



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

DANIELA HARMUCH

**UMA PROPOSTA DE AÇÕES DIDÁTICAS FRENTE AO ERRO NA
PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA**

Londrina
2022

DANIELA HARMUCH

**UMA PROPOSTA DE AÇÕES DIDÁTICAS FRENTE AO ERRO NA
PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA**

Tese apresentada ao Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Regina Luzia Corio de Buriasco.

Coorientador: Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva

Londrina
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

D184p Harmuch, Daniela.
Uma proposta de ações didáticas frente ao erro na perspectiva da Educação Matemática Realística / Daniela Harmuch. - Londrina, 2022.
136 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Coorientador: Gabriel dos Santos e Silva.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2022.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática Realística - Tese. 2. Erro - Tese. 3. Avaliação da Aprendizagem Escolar - Tese. 4. Ações Didáticas - Tese. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Silva, Gabriel dos Santos e. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. IV. Título.

CDU 37

DANIELA HARMUCH

**UMA PROPOSTA DE AÇÕES DIDÁTICAS FRENTE AO ERRO NA
PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA**

Tese apresentada ao Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva
Instituto Federal do Paraná – IFPR - Campus Capanema

Prof^a. Dr^a. Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof^a. Dr^a. Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Campus de Londrina

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof^a. Dr^a. Maria Raquel Miotto Morelatti
Universidade Estadual Paulista – UNESP - Campus Presidente Prudente

Londrina, 9 de maio de 2022.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela permissão de poder começar, continuar e concluir este processo cheio de desafios e principalmente por ter colocado diversas pessoas que auxiliaram minha caminhada. Sou Grata Senhor, por permitir que um dos meus sonhos esteja se tornando realidade. Sou grata com todo meu ser.

Ao Claudio, meu marido, meu companheiro de luta e conquistas, que esteve ao meu lado me apoiando incondicionalmente, incentivando com palavras de afirmação, motivação e paciência. Sem você não poderia realizar meu sonho. Perdão pelas minhas falhas e fraquezas. Te amo!

Aos meus dois filhos incríveis e maravilhosos, Clarinha e Nagib. Anjos e amores de minha vida. Perdão pelos muitos momentos de ausência. Vocês foram trampolins de motivação. Amo vocês até a lua, ida e volta, ida e volta, tantas vezes que vocês puderem contar! É para vocês que dedico este trabalho.

À minha família, em especial meus pais e minha vovó querida, pelo apoio constante e amor incondicional. Meu sincero agradecimento pelo privilégio de ter nascido nessa família. Uma família que me acolhe, que me incentiva, que aconselha, que torce por mim, na qual aprendi valores que me guiaram por toda minha vida.

À Prof^a. Dr^a Regina Luzia Corio de Buriasco por ter me oportunizado o ingresso ao doutorado e ao GEPEMA. Sou grata pelas orientações, reflexões e oportunidades de aprendizagens. Suas contribuições mudaram tantas coisas em minha vida, não só profissional e acadêmica, mas também pessoal.

Ao Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva pelas orientações e amizade. Sua maneira extrovertida, cuidadosa, terna e ao mesmo tempo exigente foram determinantes para as direções e a finalização deste trabalho. Sou eternamente grata.

Ao Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos que gentilmente aceitou ser banca deste trabalho, gratidão pelos cuidados.

À Prof^a. Dr^a. Maria Raquel Miotto Morelatti, que também gentilmente aceitou ser banca. Obrigada pelos apontamentos e conselhos preciosos.

À Prof^a. Dr^a. Magna Natália Marin Pires, que também aceitou ser banca deste trabalho, que além dos cuidados com o trabalho foi uma inspiração de professora, desde 2001, quando tive oportunidade de ser sua aluna. Meiguice em pessoa.

À Prof^a. Dr^a. Marcele Tavares Mendes, a qual tive a sorte de ser minha orientadora de mestrado, e me apresentou a Educação Matemática Realística, que teve um carinho especial por este trabalho e principalmente por ter sido a responsável por me fazer querer ter sede de continuar a estudar. Carrego comigo seu exemplo de pesquisadora.

A todos os professores e professoras que me oportunizaram aprendizagens, em especial neste processo de doutoramento.

Aos meus queridos colegas do GEPEMA, foram anos valiosos de aprendizagens. Grata pela contribuição e carinho. Foi um prazer conviver com vocês.

Aos meus queridos colegas do Colégio Estadual Paulo Freire, que fizeram muitas vezes silêncio na sala dos professores para que eu me concentrasse nos estudos. Grata pela força em muitos momentos.

Aos meus queridos estudantes, com quem aprendi e aprendo algo novo a cada encontro. Grata pelo privilégio de estar em sala de aula com vocês e viver momentos valiosos de aprendizagem. Vocês são responsáveis por me fazer querer melhorar enquanto profissional.

À IPI Lagoa Dourada pelo alimento espiritual, orações e palavras de motivação.

A todos aqueles que embora não tendo sido citados contribuíram de alguma forma para a realização deste processo.

Gratidão, muita gratidão.

Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor, mas lutamos para que o melhor fosse feito. Não somos o que deveríamos ser, mas Graças a Deus, não somos o que éramos.

Martin Luther King Jr.

HARMUCH, Daniela. **Uma proposta de ações didáticas frente ao erro na perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2022. 136 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

Esta pesquisa qualitativa, de cunho teórico, teve como objetivo descrever, analisar e discutir aspectos referentes ao erro, como apresentado por autores da literatura alcançada, a fim de propor ações didáticas condizentes com a perspectiva da abordagem de ensino Educação Matemática Realística para lidar com o erro. Essa abordagem de ensino, cujo precursor foi Hans Freudenthal (1905-1990), pressupõe a matemática como uma atividade humana, em que o professor, por meio da reinvenção guiada, auxilia o estudante a fazer matemática. Com base nas orientações da Análise de Conteúdo, a pesquisa foi organizada de acordo com as seguintes etapas: primeiro, fez-se um inventário de excertos de dissertações, teses e artigos que continham o verbete “erro” e realizados agrupamentos a partir das ideias centrais de cada um dos trechos inventariados. Com isso, foram obtidos onze agrupamentos, denominados: “como erro é usualmente visto nas escolas”, “correção”, “o que o erro pode causar”, “causa do erro”, “erro como oportunidade de aprendizagem”, “autoavaliação”, “erro como algo natural”, “erro de caráter construtivo”, “para que serve o erro”, “erro na prática de investigação” e “dicotomia acerto e erro”. Da descrição do conjunto de informações desses agrupamentos, foram feitas análises e discussões, propondo ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística para lidar com o erro. As ações didáticas levantadas foram listadas e apresentadas em forma de sugestões as quais não se apresentam como “receitas” para um bom trabalho, mas são indicativos de procedimentos que podem ser adotados pelo professor para construir uma prática em que o erro esteja a serviço da avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem, opondo-se à concepção do erro como algo que não pode acontecer e que geralmente é penalizado. Esta pesquisa, para a área da Educação Matemática, pode oportunizar, em especial ao professor, um processo de reflexão de sua prática. As ações didáticas condizentes que foram apresentadas nesta pesquisa podem acrescentar no processo de ressignificação de ações docentes na direção de uma avaliação a serviço dos processos de ensino e de aprendizagem.

Palavras-chave: educação matemática realística; avaliação da aprendizagem escolar; erro; ações didáticas.

HARMUCH, Daniela. **A proposal for didactic actions in the face of error from the perspective of Realistic Mathematics Education**. 2022. 136 p. Thesis (Doctorate degree in Science and Mathematical Education) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

ABSTRACT

This qualitative and theoretical research aimed to describing, analyzing, and discussing aspects related to the error, as presented by authors in the literature researched, in order to propose didactic actions consistent with the perspective of the Realistic Mathematics Education teaching approach to deal with the error. This teaching approach, whose precursor was Hans Freudenthal (1905-1990), presupposes mathematics as a human activity, in which the teacher, through guided reinvention, assists the student in doing mathematics. Based on Content Analysis guidelines, the research was organized according to the following steps: first, an inventory was made of excerpts from dissertations, theses, and articles that contained the keyword "error" and groupings were made based on the central ideas of each of the excerpts catalogued. As a result, eleven groupings were obtained, named: "how error is usually seen in schools", "correction", "what error can cause", "cause of error", "error as a learning opportunity", " self-assessment", "error as something natural", "constructive nature error", "what error is for", "error in research practice", and " right and error dichotomy". From the description of the information set of these groupings, analysis and discussions were made, proposing didactic actions consistent with the Realistic Mathematics Education perspective to deal with the error. The didactic actions raised were listed and presented as recommendations that are not presented as "recipes" for good work, but are indicative of procedures that can be adopted by the teacher to build a practice in which the error is at the service of the assessment as an investigation practice and as a learning opportunity, opposing to the conception of error as something that cannot happen and that is usually penalized. This research, for the Math Education area, can provide an opportunity, especially for teachers, for a reflection process of their practice. The didactic actions that were presented in this research can contribute to the process of redefining the teaching actions in the direction of an assessment in the service of the teaching and learning processes.

