize na velocidade de pouso do paraquedista.	( ) V	( ) F
Nos instantes iniciais após a abertura do paraquedas, a força de resistência do ar diminui bruscamente e é menor que a força da atração da gravidade, fazendo com que o movimento acelere. Com o passar do tempo com o paraquedas aberto, a força de resistência do ar se iguala a força de atração da gravidade, fazendo que a velocidade do paraquedista se estabilize na velocidade de pouso do paraquedista.	( ) V	( ) F

Parte 3: Sobre o trabalho 2 “Copo térmico para cerveja”

Copo térmico para cerveja: funciona?

A variação da temperatura da cerveja em um copo térmico no decorrer do tempo, pode ser descrita pela seguinte Equação Diferencial Ordinária:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Em que $T(t)$ é a temperatura da cerveja (em $°C$) no copo térmico no instante t, t é o tempo em minutos, T_m é a temperatura ambiente, k é uma constante de proporcionalidade.

Considerando alguns dados coletados com um termômetro digitalacerca da temperatura da cerveja no copo térmico no decorrer do tempo, formulamos os seguintes problemas de valor inicial:

$$\text{PVI 1:} \begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(75) = 1{,}6°\text{ C}; \text{T}(150) = 2{,}5°\text{ C} \end{cases}$$

E

$$\text{PVI 2:} \begin{cases} \frac{dT}{dt} - k.T = -k.T_m \\ T(0) = 0{,}9°\text{ C}; \text{T}(145) = 2{,}3°\text{ C} \end{cases}$$

Com base no desenvolvimento desse trabalho, responda as questões a seguir:

15. A formulação da Equação Diferencial que descreve a variação da Temperatura da Cerveja no copo térmico em relação ao tempo no trabalho 2, tem as seguintes premissas. Assinale V para verdadeiro e F para falso

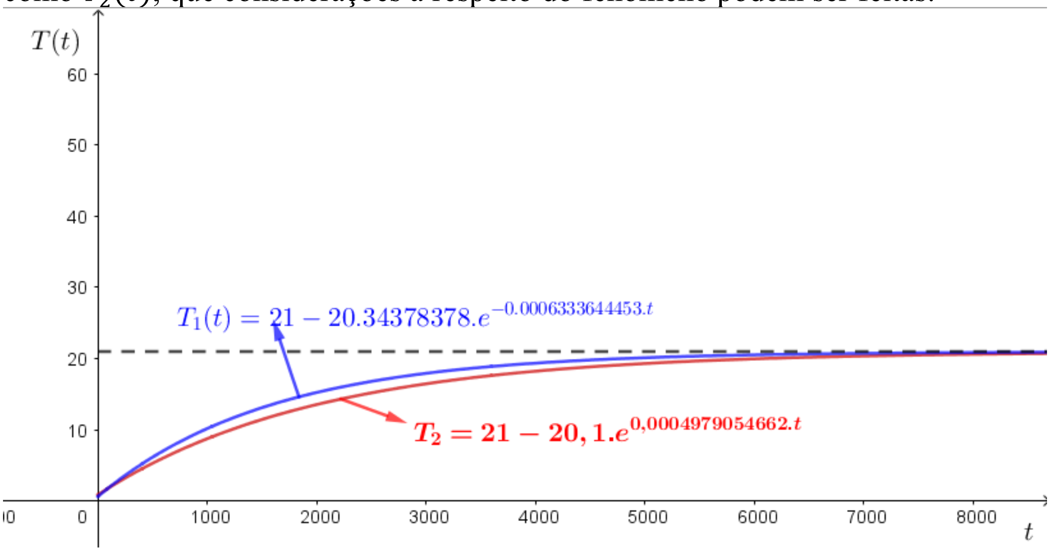
Conforme a lei de resfriamento/aquecimento de Newton, a taxa segundo a qual a temperatura da cerveja no copo térmico varia é proporcional a diferença entre a temperatura da cerveja no copo	( ) V	( ) F

térmico e a temperatura ambiente.		
Conforme a lei de resfriamento/aquecimento de Newton, a taxa segundo a qual a temperatura da cerveja no copo térmico varia é inversamente proporcional a diferença entre a temperatura da cerveja no copo térmico e a temperatura ambiente.	( ) V	( ) F
Foi considerado que a temperatura ambiente varia no decorrer do tempo.	( ) V	( ) F
A temperatura ambiente foi considerada constante, dada pela média aritmética entre a temperatura ambiente máxima e mínima registrada. $$T_m = \frac{20{,}4 + 21{,}6}{2} = 21°\,C$$	( ) V	( ) F