Key words: realistic mathematics education; school learning assessment; error; didactic actions.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Níveis de Pensamento	28
Quadro 2 - Categorizações de erros	45
Quadro 3 - Tipologia de erros dos estudantes segundo Astolfi (1999).....	47
Quadro 4 - Taxonomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa .	49
Quadro 5 - Contribuição da capitalização de erros	50
Quadro 6 - Informações das Teses e Dissertações	55
Quadro 7 - Periódicos alcançados pela Plataforma CAPES/MEC	60
Quadro 8 - Levantamento de revistas apontadas pela plataforma Sucupira na área de Avaliação de Educação e Ensino, de Qualis A1 e A2 .	61
Quadro 9 - Levantamento de artigos da Plataforma Sucupira nas revistas selecionadas	61
Quadro 10 - Artigos em comum das plataformas CAPES/MEC e Sucupira	63
Quadro 11 - Agrupamentos em duas vertentes	67
Quadro 12 - Alguns instrumentos de avaliação.....	74

SUMÁRIO

	APRESENTAÇÃO	12
1	INTRODUÇÃO	17
2	ASPECTOS DA AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR	22
2.1	AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR	22
2.2	ASPECTOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA.....	32
2.3	O ERRO NA APRENDIZAGEM ESCOLAR	40
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	53
4	ALGUMA ANÁLISE	68
4.1	ERRO COMO FALTA DE CONHECIMENTO COMO ALGO A SER PUNIDO OU COMBATIDO.....	69
4.1.1	Como o Erro Usualmente é Visto nas Escolas	69
4.1.2	Correção.....	71
4.1.3	O Que o Erro Pode Causar	76
4.1.4	Possíveis Causas do Erro	81
4.2	ERRO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM/ REGULAÇÃO PARA GERAR UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA.....	88
4.2.1	Erro Como Oportunidade de Aprendizagem.....	88
4.2.2	Autoavaliação	90
4.2.3	Erro Como Algo Natural.....	92
4.2.4	Erro de Caráter Construtivo	93
4.2.5	Para Que Serve o Erro	94
4.2.6	Erro na Prática de Investigação.....	95
4.2.7	Dicotomia Acerto e Erro.....	97
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
	REFERÊNCIAS.....	106

APÊNDICES	114
APÊNDICE A – Referência das teses	115
APÊNDICE B – Referência das dissertações	117
APÊNDICE C – Referência de artigos da plataforma SUCUPIRA	123
APÊNDICE D – Referência de artigos da plataforma CAPES/MEC	130

APRESENTAÇÃO

Nas reflexões para começar este texto da minha trajetória acadêmica e profissional, percebi o quanto a temática “erro”, escolhida como tema para esta tese, esteve intimamente ligada, de certa forma, a grande parte de minhas escolhas.

Durante minha vida na Educação Básica, no período do Ensino Fundamental, me considerava uma aluna disciplinada, nunca uma “nota vermelha”¹ constou em meu boletim. Esse disciplinamento não deriva da perspectiva de que estudar era importante para minha vida, mas sim devido aos medos, mesmo que eu não tivesse plena consciência nesse período. Medo de ser humilhada em sala de aula, de ser repreendida, de reprovar, de decepcionar meus pais e eles ficarem zangados. Como em um modelo tradicional de educação, os erros cometidos eram geralmente destacados com caneta vermelha em provas e cadernos, com um x de tamanho grande nas produções das tarefas, de forma punitiva, que diretamente acarretava nas notas.

No Ensino Médio, minha família, acreditando ser o melhor para mim, me encaminhou para estudar em Curitiba (Paraná), fora da cidade onde residíamos no interior. O Colégio escolhido tinha fama de ser um dos melhores do estado. A sala de aula era composta por exatos 100 estudantes, eu era a J4². Lá os professores subiam numa plataforma e “transmitiam” os conteúdos tal qual o material apostilado que escreviam, e seguiam as aulas numeradas rigorosamente, com o diferencial de algumas brincadeiras e músicas buscando fazer com que os estudantes memorizassem fórmulas e técnicas. Pouco compreendia o porquê de determinadas regras da matemática elementar. Éramos avaliados essencialmente por meio de provas objetivas, e embora eu buscasse ser disciplinada, minhas notas quase sempre estavam abaixo da média. As devolutivas das provas, também evidenciavam meus erros demarcados com canetas vermelhas. Acreditei que era uma estudante incapaz e insuficiente, afinal, a forma como os erros eram abordados me desestimulavam e o recado que me transmitiam era o de inferioridade, em que gritava a impossibilidade de continuidade de estudos em qualquer área que escolhesse e certamente teria

¹ Termo utilizado para médias abaixo de 6,0.

² J4 – refere-se ao assento que ocupava em sala de aula, na linha J fileira 4. Esta lembrança é para aludir que não havia aproximação dos professores para um feedback particular.

desaprovações em vestibulares ou qualquer exame admissional. Aos trancos e barrancos, memorizando técnicas e modos operantes, concluí o Ensino Médio.

Por sorte, e até um certo privilégio, tive pessoas que auxiliaram no caminho e uma família que me encorajava e dizia o contrário do que pensava de mim mesma. Palavras de afirmação me impulsionaram a querer fazer um curso superior.

No ano de 1999, ingressei na Universidade Estadual de Londrina (UEL), para cursar o Bacharelado em Matemática no período da manhã. No ano seguinte, pude iniciar, concomitantemente ao Bacharelado, a Licenciatura em Matemática. Foi na Licenciatura que comecei a entender alguns porquês de determinados procedimentos advindos da matemática elementar. Concluí os cursos em 2003.

Logo após a graduação, tive meu primeiro emprego como professora substituta em uma escola pública estadual, e a experiência não foi satisfatória, senti a necessidade de continuar minha formação. Em 2004, iniciei a Especialização em Educação Matemática ofertada pela Universidade Estadual de Londrina. Nesse período, fui convidada a trabalhar como educadora em uma Instituição Social. Nesse local, e aliada a especialização oferecida, tive a oportunidade de estudar textos que me fizeram refletir e perceber que a forma como fui ensinada enquanto estudante da Educação Básica e do Ensino Superior, não foi um caminho na direção de me tornar uma estudante reflexiva e autônoma.

No ano seguinte, em 2005, tive oportunidade de trabalhar em uma escola privada que buscava utilizar uma perspectiva construtivista, oportunizando uma aprendizagem construída em um ambiente em que eu mais levantava questionamentos do que os respondia, em que os estudantes aprendiam por meio de buscas e de investigações de resoluções das experiências vivenciadas por meio das tarefas. Embora fosse bem diferente de como aconteceu quando cursei a Educação Básica, essa escola se pautava em avaliações de rendimento e o erro era evidenciado como um “não saber”.

Em 2010, passei em um concurso público como professora de matemática e comecei a trabalhar em uma escola estadual. Em 2011, fui convidada para trabalhar em uma outra escola, particular, e, com o tempo, convidada a ser coordenadora pedagógica. Aí surgiu a necessidade de cursar outra especialização em gestão educacional que foi concluída no início de 2016 pela Unicentro.

Atualmente, trabalho em um único colégio cujo nome tenho orgulho, Prof. Paulo Freire. Embora o nome possa inspirar aspectos das principais ideias freirianas, meu ambiente de trabalho vai na contramão, presenciei e ainda presencio avaliações estritamente de rendimento, pautada em notas, em que o erro é apontado com desaprovação, frequentemente sancionado, punido de alguma forma. Presencio diariamente uma “educação bancária”, ao qual Paulo Freire (1974) elucida trazendo a perspectiva de que o professor vê o estudante como um banco, em que deposita o conhecimento, acrescentando fórmulas, letras e informações até “enriquecer” o estudante. Minha prática docente de certa forma não era diferente, mesmo com alguns trabalhos diferenciados aprendidos com a experiência no colégio com base construtivista e especializações.

No ano de 2015, ingressei no programa de mestrado da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Londrina, ao qual o encanto pela abordagem de ensino Educação Matemática Realística (RME³) apareceu nas proposições de estudos e conversas com minha orientadora de mestrado⁴, durante o desenvolvimento do trabalho de dissertação a respeito de tarefas de Educação Financeira à luz da RME para adolescentes em situação de risco (HARMUCH, 2017).

O mestrado influenciou minha prática docente, com novas percepções sobre avaliação e novos instrumentos de avaliação. Sofri algumas represálias pelo movimento das mudanças de ações docentes. Os motivos, em geral, eram porque eu deixava os estudantes fazerem “cola” (em relação ao instrumento de avaliação: prova-escrita-com-cola⁵), também por deixar estudantes começarem a prova em um dia e retornar a fazer a mesma prova em outros dias (em relação ao instrumento de avaliação: prova-escrita-em-fases⁶) ou por permitir que os estudantes se autoavaliassem e me avaliassem.

³ Sigla da expressão em língua inglesa *Realistic Mathematics Education*.

⁴ Profa. Dra. Marcele Tavares Mendes.

⁵ Prova-escrita-com-cola “é uma prova escrita na qual o aluno tem a sua disposição um pedaço de papel, a cola, em que ele pode anotar as informações que julgar pertinentes para utilizar durante a realização da prova” (FORSTER, 2016, p. 27). Para saber mais sobre este instrumento de avaliação sugiro as leituras das teses indicados nos links a seguir: http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Dissertacoes/2020_Innocenti_dissertacao.pdf; http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Dissertacoes/2016_Forster_dissertacao.pdf;

⁶ Prova-escrita-em-Fases “é um instrumento de avaliação cuja dinâmica, como o nome já informa, é composta de várias fases. Na primeira fase, os estudantes resolvem as questões (quais e quantas julgarem que devam fazer); nas fases seguintes, eles retomam a prova com a oportunidade de resolver questões não resolvidas ou refazer, alterar, refinar questões já resolvidas” (SILVA, 2018, p. 55). Para saber mais sobre este instrumento de avaliação sugerimos as leituras das teses indicados

Com o desejo de continuar estudando a abordagem de ensino RME, houve a oportunidade de ingressar no doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina.

Vinculado ao PECEM está o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA)⁷, coordenado pela Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, também orientadora deste trabalho e, como participante do GEPEMA, fui então me inserindo em estudos e discussões de Avaliação de Aprendizagem Escolar e da Educação Matemática Realística, temas de estudo do grupo.

Fortalecida pelo GEPEMA, a qual relatava as experiências citadas anteriormente, e buscando trabalhar em uma perspectiva de avaliação como oportunidade de aprendizagem, a situação na minha escola foi melhorando aos poucos. Conversando com os colegas de trabalho a respeito dos instrumentos de avaliação, comentando sobre os resultados de pesquisas acadêmicas e de minha própria experiência, alguns professores começaram a usar os instrumentos e compartilhar comigo suas experiências. Inclusive, não precisei ser chamada na direção para explicar as intenções dos instrumentos avaliativos, a equipe pedagógica já estava ciente e abraçando as ideias. Quanto aos estudantes, os relatos eram divertidos de escutar, em geral pediam que a próxima prova escrita tivesse as características não tradicionais.

A temática “erro”, apareceu mediante a uma conversa com a orientadora. A atração pelo tema foi natural uma vez que, enquanto professora, pesquisar a respeito aparentava ser um assunto confortável.

Imatura em relação ao tema, fui envolvida, sob orientação, nos estudos iniciais da temática erro na aprendizagem escolar, nas disciplinas disponibilizadas pelo PECEM e discussões com o GEPEMA. Essa nova imersão nos estudos sobre avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem permitiu desconstruir novamente meu olhar em relação ao processo de

nos links a seguir: http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Teses/2018_Silva_tese.pdf; http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Teses/2018_Souza_tese.pdf; http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Teses/2014_Mendes_tese.pdf; http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Teses/2013_Pires_tese.pdf; http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Teses/2013_Trevisan_tese.pdf; http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Dissertacoes/2015_Prestes_dissertacao.pdf;

⁷ Mais informações em <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>

avaliação escolar, sobretudo relacionado ao erro. Esta desconstrução de paradigmas frente ao erro potencializou-se quando entrei em contato com os estudos das literaturas propostas pela orientadora, ao qual as pesquisas abarcam essencialmente a temática erro.

Todo a caminhada do doutorado, não só nos aspectos de pesquisa desta tese, foi importante para minha formação; cada encontro do grupo me motivava e trazia reflexões não só como pesquisadora e professora, mas também em relação a ações em situações da minha vida social.

Refletindo no meu eu anterior, nos erros cometidos, e aqueles que ainda estão por vir (afinal, tenho muito a aprender, e desconstruir hábitos de ações didáticas que estão há anos enraizados), compartilho um sentimento de alívio, baseado no último parágrafo do prefácio deste trabalho: “Não somos o que deveríamos ser, mas graças a Deus, não somos o que éramos” Martin Luther King Jr.

Com base em uma das reflexões de Freire (2005) que entende que o ser humano é um ser inacabado, em processo constante de humanização, compreendo que por meio de processos educativos estou em constante autoconstrução. Trabalhar nesta pesquisa foi uma oportunidade para ressignificar minhas ações docentes e me humanizar.

1 INTRODUÇÃO

Aspectos da Avaliação da Aprendizagem Escolar, na área da Educação Matemática, são objetos de pesquisa e estudo de membros do GEPEMA. O erro, como elemento integrante dos processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação faz parte das discussões do Grupo, embora ainda não tenha sido trabalhado como um tema de pesquisa.

Nas produções de teses e dissertações do GEPEMA foram abordados temas relacionados à Educação Matemática e a Avaliação da Aprendizagem Escolar desde o ano de 2003, sob orientação da Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco. Ao todo, até o fim do ano de 2021, foram desenvolvidas 37 dissertações e 16 teses. As primeiras investigações nos trabalhos de dissertações se dedicaram a analisar a produção escrita em matemática de estudantes e professores presente em questões de matemática, consideradas rotineiras⁸, da prova da AVA-2002 (ALVES, 2006; DALTO, 2007; NAGY-SILVA, 2005; NEGRÃO DE LIMA, 2006; PEREGO, 2005; PEREGO, 2006; SEGURA, 2005; VIOLA DOS SANTOS, 2007).

A partir do ano de 2006, os trabalhos do GEPEMA, mantendo ainda o foco dos estudos na análise da produção escrita em matemática, se dedicaram às pesquisas em tarefas consideradas não-rotineiras⁹, da prova PISA (ALMEIDA, 2009; BEZERRA, 2010; CELESTE, 2008; FERREIRA, 2009; LOPEZ, 2010; SANTOS, 2008).

A análise de produção escrita, segundo membros do GEPEMA, refere-se a uma das formas de implementar a avaliação como prática de investigação, em que se busca conhecer como os estudantes lidam com tarefas matemáticas.

Partindo dos estudos dos documentos do PISA, os participantes do GEPEMA tiveram os primeiros contatos com a Educação Matemática Realística. A partir do ano de 2010, começou-se então a estudar e desenvolver pesquisas a respeito desta abordagem de ensino.

⁸ Refere-se a tarefas que frequentemente são encontradas em livros didáticos e em aulas de matemática e são, em sua maioria, tarefas de reprodução ou memorização.

⁹ Refere-se a tarefas que não são frequentemente trabalhadas em sala de aula e pouco são encontradas nos livros didáticos.

Para a RME, a matemática é uma atividade humana e está conectada à realidade de modo a ser útil (FREUDENTHAL, 1968; 1973). Esta abordagem de ensino faz parte dos pressupostos teóricos desta pesquisa além de objeto de estudo.

No interior do GEPEMA, foram desenvolvidas teses e dissertações, tanto com investigações de natureza teórica na qual alguns trabalhos buscaram trazer um aprofundamento da compreensão da RME bem como de termos recorrentes desta literatura (CIANI, 2012; CORDEIRO, 2021; FERREIRA, 2013; FORSTER, 2020; OLIVEIRA, 2014; PASSOS, 2015; PRESTES, 2021; ROCHA, 2021; ROSSETTO, 2016, 2021; SCHASTAI, 2017; SILVA, 2015, 2018; SILVA, 2020) e continuidades de pesquisas que versam sobre Avaliação Formativa, com intuito de oportunizar compreensão e reflexões (BENEDITO, 2018; PEDROCHI JUNIOR, 2012, 2018; SANTOS, 2014) quanto de natureza prática, permitindo aproximações da RME com autores também da área do ensino da matemática, incluindo análise e pesquisas de instrumentos de avaliação que oportunizam uma prática de investigação e oportunidade de aprendizagem (BARDAÇON, 2020; FORSTER, 2016; INNOCENTI, 2020; MARQUES, 2017; MENDES, 2014; MORAES, 2013; OLIVEIRA, 2021; PAIXÃO, 2016; PEREIRA, 2014; PIRES, 2013; PRESTES, 2015; SILVA, 2018; SOUZA, 2018; TREVISAN, 2013).

O GEPEMA assume a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. Nas pesquisas de Ferreira (2009), a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação é

um processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ou planejadas que procura seguir os rastros, os vestígios, esquadriñar, seguir a pista do que é observável, conhecido (FERREIRA, 2009, p. 21).

Para essa autora, assumir a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação implica, para o professor, uma atitude investigativa na busca de reconhecer a existência de uma multiplicidade de caminhos percorridos por seus estudantes no processo de produção de conhecimentos.

Avaliação como oportunidade de aprendizagem, que segundo Pedrochi Junior (2012, p. 41) é tomada como “ocasião conveniente ao ato de aprender e a avaliação, sendo parte desse ato, deve contribuir para a aprendizagem dos alunos”. Pedrochi Junior (2012; 2018) destaca que é um processo contínuo

desenvolvido durante todo o período letivo, não apenas com exames¹⁰ ao final de um período escolar.

Na perspectiva da Avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, as tarefas têm um papel importante a desempenhar pois se revelam um recurso para o professor que pode promover a integração dos processos de ensino e de aprendizagem.

Entendemos “tarefa matemática” na direção apresentada por Forster (2020) que afirma que tarefas são compostas por itens propostos aos alunos em contextos de aulas de matemática ou as ações efetuadas pelos estudantes, decididas por eles mesmos.