16. Qual é a influência do parâmetro T_m (temperatura ambiente) no comportamento da temperatura da cerveja no copo térmico no decorrer do tempo?
   a) Quanto maior é a temperatura ambiente, mais rápido a cerveja no copo térmico esquenta e atinge a temperatura ambiente em menos tempo.
   b) Quanto menor é a temperatura ambiente, mais rápido a cerveja no copo térmico esquenta e atinge a temperatura ambiente em menos tempo.
   c) A temperatura ambiente não influencia no comportamento da temperatura da cerveja no copo térmico.

17. Considerando $k < 0$, qual é a influência do parâmetro k (taxa específica de aquecimento da cerveja no copo térmico) no comportamento da temperatura da cerveja no copo térmico no decorrer do tempo.
   a) Quanto menor o parâmetro k mais devagar a cerveja no copo térmico esquenta e atinge a temperatura ambiente em mais tempo.
   b) Quanto menor o parâmetro k mais rápido a cerveja no copo térmico esquenta e atinge a temperatura ambiente em menos tempo.
   c) O parâmetro k não influencia o tempo de conservação da cerveja no copo térmico.

18. Com base nos gráficos da solução do PVI 1, nomeada como T_1 (t), e do PVI 2, nomeada como $T_2(t)$, que considerações a respeito do fenômeno podem ser feitas:



O tempo de conservação da temperatura da cerveja no copo	( ) V	( ) F

térmico é maior na solução do PVI 1 do que na solução do PVI 2.		
O tempo de conservação da temperatura da cerveja no copo térmico é maior na solução do PVI 2 do que na solução do PVI 1.	( ) V	( ) F
Tanto na solução do PVI 1, quanto na solução do PVI 2, a temperatura da cerveja no copo térmico é crescente no decorrer do tempo e tende a temperatura ambiente.	( ) V	( ) F
Tanto na solução do PVI 1, quanto na solução do PVI 2, a temperatura da cerveja no copo térmico cresce indefinidamente no decorrer do tempo.	( ) V	( ) F

Parte 4: Sobre o trabalho 2 "Bungee Rocket"

Bungee Rocket

O deslocamento vertical da cápsula no Bungee Rocket pode ser descrito pelos seguintes Problemas de Valor Inicial:

PVI 1: **movimento harmônico simples ou movimento livre sem amortecimento**

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0 \\ x(0) = 20{,}716348\, m; x'(0) = 8{,}221 \text{ m/s} \end{cases}$$

Sendo $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$, $\lambda = 354{,}9159236$ N/m e $m = 300$ kg.

PVI 2: movimento livre amortecido

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma.\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 20{,}716348\, m; x'(0) = 8{,}221 \text{ m/s} \end{cases}$$

Sendo $2\gamma = \frac{\beta}{m}$, $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$.

$x(t)$: o deslocamento da cápsula (em metros) no instante t em relação à posição de equilíbrio.
t: tempo em segundos.
λ: o coeficiente de elasticidade.
β: coeficiente de resistência do ar.
m: massa.

19. Na formulação dos problemas de valor inicial (PVI 1 e PVI 2) no trabalho 3 as seguintes premissas foram levadas em consideração: Assinale V para verdadeiro e F para Falso.