O autor enfoca que tarefas matemáticas são um meio de o professor “colocar o aluno em ação” (FORSTER, 2020, p. 83), além de ser uma forma de fazer com que ele, indo ao encontro da RME, “iniciem a ação de matematizar¹¹, desencadeando reflexões e possibilitando que investiguem as mais diversas situações realísticas¹²” (FORSTER, 2020, p. 84).

“Regulação da aprendizagem” é um termo utilizado com frequência no GEPEMA. Mendes (2014) destaca que ações de regular os processos de ensino e de aprendizagem são responsabilidades tanto do estudante quanto do professor. No papel do estudante como responsável pela sua aprendizagem, buscando compreender sua produção no que tange tanto a seus acertos e erros quanto a seus progressos a fim de desenvolver conceitos envolvidos. O papel do professor refere-se em termos gerais a de regular seu ensino, ou seja, de refletir em suas próximas ações, “não apontando erros, mas questionamentos ou pistas de orientação da ação a ser desenvolvida pelo aluno” (MENDES, 2014, p. 42). A autora, com base nas pesquisas de RME e de avaliação da aprendizagem, enfatiza a importância da interação no processo pedagógico.

Ao proporcionar a regulação do ensino e aprendizagem, o feedback é um recurso imprescindível. Silva (2020) apresentou um estudo teórico a respeito do feedback em aulas de matemática, na perspectiva da RME. A autora ressalta que

¹⁰ Neste trabalho entende-se exame como prova.

¹¹ O termo matematizar para a RME refere-se a organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos.

¹² Realísticas para a RME refere-se a situações imagináveis pelo estudante.

algumas práticas nesta abordagem são motivadas pelo feedback, recurso indispensável para

guiar, orientar os estudantes nos caminhos escolhidos por eles para o desenvolvimento de suas produções, com o objetivo de proporcionar, a partir das reflexões, que matematizem e se movimentem de modelos menos formais para modelos mais formais (SILVA, 2020, p. 37).

A partir dos trabalhos do GEPEMA, das concepções e conceitos levantados e explorados, surgiu a ideia de observar aspectos do erro na aprendizagem escolar.

De maneira geral, a discussão do erro em pesquisas na área da Educação Matemática na aprendizagem, tem sido feito nessas duas vertentes: a do erro como falta de conhecimento ou como algo a ser punido, reprimido e a do erro como oportunidade de aprendizagem. Em cada uma delas, o erro indica ao professor ações distintas: punição, ou combate ao erro de forma coibida e oportunidade de gerar ações didáticas, respectivamente. Em ambas, os estudos vão na direção de identificar: tipos de erros para uma classificação, suas possíveis causas, e/ou ações didáticas para superá-los.

Mesmo que nesses estudos, diferentes abordagens de ensino de Matemática tenham sido utilizadas, ainda não se considerou a abordagem Educação Matemática Realística. Daí a relevância deste estudo.

Considerando que o erro pode ser tomado como uma permanente oportunidade de aprendizagem e um mote para práticas de investigação, o objetivo geral desta pesquisa, de cunho teórico, consiste em **descrever, analisar e discutir aspectos referentes ao erro, como apresentado por autores da literatura alcançada, a fim de propor ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística para lidar com o erro.**

Os objetivos específicos são:

- Inventariar excertos de dissertações, teses e artigos que contenham o verbete “erro”, publicados entre os anos de 2000 e 2019;
- Descrever, analisar e discutir os excertos inventariados à luz da Educação Matemática Realística, evidenciando a perspectiva de erro que estão relacionados;

- Propor ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística para lidar com o erro, como apresentado por autores da literatura alcançada.

Produções de trabalhos que trazem a discussão da temática erro e sua potencialidade para a área do Ensino da Matemática podem oportunizar ao professor um processo de reflexão de sua prática permitindo possíveis mudanças. A RME e as ações didáticas condizentes que serão apresentadas nesta pesquisa podem acrescentar neste processo de ressignificação.

Este relatório de pesquisa é composto por quatro seções além desta **introdução**, que traz a apresentação da pesquisa e de seu contexto no GEPEMA. A **segunda** seção apresenta a fundamentação teórica com aspectos característicos da Avaliação da Aprendizagem Escolar, da abordagem de ensino Educação Matemática Realística e do Erro na aprendizagem escolar, apresentando um panorama das principais ideias. Na **terceira** seção estão descritos os procedimentos metodológicos apresentando os caminhos escolhidos. O desenvolvimento, análise e discussão estão presentes na **quarta** seção. As considerações finais compõem a **quinta** seção, na qual são apresentadas algumas considerações relativas à investigação. Por fim, as referências e os apêndices.

2 ASPECTOS DA AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Nesta seção serão discutidos aspectos da avaliação na aprendizagem escolar, a abordagem de ensino Educação Matemática Realística e do erro no contexto escolar com base em autores que versam sobre a temática.

2.1 AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Comumente, presencia-se nos ambientes escolares a avaliação da aprendizagem escolar ser tomada como sinônimo de exames ou provas escritas pautadas geralmente em notas classificatórias, puramente quantitativas, quase sempre centradas na resposta final dos estudantes, apontando acertos e erros em provas escritas ou testes de conhecimento com base na verdade da ótica de quem as elabora. Estas são discussões atuais, ainda que perdurem há décadas em Educação. No Brasil, o início das discussões do tema avaliação escolar datam do final dos anos de 1960 e início dos anos 1970 (LUCKESI, 2011), portanto estamos a cerca de 50 anos tratando desse tema e dessa prática escolar. Segundo Luckesi (2011, p. 25) “antes, somente falávamos em exames escolares”.

Buriasco (1999), traz em sua tese que essa discussão já não era recente.

Na maioria das nossas escolas, públicas ou não, a avaliação é eminentemente somativa, preocupada com os resultados finais que levam a situações irreversíveis no que diz respeito ao desempenho dos alunos, sem que sejam levadas em conta as muitas implicações, inclusive sociais, de um processo decisório fatal do ponto de vista educacional (BURIASCO, 1999, p. 73).

Além de não ser uma discussão recente, já se discutia as consequências de uma avaliação estritamente com função classificatória.

Para Almouloud (2007), avaliar é tido, de modo geral, como “fazer” um juízo de valor sobre o resultado de uma medida e dar uma significação a esse resultado em relação a um quadro de referência, um critério ou uma escala de valores. Para o autor a avaliação está dentro de todo o processo educacional e corroborando com as ideias de Campos et al. (2003), aponta que, avaliar não é um fim em si mesmo, mas um indicador do que foi aprendido e do que falta aprender.

Esteban (2013) entende a avaliação como “um processo significativo para a reflexão sobre a prática social, a prática escolar e a interação entre esses

âmbitos” (ESTEBAN, 2013, p. 12). Acredita que a avaliação deveria ser tomada como prática de investigação e instrumento de formação de professores como profissionais reflexivos. Na prática escolar, avaliações “assinalam aspectos significativos para uma melhor compreensão da relação teoria-prática no processo de ensino e aprendizagem” (ESTEBAN, 2013, p. 56).

Buriasco (1999, 2000), Buriasco e Soares (2013) criticam avaliações geralmente centradas em notas ou conceitos distanciando de qualquer concepção de avaliação que auxilie ou subsidie os processos de ensino e de aprendizagem. Para as autoras, é função da avaliação fornecer sempre ao estudante informações que ele possa compreender e que lhe sejam úteis.

Luckesi (2011), também faz críticas em relação a uma avaliação estritamente de aferições e propõem encaminhamentos para uma forma de condução do ensino escolar. Propõe que a avaliação

seja praticada como uma atribuição de qualidade aos resultados da aprendizagem dos educandos, tendo por base seus aspectos essenciais e, como objetivo final, uma tomada de decisão que direcione o aprendizado e, conseqüentemente, o desenvolvimento do educando (LUCKESI, 2011, p. 49).

Para o autor, a avaliação não se refere à aprovação ou reprovação do estudante, mas a um “direcionamento da aprendizagem e seu conseqüente desenvolvimento” (LUCKESI, 2011, p. 50).

Para Hadji (1994), a avaliação nunca poderá limitar-se a uma definição exata, mas poderia ser definida, num sentido geral, como a gestão do provável ou ainda como uma “operação particular de leitura da realidade, na qual tomamos posição, nos pronunciamos sobre uma dada realidade à luz de uma grelha de leitura que exprime, em relação a essa realidade determinadas exigências” (HADJI, 1994, p. 185). “Avaliar pode significar, entre outras coisas: verificar, julgar, estimar, situar, representar, determinar, dar um conselho” (HADJI, 1994, p. 27). Avaliar

[...] significa tentar estabelecer elos, pontes, entre diferentes níveis de realidade, sempre a marcar e a sublinhar por esta mesma operação a distância que os separa: a realidade daquele que constrói e formula o juízo de valor, e a daquilo em que incide esse juízo, ainda que se trate da mesma pessoa, num ato de autoavaliação (HADJI, 1994, p. 29).

Para o autor, avaliação é tomada como

[...] o ato pelo qual se formula um juízo de "valor" incidindo num objecto determinado (indivíduo, situação, acção, projecto, etc.) por meio de um confronto entre duas séries de dados que são postos em relação:

- dados que são da ordem do facto em si e que dizem respeito ao objecto real a avaliar;
- dados que são da ordem do ideal e que dizem respeito a expectativas, intenções ou a projectos que se aplicam ao mesmo objeto (HADJI, 1994, p. 31).

Barlow (2006) define avaliação a partir de algumas ações, tais quais:

- “dar uma informação ao estudante” (BARLOW, 2006, p. 149);
- “efetuar uma comparação entre o que se constata e o que se espera; entre um real e um ideal” (BARLOW, 2006, p. 17);
- “emitir um julgamento preciso ou não sobre uma realidade quantificável ou não depois de ter efetuado ou não uma medição” (BARLOW, 2006, p. 12).
- “demarcar o grau de êxito e, ao mesmo tempo, as possibilidades ainda abertas de um ‘ser melhor’, de uma realização. É igualmente dar vazão a um sentido, revelar em uma conduta a parcela de inteligibilidade já adquirida e a que falta adquirir” (BARLOW, 2006, p. 13).

Para Barlow (2006), avaliação tem caráter educativo, ou seja, é um elemento de formação. Esta concepção de avaliação é denominada como Avaliação Formativa. Uma avaliação tem como um dos propósitos fornecer informações para futuras ações, e dessa forma, informar possíveis caminhos para o ensino, ou seja, auxiliar na regulação dos processos de ensino e de aprendizagem. A “avaliação formativa, ainda não representa um conjunto bem definido de artefatos ou práticas” (BENNETT, 2011, p. 19, tradução nossaⁱ), e “não é simplesmente a obtenção de evidências, mas também inclui fazer inferências a partir dessas evidências” (BENNETT, 2011, p. 16, tradução nossaⁱⁱ).

Uma avaliação formativa planejada e incorporada nos processos de ensino e de aprendizagem pode ser capaz de sugerir transformações na cultura da sala de aula.

Uma das maneiras de tomar a Avaliação Formativa é como prática de investigação, em que se busca conhecer, colher informações, pistas sobre o desconhecido, implicando que o professor tenha uma postura investigativa (BURIASCO, FERREIRA E CIANI, 2009; FERREIRA 2009, 2013).

Pedrochi Junior (2012; 2018) encara a Avaliação da Aprendizagem Escolar como oportunidade de aprendizagem e, para o autor, ela é um processo contínuo desenvolvido durante todo o período letivo, não apenas com provas ao final de um período escolar. A avaliação se inicia com o planejamento das primeiras tarefas e vai até a análise da última ação de regulação e está carregada de ações reflexivas, “não só para o aluno, mas também para o professor, em que ela mesma deve ser (também) uma oportunidade de aprendizagem” (PEDROCHI JUNIOR, 2018, p. 20).

Para a Educação Matemática Realística, a avaliação é descrita como Avaliação Didática, pois

é intimamente ligada à educação e, todos os seus aspectos revelam esta orientação educacional. Isso significa que o propósito da avaliação, bem como o conteúdo, os métodos aplicados e os instrumentos usados são todos de natureza didática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 85, tradução nossaⁱⁱⁱ).

“A avaliação dentro da RME é principalmente em nome da educação” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 85, tradução nossa^{iv}). Para Dekker e Querelle (2002) a avaliação é uma parte central do ensino e muito pode ser aprendido ouvindo e discutindo com os estudantes.

A partir da coleta de informações dos estudantes e seus processos de aprendizagem, na RME, os professores e interessados podem tomar decisões educacionais. Essas decisões, de acordo com van den Heuvel-Panhuizen (1996), podem envolver todos os níveis da educação e podem variar entre decisões locais sobre atividades de ensino adequadas para lições de matemática e decisões mais amplas como aprovações, sobre quais estudantes precisam de assistência extra, ou a avaliação da abordagem usada. Na RME, não apenas a avaliação pode auxiliar o ensino, mas também, simultaneamente, auxiliar a aprendizagem ao dar aos estudantes o retorno dos processos de aprendizagem. De Lange (1995; 1999) propõe nove princípios para a avaliação em sala de aula:

1. o primeiro e principal propósito da avaliação é auxiliar o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.
2. os métodos de avaliação devem possibilitar aos estudantes mostrarem o que sabem, não o que não sabem.
3. A avaliação deve operacionalizar todos os objetivos da Educação Matemática.
4. A qualidade da avaliação em matemática não é dada primariamente pela acessibilidade à pontuação.
5. A Matemática está imbuída em problemas úteis (atraentes, educativos, autênticos) que são parte do mundo real dos estudantes.

6. Os critérios de avaliação devem ser públicos e consistentemente aplicados.
7. O processo de avaliação, incluindo a pontuação, deve ser aberto aos estudantes.
8. Os estudantes devem ter a oportunidade de receber feedback genuíno de seus trabalhos.
9. Um planejamento de avaliação balanceado deve incluir múltiplas e variadas oportunidades (formatos) para os estudantes mostrarem e documentarem suas realizações (DE LANGE, 1995; 1999, tradução nossa).

O primeiro princípio, que afirma que o principal propósito avaliação é auxiliar o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem, vai ao encontro dos pressupostos de uma avaliação como oportunidade de aprendizagem, uma vez que se entende, entre outras coisas, que avaliação, ensino e aprendizagem são processos amalgamados (SILVA, 2018).

O segundo princípio, que diz que os métodos de avaliação devem possibilitar aos estudantes mostrarem o que sabem, está relacionado com os aspectos de uma avaliação como prática de investigação, uma vez que numa sondagem investigativa das respostas dos estudantes são indicações mais autênticas da habilidade do estudante fazer matemática do que uma pontuação de teste compilado somando o número de acertos (DE LANGE, 1999), além de possibilitar uma análise das maneiras de lidar revelando informações a respeito da prática do professor e fornecer orientações em relação às suas práticas futuras (VIOLA DOS SANTOS, 2007).

Do terceiro princípio em que trata de a avaliação operacionalizar todos os objetivos da Educação Matemática, refere-se a indicar os diferentes níveis do pensamento matemático. Para tanto, assume que há a necessidade de que o professor utilize diversos instrumentos de avaliação ao longo do seu trabalho (DE LANGE, 1995, 1999), ao encontro do nono princípio em que um planejamento de avaliação balanceado deve incluir múltiplas e variadas oportunidades (formatos) para os estudantes mostrarem e documentarem suas realizações.

Em relação ao quarto princípio, que trata da qualidade da avaliação em matemática, Hadji (1994) aponta que a utilização de notas e conceitos pode causar mal-entendidos, uma vez que pouco informa aos estudantes sobre suas aprendizagens.

As tarefas de avaliação na RME são significativas e informativas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996) e “envolvem todos os tópicos do assunto e

incluem problemas em cada nível: desde habilidades básicas até raciocínio de ordem superior” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 89, tradução nossa^v). É desejável que as tarefas sejam de uma forma que possam ser resolvidas de diversas maneiras e em diferentes níveis além de imbuída em problemas úteis (atraentes, educativos, autênticos) que são parte do mundo real dos estudantes, quinto princípio proposto por De Lange (1999).

Entende-se por tarefa matemática aquilo que

designa o item ou o conjunto de itens (exercício, problema) que o professor apresenta (ou atribui) aos alunos como proposta de trabalho, algo que um professor usa para demonstrar matemática, buscar interativamente com os alunos ou para pedir que os alunos façam alguma coisa. Tarefa também pode ser qualquer coisa que os alunos decidam fazer por si mesmos em uma situação particular (FORSTER, 2020, p. 31).

Forster (2020) entende que as tarefas matemáticas, de acordo com sua pesquisa, podem, por exemplo:

- proporcionar o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática;
- ser importantes veículos para o desenvolvimento da capacidade do aluno de raciocinar e raciocinar matematicamente;
- ser ferramentas mediadoras para ensinar e aprender;
- estimular o estabelecimento de conexões e o desenvolvimento coerente de ideias matemáticas;
- oportunizar que os alunos se comuniquem e justifiquem seus procedimentos e entendimentos, promovendo, assim, comunicação a respeito do que foi feito;
- mostrar a matemática como uma atividade humana permanente;
- oportunizar aos alunos interpretar a razoabilidade de suas ações e soluções (FORSTER, 2020, p. 31).