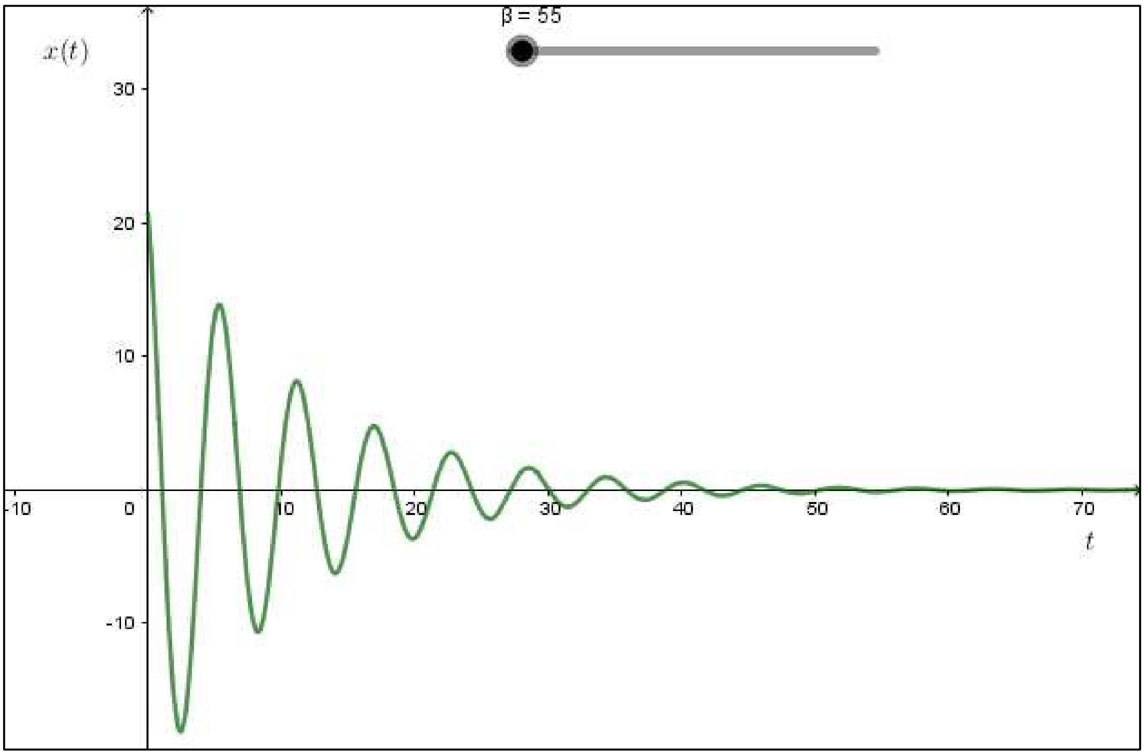
Foram levadas em consideração apenas as forças verticais que agem sobre a cápsula durante o movimento.	( ) V	( ) F
Foram levadas em consideração apenas as forças horizontais que agem sobre a cápsula durante o movimento.	( ) V	( ) F
As forças levadas em consideração no PVI 1 foram a força de atração da gravidade e a força de restauração (ou força de elasticidade). Já no PVI 2, as forças levadas em consideração foram a força de atração da gravidade, a força de restauração (ou força de elasticidade) e a força de resistência do ar (como uma força de amortecimento).	( ) V	( ) F
Foi levado em consideração a Lei de Hooke: quando uma mola é distendida por uma força externa (nesse caso pela força peso), uma força elástica restauradora passa a exercida em sentido contrário e mesma direção que a força externa. Essa força restauradora	( ) V	( ) F

proporcional ao deslocamento da mola.	
Foi levado em consideração a segunda Lei de Newton: A força resultante (soma das forças que agem sobre cápsula) é igual ao produto da massa pela aceleração.	( ) V ( ) F
Foi considerado que a força de resistência do ar é proporcional a velocidade da cápsula no decorrer do tempo.	( ) V ( ) F
Foi considerado que a força de resistência do ar é inversamente proporcional a velocidade da cápsula no decorrer do tempo.	( ) V ( ) F

20. Considerando o PVI 2, qual é a influência do parâmetro β (coeficiente de resistência do ar) no comportamento do deslocamento da cápsula no decorrer do tempo? Assinale V para verdadeiro e F para falso.

O coeficiente de resistência do ar não influencia no comportamento do deslocamento da cápsula no decorrer do tempo.	( ) V ( ) F
Se o coeficiente de resistência do ar for maior 652,61 kg/s, o movimento é dito superamortecido e o comportamento do deslocamento da cápsula no decorrer do tempo é exponencial decrescente, em que a cápsula não passa da posição de equilíbrio.	( ) V ( ) F
Se o coeficiente de resistência do ar for igual a 652,61 kg/s o movimento é dito criticamente amortecido e o comportamento do deslocamento da cápsula no decorrer do tempo se assemelha ao superamortecido, mas qualquer variação no coeficiente de resistência do ar pode gerar uma oscilação no comportamento do deslocamento da cápsula no decorrer do tempo	( ) V ( ) F
Se o coeficiente de resistência do ar for menor a 652,61 kg/s o movimento é dito subamortecido e o comportamento da cápsula no decorrer do tempo é oscilatório e converge para a posição de equilíbrio.	( ) V ( ) F
Se o coeficiente de resistência do ar for igual a zero o movimento é livre e sem amortecendo e o comportamento da cápsula no decorrer do tempo é periódico.	( ) V ( ) F