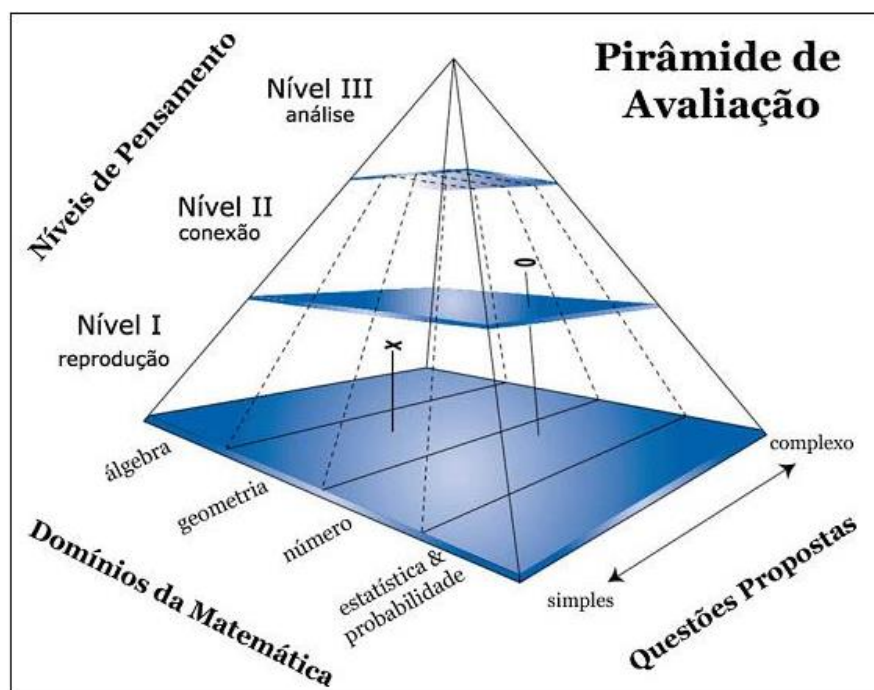
De Lange (1999) apresentou um modelo com três diferentes níveis de demandas cognitivas (Reprodução, Conexão e Reflexão/Análise) para ser explorado em tarefas, situados dentro de um contexto realístico. No Quadro 1, são apresentados os três diferentes níveis de pensamento.

Na Figura 1 está representado o modelo apresentado por De Lange (1999), para relacionar os níveis de pensamento, os domínios envolvidos da matemática e a complexidade das tarefas ao elaborar uma prova escrita. O formato de pirâmide serve para fornecer uma imagem clara do número relativo de itens necessários para representar o entendimento da matemática do estudante (DE LANGE, 1999), além de permitir que seja feita uma distinção entre tarefas simples e mais complexas dentro do mesmo nível (DE LANGE, 1999).

Quadro 1 - Níveis de Pensamento

Nível 1	Reprodução	Neste nível, os estudantes lidam com respostas que, muitas vezes, requerem conhecimento factual, definições e procedimentos de rotina memorizados e geralmente praticados nas aulas anteriores.
Nível 2	Conexão	Este nível requer que os estudantes escolham seus procedimentos, estratégias e ferramentas matemáticas para resolver tarefas relativamente simples, podendo utilizar diferentes formas de representação de acordo com a situação e finalidade. Espera-se que os estudantes, neste nível, façam conexões entre as diferentes vertentes e domínios da matemática e que integrem informações, que engajem os estudantes na tomada de decisões matemáticas.
Nível 3	Reflexão/ Análise	Este nível requer que os estudantes matematizem situações, desenvolvam pensamentos matemáticos, generalizações, conjecturas, seus próprios modelos matemáticos, suas estratégias, reflexões sobre o processo de resolução, bem como as respostas.

Fonte: Os autores baseados em De Lange (1999).

Figura 1 - Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange (1999)

Fonte: Ferreira (2013, p. 61)

O fato de a base na Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange (1999), ser maior do que o topo, refere-se a uma “representação ‘justa’ do número relativo de itens necessários para representar a compreensão dos conteúdos matemáticos por um estudante” (MENDES, 2014, p. 52). Uma vez que, geralmente, uma questão de análise, devido à sua complexidade, demanda um tempo maior de resolução que uma questão de reprodução. “Problemas de nível 3 são mais difíceis de resolver e levam mais tempo do que aqueles em que as habilidades básicas são avaliadas” (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 4, tradução nossa^{vi}).

Em relação ao sexto princípio, no qual os critérios de avaliação devem ser públicos e consistentemente aplicados, abarca a ideia de que é desejável que os estudantes discutam e negociem os critérios de avaliação com o professor, assim, “será possível fortalecer a autoavaliação e a avaliação por pares, criando um ambiente de corresponsabilidade relativa às críticas de seu próprio trabalho e do trabalho dos colegas” (PEDROCHI JUNIOR, 2018, p. 52). É desejável também que o professor deixe claro para os estudantes o que identificou em cada um. “Os alunos devem estar conscientes de seus saberes, de suas dificuldades e de como superá-las” (PEDROCHI JUNIOR, 2018, p. 52), ao encontro do sétimo princípio, em que as pontuações, devam ser abertas aos estudantes. Para os autores da RME aprende-se matemática fazendo matemática e este processo pode ocorrer em diferentes níveis de compreensão (FREUDENTHAL, 1971; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2010a, 2010b).

Na perspectiva da RME boas tarefas, segundo van den Heuvel-Panhuizen (1996), devem ser:

- **informativas:** fornecem o máximo de informações possível a respeito do conhecimento dos alunos, isto é, mostram uma imagem do aprendizado dos alunos o mais completa possível;
- **significativas:** convidativas para os alunos, desafiadoras, de modo que eles sintam que valha a pena resolver e que sua solução pode ser útil para prover uma ou várias respostas, e devem refletir objetivos importantes, pois, se não apresentarem motivos para ser aprendidas, não serão consideradas úteis;
- **transparentes:** permitem que os alunos mostrem o nível de aprendizagem em que se encontram, assim, não podem ser tão fechadas a ponto de serem resolvidas de apenas uma maneira, impedindo que os alunos demonstrem seu conhecimento, mesmo que seja por meio de modelos informais;
- **elásticas/flexíveis:** podem ser resolvidas por meio de diferentes estratégias em diferentes níveis de aprendizagem, o que pode oportunizar aos alunos dar suas respostas com suas próprias palavras;

· **acessíveis:** apresentam enunciados o mais claros possível, de modo que os alunos possam, no mínimo, refletir a respeito dos assuntos envolvidos, o que não quer dizer que o enunciado deva indicar estratégias ou sugerir uma solução, mas, sim, possibilitar identificar do que ela trata (FORSTER, 2016, p. 29-30).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) chama a atenção para o potencial das produções próprias do estudante, estas oferecem oportunidades de mostrar ao professor o que os estudantes podem fazer.

Em relação ao oitavo princípio, na RME, algumas práticas são motivadas pelo feedback. Esta prática vai ao encontro do oitavo princípio proposto por De Lange (1999), em que os estudantes tenham a oportunidade de receber feedback genuíno de seus trabalhos. A este respeito, a RME vai ao encontro do que afirmam Nicol e Macfarlane-Dick (2005): uma boa prática de feedback se refere a qualquer coisa que possa fortalecer a capacidade dos estudantes de se regularem.

Um feedback adequado pode contribuir para o processo de aprendizagem (DE LANGE, 1999; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996) e é um componente do processo da Avaliação Didática. De Lange (1999) além de ressaltar a importância deste recurso reconhece que os estudantes podem aprender com ele, ao refletir sobre o tema.

Nicol e Macfarlane-Dick (2005) identificam alguns princípios de boas práticas de feedback. Baseados nestes princípios e em trabalhos realizados pelo GEPEMA, Silva (2020) as reelaborou visando à sua utilização em aulas de matemática, tendo como base as ideias e princípios da RME:

- 1) ajuda a esclarecer os próximos passos dos caminhos pensados pelos estudantes;
- 2) auxilia o desenvolvimento da autoavaliação (reflexão) na/da aprendizagem;
- 3) fornece informações aos alunos sobre suas produções;
- 4) encoraja a interação entre professores e pares em torno da aprendizagem;
- 5) incentiva a análise e reflexão de estratégias e resoluções;
- 6) fornece oportunidades para que o estudante caminhe para modelos mais formais;
- 7) fornece oportunidades para o aluno apresentar sua produção e mostrar o que sabe;
- 8) fornece informações aos professores ou alunos que podem ser usadas para ajudar e regular o ensino e a aprendizagem (SILVA, 2020, p. 33).

Na direção de contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem, apresentam-se uma síntese com algumas ações docentes que podem contribuir para o desenvolvimento da avaliação como oportunidade de aprendizagem. Estas observações derivam de autores que versam sobre Avaliação Formativa:

- observar a aprendizagem do estudante durante todo o período de formação;
- tornar claro os critérios de avaliação, esclarecendo e compartilhando-os com os estudantes;
- fazer intervenções e feedbacks autênticos;
- promover um ambiente de aprendizagem em que o estudante possa trocar informações tanto com colegas quanto com o professor;
- encorajar os estudantes a arriscarem-se em suas produções;
- considerar as estratégias adotadas pelos estudantes, independentemente do nível;
- oportunizar tarefas com contextos realísticos e de preferência entrelaçadas com outras áreas do conhecimento;
- propor tarefas em que o estudante possa matematizar.
- proporcionar constante autoavaliação, para que o estudante seja responsável pela sua aprendizagem;
- utilizar diferentes instrumentos de avaliação para que se possa recolher mais e diferentes informações e evidências das realizações dos estudantes.

Mendes (2014) ressalta que a virtude de um instrumento está na utilização que se faz dele e das informações obtidas com ele. “Somente se oferecermos ampla variedade de possibilidades é que teremos uma chance de avaliação ‘justa’ em sala de aula” (DE LANGE, 1999, p. 7, tradução nossa^{vii}).