21. Considerando que o deslocamento da cápsula no decorrer do tempo é subamortecido, conforme o gráfico a seguir, podemos afirmar que:



Para $x > 0$ a cápsula está abaixo da posição de equilíbrio. Para $x < 0$ a cápsula está acima da posição de equilíbrio. Para x=0 a cápsula está na posição de equilíbrio.	( ) V	( ) F
Para $x > 0$ a cápsula está acima da posição de equilíbrio. Para $x < 0$ a cápsula está abaixo da posição de equilíbrio. Para x=0 a cápsula está na posição de equilíbrio.	( ) V	( ) F
A força de resistência do ar age como uma força de amortecimento, fazendo com o deslocamento da cápsula no decorrer do tempo tenda a posição de equilíbrio, quando o tempo tende ao infinito.	( ) V	( ) F
A amplitude, o período e a frequência do movimento permanecem constantes no decorrer do tempo.	( ) V	( ) F
A amplitude do movimento no decorrer do tempo tende a zero, fazendo com que deslocamento da cápsula no decorrer do tempo tenda a posição de equilíbrio, quando o tempo tende ao infinito	( ) V	( ) F

ANEXO D: QUESTIONÁRIO RESPONDIDO PELOS ESTUDANTES DA DISCIPLINA MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

1. Classifique o seu nível de dificuldade no desenvolvimento das atividades 'Salto de Paraquedas' e 'Copo Térmico para Cerveja: Funciona', sendo 1. Muito fácil, 2. Fácil, 3. Moderado, 4. Difícil. 5. Muito difícil.

Atividade 1: Salto de paraquedas.	1	2	3	4	5
Atividade 2: Copo térmico para cerveja: funciona?	1	2	3	4	5

2. Classifique o seu nível de dificuldade no desenvolvimento da atividade 'Salto de Paraquedas' em relação às ações especificadas, sendo 1. Muito fácil, 2. Fácil, 3. Moderado, 4. Difícil. 5. Muito difícil.

Compreender a situação real	1	2	3	4	5
Formular o problema	1	2	3	4	5
Definir as variáveis	1	2	3	4	5
Formular hipóteses	1	2	3	4	5
Identificar informações relevantes para resolver o problema	1	2	3	4	5
Construir o modelo matemático	1	2	3	4	5
Validar o modelo matemático	1	2	3	4	5
Interpretar os resultados obtidos	1	2	3	4	5

3. Classifique o seu nível de dificuldade no desenvolvimento da atividade 'Copo Térmico para Cerveja: funciona?' em relação às ações especificadas, sendo 1. Muito fácil, 2. Fácil, 3. Moderado, 4. Difícil. 5. Muito difícil.

Compreender a situação real	1	2	3	4	5
Formular o problema	1	2	3	4	5
Definir as variáveis	1	2	3	4	5
Formular Hipóteses	1	2	3	4	5
Identificar informações relevantes para resolver o problema	1	2	3	4	5
Construir o modelo matemático	1	2	3	4	5
Validar o modelo matemático	1	2	3	4	5
Interpretar os resultados obtidos	1	2	3	4	5

4. Nessa questão assinale 1. Discordo totalmente. 2. Discordo. 3. Não estou decidido. 4. Concordo. 5. Concordo totalmente, expressando sua opinião sobre aspectos que a atividade de modelagem matemática lhe favoreceu:

a) Conhecer especificidades da situação da realidade em estudo.

1	2	3	4	5

b) Identificar um problema na situação da realidade em estudo

1	2	3	4	5

c) Escrever em linguagem matemática o problema identificado

1	2	3	4	5

d) Aprender conteúdos e procedimentos matemáticos necessários para construir o modelo matemático

1	2	3	4	5

e) Retomar conteúdos e procedimentos matemáticos necessários para construir o modelo matemático

1	2	3	4	5

f) Reconhecer o papel do modelo matemático na situação em estudo

1	2	3	4	5

g) Aprender a fazer a modelagem matemática de uma situação da realidade

1	2	3	4	5

h) Observar como a matemática pode ser usada para entender uma situação da realidade

1	2	3	4	5

i) Usar a matemática de uma forma diferente do que se estivesse resolvendo problemas ou exercícios propostos

1	2	3	4	5

5. Que elementos da situação-problema foram relevantes para construir o modelo matemático na atividade 'Salto de Paraquedas'? (pode selecionar mais de uma alternativa se considerar necessário)
( ) Altitude em que o paraquedista salta da aeronave em um salto tradicional.
( ) As diferentes modalidades de salto de paraquedas.
( ) A posição básica do paraquedista em queda-livre: *box position*.
( ) A velocidade do paraquedista no deslocamento horizontal durante o salto em diferentes instantes.
( ) A velocidade do paraquedista no deslocamento vertical durante o salto em diferentes instantes.
( ) A aceleração do paraquedista durante o salto.
( ) O deslocamento vertical do paraquedista no decorrer do salto.
( ) O deslocamento horizontal do paraquedista no decorrer do salto.
( ) As forças que agem sobre o paraquedista durante o salto: força de resistência do ar e força de atração da gravidade.
( ) Outras forças que agem sobre o paraquedista.
( ) Outros aspectos que não foram mencionados. Especifique: ____________________

6. Que aspectos da situação-problema foram relevantes para construir o modelo matemático na atividade 'Copo térmico para cerveja: funciona?' (pode selecionar mais de uma alternativa se considerar necessário)
( ) A temperatura ideal para consumo da cerveja do tipo Pilsen.
( ) A temperatura ideal para consumo de outros tipos de cerveja, para além do tipo Pilsen.
( ) O consumo de cerveja per capita no Brasil no ano de 2020.
( ) Informações fornecidas pelo fabricante sobre o copo térmico utilizado na coleta de dados.
( ) Variação da temperatura da cerveja no copo térmico, com base nos dados coletados.
( ) Variação da temperatura ambiente, com base nos dados coletados.
( ) Outros aspectos que não mencionados. Especifique: __________________________

7. Sobre a formulação de hipóteses na atividade 'Salto de Paraquedas', podemos dizer que elas se fundamentam: (pode selecionar mais de uma alternativa se considerar necessário)
( ) No comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do salto.
( ) No deslocamento do paraquedista no decorrer do salto.
( ) No comportamento das forças que agem sobre o paraquedista durante o salto.
( ) Na segunda lei de Newton.
( ) Em outras informações . Especifique: _____________________________________

8. Sobre a formulação de hipóteses na atividade 'Copo térmico para cerveja: funciona?', podemos dizer que elas se fundamentam: (pode selecionar mais de uma alternativa se considerar necessário)

( ) No comportamento da temperatura da cerveja no copo térmico no decorrer do tempo.
( ) No comportamento da temperatura ambiente no decorrer do tempo no dia de coleta de dados.
( ) Na lei de resfriamento/aquecimento de Newton.
( ) Em outras informações . Especifique: _______________________________________

9. Explique, com suas palavras, como o modelo matemático foi construído na atividade:
a) 'Salto de Paraquedas':

b) 'Copo térmico para cerveja: funciona?':

10. Em cada atividade o modelo matemático foi usado para: (pode selecionar mais de uma alternativa se considerar necessário)

a) 'Salto de Paraquedas':
( ) Realizar previsões sobre o fenômeno.
( ) Descrever o fenômeno.
( ) Explicar o comportamento do fenômeno.
( ) Organizar o fenômeno.
( ) Outros. Especifique:

b) 'Copo térmico para cerveja: funciona?':
( ) Realizar previsões sobre o fenômeno.
( ) Descrever o fenômeno.
( ) Explicar o comportamento do fenômeno.
( ) Organizar o fenômeno.
( ) Outros. Especifique:

Sobre o trabalho final: responda as questões a seguir

1) Qual foi o tema estudado pelo seu grupo:
( ) Preço da cesta básica em relação ao salário-mínimo.
( ) Qual notebook comprar para uso doméstico?
( ) O número de sementes da abóbora em relação a sua massa.
( ) Frota de veículos e crescimento da população na cidade de Londrina.

2) Qual foi a motivação do grupo para o estudo desse tema?
3) Classifique o seu nível de dificuldade no desenvolvimento do trabalho final, sendo 1. Muito fácil, 2. Fácil, 3. Moderado, 4. Difícil. 5. Muito difícil.

1	2	3	4	5

4) Classifique o seu nível de dificuldade no desenvolvimento do trabalho final em relação às ações especificadas, sendo 1. Muito fácil, 2. Fácil, 3. Moderado, 4. Difícil. 5. Muito difícil.