2.2 ASPECTOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Na Holanda, no final da década de 60 e início da década de 70, educadores elaboraram uma proposta curricular com intuito de uma reforma em oposição a um ensino estruturalista proposto pelo Movimento da Matemática Moderna e contrapondo também à abordagem mecanicista e à empirista. Hans Freudenthal (1905-1990) e outros educadores holandeses, inspirados principalmente em suas ideias e contribuições propuseram discussões a respeito do que consideravam ser, o que se chama hoje, uma Educação Matemática. Embora o movimento da reforma tenha começado no final da década de 60, a expressão Educação Matemática Realística começou a ser utilizada apenas no final dos anos de 1970 (TREFFERS, 1991).

A Educação Matemática Realística é uma abordagem de ensino que orienta as decisões na prática da sala de aula. Freudenthal, pesquisador e idealizador da RME, considera a matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1968, 1973, 1979), tal como a palavra, a escrita, o desenho, e a situa “entre as primeiras atividades cognitivas conhecidas e a primeira disciplina a ser ensinada, mas que evoluiu e transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua filosofia e a maneira de ser ensinada” (FREUDENTHAL, 1979, p. 321).

Uma característica da RME é que os estudantes, ao lidar com uma grande e variada quantidade de problemas e situações que têm sentido na realidade, desenvolvem conceitos matemáticos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). O termo realístico, é derivado de *realistic*¹³, e refere-se àquilo que o estudante pode imaginar (FREUDENTHAL, 1973; GRAVEMEIJER; COBB, 2006). A palavra "realística" não se refere apenas à relação com o mundo real no senso comum, mas, também, refere-se à situação que “faz sentido para os estudantes e faz com que eles se sintam confortáveis para começar a pensar porque se relaciona com os seus conhecimentos prévios. Pode estar relacionado ao cotidiano (real) vida, mas isso não é necessário” (WINSLOW et al., 2017, p. 87, tradução nossa^{viii}).

Os estudantes, nesta abordagem de ensino, devem aprender a analisar, a organizar situações e aplicar a matemática de forma flexível (com várias possibilidades de aplicações), em tarefas que são significativas para eles. “Do ponto

¹³ O termo “*realistic*” origina-se do verbo neerlandês “*zich REALISE-ren*”.

de vista do estudante, as tarefas devem, portanto, ser acessíveis, convidativas e que vale a pena ser resolvido” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 89, tradução nossa^{ix}).

Para Freudenthal (1968), os estudantes devem saber o que estão fazendo, aproveitar a oportunidade para pensar sobre o que realmente fizeram, refletir durante o aprendizado. Freudenthal (1973) defende uma perspectiva em que o estudante não é visto como receptor passivo de uma matemática pronta, o professor dá ao estudante a chance de reinventar a matemática à sua maneira, naquilo que foi denominado reinvenção guiada.

A educação é projetada para se encaixar o mais próximo possível do conhecimento informal dos estudantes e, portanto, ajudá-los a alcançar um nível mais alto de compreensão por meio da reinvenção guiada. Para apoiar este processo de reinvenção guiada, os problemas de avaliação devem fornecer ao professor um máximo de informações sobre o conhecimento, as percepções e as habilidades dos estudantes, incluindo suas estratégias (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 89-90, tradução nossa)^x.

Em relação ao estudante estar imerso em uma matemática sua, Freudenthal (1981) refere-se a oportunizar um processo análogo ao da experiência de matemáticos que também passaram por percalços.

A História da Matemática tem sido um processo de aprendizagem de esquematização progressiva. Os jovens não precisam repetir a história da humanidade, mas também não se deve esperar que comecem no mesmo ponto em que a geração anterior parou. Em certo sentido, os jovens devem repetir a história, embora não aquela que realmente aconteceu, mas o que teria acontecido se nossos ancestrais soubessem o que temos a sorte de saber (FREUDENTHAL, 1981, p. 140, tradução nossa^{xi}).

O professor, na reinvenção guiada, tem um importante papel a desempenhar ao ajudar o estudante a elevar seu nível de compreensão matemática, possibilitando “ao estudante tornar-se autor do seu conhecimento matemático” (SILVA, 2015, p. 76). A ideia não é apontar erros ou acertos dos estudantes nem validar as descobertas e ações, a reinvenção guiada, em linhas gerais, é um método de ensino (FREUDENTHAL, 1991) em que ações do professor estão na direção de proporcionar ao estudante para que formalize seus procedimentos informais, a fim de (re)inventar uma matemática mais formal que possa ser utilizada em outras situações e/ou contextos. “O estudante deve inventar algo que seja novo para ele, mas bem conhecido para o guia” (FREUDENTHAL, 1991, p. 48, tradução nossa^{xii}). Em relação

ao termo reinvenção guiada, Freudenthal (1991) atribui “re” na invenção referindo-se a uma invenção que o estudante fará, guiada pelo professor, mas semelhante ao que já foi feita por matemáticos.

Como a matemática é uma atividade humana, aprender matemática está relacionada ao fazer matemática, ou seja, é uma atividade de resolução de problemas ou organização de um assunto (DE LANGE, 1999; GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000). Freudenthal (1971) denominou essa organização de matematização. A matemática surgiu e surge por meio da matematização (FREUDENTHAL, 1991, p. 66, tradução nossa^{xiii}). Silva (2018) aponta que matematizar é fazer matemática e que a matemática é fruto de atividades mentais de cada indivíduo. A “matematização pode ser entendida como a organização da realidade utilizando ideias e conceitos matemáticos” (DE LANGE, 1999, p. 17, tradução nossa^{xiv}). Esta organização é no sentido de que os estudantes utilizam seus próprios conhecimentos para explorar tarefas propostas, a fim de descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas.

De Lange (1999, p. 18) afirma que a matematização pode estar presente em ações como:

- identificar a matemática específica em um contexto geral;
- esquematizar;
- formular e visualizar o problema;
- descobrir relações e regularidades;
- reconhecer semelhanças em diversos problemas; [...]
- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- aperfeiçoar e ajustar modelos;
- combinar e integrar de modelos;
- generalizar.

Como a matemática é uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1971, 1979, 1991), em suas múltiplas dimensões, o erro é um fenômeno que não só é visto como natural como também inerente à aprendizagem, fazendo parte de todo processo de construção do conhecimento. Autores da RME incentivam os professores a utilizarem de erros observados em estratégias de resolução, não para reprimir o estudante, mas sim para pontos de apoio para a aprendizagem das estratégias mais formais. Entende-se que para a RME não há lacunas na aprendizagem, pois os estudantes podem ser capazes de resolver um problema em diferentes níveis de matematização e formalização (DE LANGE, 1999).

Não há vacinas contra erros matemáticos. Pelo contrário, e em particular se a matemática deve ser reinventada sob orientação, erros são inevitáveis ou mesmo bem-vindos, desde que sejam usados para estimular a resistência contra sua própria consolidação e recorrência (FREUDENTHAL, 1991, p. 157, tradução nossa^{xv}).

Em relação às correções, van den Heuvel-Panhuizen (1996) considera que se pode levar em consideração os seguintes aspectos da resolução: representações, estratégias, erros dos estudantes. “Certo ou errado não é suficiente” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 159, tradução nossa^{xvi}), neste contexto a autora além de considerar os procedimentos em uma solução, também enfatiza que os professores, ao analisarem as estratégias/produções ou procedimentos de resolução de seus estudantes, podem adquirir pontos de apoio para intervenções. Para a autora, não é possível fazer uma simples distinção entre erros e acertos, devido aos diferentes tipos de problemas de avaliação, bem como ao desejo de obter mais informações a partir das respostas, pois:

Tal limitação seria uma injustiça à riqueza das respostas e aos diferentes aspectos que são distinguíveis em um resultado. Pode-se falar melhor da "razoabilidade" de uma resposta dada, ao invés da sua correção. Em certo sentido, isso implica colocar-se no lugar dos estudantes e se perguntar o que eles queriam dizer com sua resposta, ou qual poderia ter sido seu raciocínio (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 159-160, tradução nossa^{xvii}).

Usualmente, em sala de aula, a correção das produções dos estudantes é focada no que os estudantes “não sabem”. Na Educação Matemática Realística, por outro lado, a análise da produção escrita se dá a partir do que eles mostram saber¹⁴. “Isso não significa, entretanto, que saber o que eles não sabem não seja importante” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 93, tradução nossa^{xviii}). O ponto que a autora se refere não é tanto em focar no saber ou não saber, mas oportunizar ao professor reconhecer em que níveis eles são capazes de saber ou fazer algo para poder fazer intervenções na direção de provocar reflexões. Para tanto, é desejável que as tarefas devam ser familiares para os estudantes para oferecer-lhes oportunidade para matematização (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

¹⁴ Segundo princípio de De Lange (1999) - os métodos de avaliação devem possibilitar aos estudantes mostrarem o que sabem, não o que não sabem.