Escolher um tema	1	2	3	4	5
Coletar dados	1	2	3	4	5
Compreender a situação real	1	2	3	4	5
Formular o problema	1	2	3	4	5
Definir as variáveis	1	2	3	4	5
Formular Hipóteses	1	2	3	4	5
Identificar informações relevantes para resolver o problema	1	2	3	4	5
Construir o modelo matemático	1	2	3	4	5
Validar o modelo matemático	1	2	3	4	5
Interpretar os resultados obtidos	1	2	3	4	5

5) Nessa questão assinale 1. Discordo totalmente. 2. Discordo. 3. Não estou decidido. 4. Concordo. 5. Concordo totalmente, expressando sua opinião sobre aspectos que o desenvolvimento do trabalho final lhe favoreceu:

a) Conhecer especificidades da situação da realidade em estudo.

1	2	3	4	5

b) Identificar um problema na situação da realidade em estudo

1	2	3	4	5

c) Escrever em linguagem matemática o problema identificado

1	2	3	4	5

d) Aprender conteúdos e procedimentos matemáticos necessários para construir o modelo matemático

1	2	3	4	5

e) Retomar conteúdos e procedimentos matemáticos necessários para construir o modelo matemático

1	2	3	4	5

f) Reconhecer o papel do modelo matemático na situação em estudo

1	2	3	4	5

g) Aprender a fazer a modelagem matemática de uma situação da realidade

1	2	3	4	5

h) Observar como a matemática pode ser usada para entender uma situação da realidade

1	2	3	4	5

i) Usar a matemática de uma forma diferente do que se estivesse resolvendo problemas ou exercícios propostos

1	2	3	4	5

6) Que elementos da situação-problema foram relevantes para construir o modelo matemático no desenvolvimento do trabalho final sobre a ‘Cesta Básica e o salário-mínimo’? (somente o grupo que desenvolveu esse trabalho responde essa questão)
( ) Salário-mínimo nominal no decorrer dos anos.
( ) Salário-mínimo necessário no decorrer dos anos.
( ) Preço da cesta-básica no decorrer dos anos.
( ) Inflação no decorrer dos anos.
( ) Poder de compra no decorrer dos anos.
( ) Outros. Especifique:____.

7) Que elementos da situação-problema foram relevantes para construir o modelo matemático no desenvolvimento do trabalho final sobre a ‘compra de um notebook’? (somente o grupo que desenvolveu esse trabalho responde essa questão)
( ) Preço de diferentes notebooks.
( ) Desempenho dos notebooks medido pela memória ram, processador e o SSD.
( ) Objetivo de uso do notebook a ser comprado.
( ) Facilidade de uso do notebook.
Outros. Especifique:____

8) Que elementos da situação-problema foram relevantes para construir o modelo matemático no desenvolvimento do trabalho final sobre ‘O número de sementes da abóbora em relação a sua massa’? (somente o grupo que desenvolveu esse trabalho responde essa questão)
( ) Os tipos de abóbora.
( ) O número de sementes de abóboras com diferentes massas.
( ) O volume das abóboras.
( ) A massa das sementes.

( ) A massa das abóboras.
( ) Outros. Especifique:____

9) Que elementos da situação-problema foram relevantes para construir o modelo matemático no desenvolvimento do trabalho final sobre a 'Frota de veículos e crescimento da população na cidade de Londrina'? (somente o grupo que desenvolveu esse trabalho responde essa questão)
( ) A frota de veículos no decorrer dos anos na cidade de Londrina.
( ) A população na cidade de Londrina no decorrer dos anos.
( ) O número de carros por pessoa na cidade de Londrina.
( ) O congestionamento de carros em alguma via na cidade de Londrina.
( ) Outros. Especifique:____

10) Explique, com suas palavras, como o modelo matemático foi construído no desenvolvimento do trabalho final?

11) No trabalho final, o modelo matemático foi usado para: (pode selecionar mais de uma alternativa se considerar necessário)
( ) Realizar previsões sobre o fenômeno.
( ) Descrever o fenômeno.
( ) Explicar o comportamento do fenômeno.
( ) Organizar o fenômeno.
( ) Tomar decisões sobre o fenômeno.
( ) Outros. Especifique: ____.

Responda as questões a seguir a partir do desenvolvimento das três atividades

1) A partir do desenvolvimento das três atividades, escreva com suas palavras, o que entende por Modelagem Matemática.

2) A partir do desenvolvimento das três atividades, escreva com suas palavras, quais são as fases e ações que caracterizam uma atividade de modelagem matemática.

3) O que você considera mais importante saber para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática? Justifique.

4) O uso da modelagem matemática no estudo de situações contribuiu para desenvolver a última atividade do seu grupo? Por quê?