Freudenthal (1981), propõe fazer com que os estudantes reflitam sobre seus processos de aprendizagem a qual denomina “atitude matemática¹⁵”, essa atitude é expressa na matematização de situações cotidianas (FREUDENTHAL, 1981), indo de encontro à ideia da memorização, treinamento, rotinas em que não oportuniza o insight do estudante. Nesta perspectiva, tarefas de contextos podem oportunizar a atitude matemática. Dekker e Querelle (2002, p. 23, tradução nossa^{xix}) apresentam, em resumo, razões para usar tarefas com contextos em aulas de matemática:

- Para introduzir um novo tópico ou um novo conceito em matemática. Usando exemplos dentro do contexto, o conteúdo matemático envolvido torna-se claro.
- Para praticar um novo conceito ou procedimento. Fazendo muitos problemas em contextos diferentes com o mesmo conteúdo matemático, os estudantes aprendem como usar e aplicar este conteúdo.
- Para mostrar o poder da matemática. Entendendo que diferentes problemas de contexto são baseados no mesmo conteúdo matemático.
- Mostrar que o estudante domina o conteúdo matemático. Usando um contexto desconhecido em um teste baseado no mesmo conteúdo matemático que foi usado em aulas anteriores.
- Para envolver os estudantes no problema. Usando problemas da vida real, os estudantes podem mostrar que são alfabetizados matematicamente e sabem como usar a matemática para resolver problemas práticos que surgem em situações da vida real.

Para autores da RME, os contextos das tarefas buscam ser desafiadores, e envolver o estudante para dar suporte para a aprendizagem e auxiliá-los a pensar o/no contexto. Apresentar ao estudante uma matemática pronta e acabada é uma inversão do processo que levou à construção da matemática. Freudenthal (1991) considera que não é didático desta forma e a denominou de inversão antididática. “Geralmente, uma apresentação formal da matemática é bastante inacessível para estudantes iniciantes” (WINSLOW et al., 2017, p. 47, tradução nossa^{xx}).

Queremos que nossos estudantes sejam matematicamente alfabetizados, o que significa que não estamos interessados apenas em matemática em um determinado nível de compreensão, mas também no uso da matemática em uma ampla gama de situações (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 23, tradução nossa^{xxi}).

¹⁵ Freudenthal (1981, p.143 – tradução nossa) afirma que “embora saibamos muito bem o que entendemos sob uma atitude matemática, podemos descrevê-la apenas por um longo catálogo de exemplos e contraexemplos”, ou seja, não há uma definição. While we fairly well know what we understand under a mathematical attitude, we can describe it only by a long catalogue of examples and counter-examples.

A seguir, alguns argumentos contra a ideia de uma abordagem de matemática já estruturada no início do processo:

- O processo natural (ser conduzido por perguntas, problemas, curiosidade...) de chegar à matemática não é mostrado. Significado e motivação são retirados do estudante;
- A intuição que leva à teoria está distante do processo de aprendizagem;
- Não está claro o que é resolvido, modelado ou capturado pelo sistema (e o que não é);
- Heurísticas que eram necessárias para organizar a matemática dessa maneira são negligenciadas;
- A apresentação pode ser muito densa ou esparsa. Um aspecto da matemática pode ser muito difícil de entender, mas só recebe pouca ênfase em uma apresentação formal (WINSLOW et al., 2017, p. 47-48, tradução nossa^{xxii}).

Van den Heuvel-Panhuizen (2000a, 2010b) apresenta uma lista com seis princípios da RME fundamentais para caracterizar a RME, tais quais considera como de aprendizagem e de ensino de matemática. Estes princípios, em sua maioria, foram articulados por Treffers (1978) e reformulados ao longo dos anos e derivam das contribuições das ideias que Freudenthal defendia para o ensino da matemática. Esses princípios não devem ser vistos separadamente, mas relacionados. Os seis princípios são:

- o princípio da *atividade*, que se refere, em síntese, à interpretação da matemática como atividade humana, em que os estudantes são encorajados a serem participantes ativos do processo de aprendizagem;
- o princípio de *níveis*, segundo o qual os estudantes, no processo de aprendizagem, passam por vários níveis de compreensão: podem começar com a capacidade de reinventar assuntos com procedimentos informais e por meio da matematização avançam para a construção de uma matemática mais formal. A fim de construir esta relação, de um modelo menos formal para uma mais formal, a RME caracteriza como modelos emergentes, que se refere a um “modelo de” (uma situação particular) para um “modelo para” (generalizações), que possa servir para outras situações;
- o princípio da *interatividade*, em que os estudantes devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções uns

com os outros e com o professor, porque a aprendizagem é uma atividade social. Um ambiente em que o professor permita interações, pode oportunizar a regulação da aprendizagem e/ou aprimorar suas estratégias corroborando para que o estudante atinja um nível mais alto de compreensão;

- o princípio do *entrelaçamento*, em que o professor auxilia os estudantes a desenvolver uma visão integrada da matemática, ou seja, que as unidades temáticas, como números e álgebra, geometrias, tratamento da informação, e medidas não sejam trabalhadas separadamente;
- o princípio da *realidade*, em síntese, enfatiza que os estudantes sejam capazes de organizar as situações e os fenômenos por meio da matemática. Para tanto, como ponto de partida para a aprendizagem, é importante o professor propor boas tarefas, em que o estudante tenha oportunidade de organizar, por meio da matemática, fenômenos da realidade – matematizar;
- o princípio da *orientação*, em que os estudantes devem contar com uma oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática. O papel do professor é de fundamental importância uma vez que tem um papel de criar um ambiente favorável para aprendizagem para que os estudantes possam construir conhecimento matemático.

Para um planejamento a RME indica a elaboração de Trajetórias de Avaliação e Trajetórias de Ensino e Aprendizagem (TEA). Uma Trajetória de Avaliação pode ser entendida como o delineamento de caminhos que podem ser seguidos nas aulas e cujo ponto de partida é o processo de avaliação da aprendizagem (SILVA, 2018).

Ao longo do ano letivo, o professor avaliará constantemente o progresso individual dos estudantes e o progresso de toda a sala de aula dentro da trajetória de aprendizagem e, assim, avaliará os objetivos de aprendizagem pretendidos como pontos de referência. Esse processo em andamento e contínuo de avaliação formativa, juntamente com o chamado sentimento intuitivo dos professores para o progresso dos estudantes, completa o quadro da trajetória de aprendizagem que o professor constrói. (DE LANGE, 1999, p. 57-58, tradução nossa^{xxiii}).

Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, por sua vez, “descreve o processo de aprendizagem que os estudantes seguem” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000b, p. 18, tradução nossa^{xxiv}). A TEA tem como objetivo proporcionar aos professores uma perspectiva longitudinal dos processos de ensino e de aprendizagem, haja vista que “leva em consideração os processos de ensino e de aprendizagem a longo prazo dando uma visão geral desses processos” (ROSSETTO, 2021, p. 46).

Na TEA entrelaçam-se três componentes interrelacionados e complementares uns aos outros:

- uma **trajetória de aprendizagem** que dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos estudantes;
- uma **trajetória de ensino**¹⁶, composta por indicações didáticas que descrevem como o ensino pode se conectar e estimular o processo de aprendizagem de maneira mais eficaz;
- um **esboço do assunto**¹⁷, indicando qual dos elementos centrais do currículo de matemática devem ser ensinados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000b, p. 18, tradução nossa^{xxv}).

O professor, ao elaborar uma TEA, pode levar em conta, além dos assuntos esboçados, um planejamento das escolhas de tarefas e seus encaminhamentos, levando em consideração o princípio do entrelaçamento e o uso de problemas de contexto (SILVA, 2015). “Ter uma visão geral do processo pelo qual os estudantes passam é muito importante para trabalhar no progresso da compreensão dos estudantes” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000b, p. 18, tradução nossa^{xxvi}). Também pode levar em consideração o princípio de níveis, os estudantes podem trabalhar nas mesmas tarefas sem estar no mesmo nível de entendimento (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000b);

Em comparação ao que usualmente é visto nas escolas em que geralmente apresenta-se apenas uma lista de conteúdo a ser seguida, a TEA é um ponto de apoio para a tomada de decisão educacional, em vez de verificações de conhecimentos. Numa TEA é possível ver como estes conhecimentos são construídos em conexão.

¹⁶ A trajetória de ensino “é uma descrição dos passos que o professor pode seguir para trabalhar situações, tarefas, problemas planejados; executar os possíveis encaminhamentos programados; propiciar momentos de interação e reflexão; planejar um ambiente propício à matematização” (ROSSETTO, 2021, p. 60).

¹⁷ O Esboço do assunto refere-se ao professor elencar “conteúdos que poderá trabalhar em sala de aula, já que, dependendo do caminho, diferentes conteúdos poderão surgir” (ROSSETTO, 2021, p. 69).

Para Rossetto (2021, p. 77), os elementos que compõem uma TEA são, além do objetivo, a “perspectiva longitudinal, trajetória de aprendizagem, trajetória de ensino, sistematização, reflexão, interação, questionamentos, resoluções, estratégias e procedimentos, escolha de tarefas, ambiente de sala de aula, alunos e professor”.

2.3 O ERRO NA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Reconhecer os erros dos estudantes na aprendizagem, determinar suas causas e organizar o ensino tendo em conta essa informação, ou seja, o erro sendo visto como parte do processo de aprendizagem, como algo produtivo, indicador do conhecimento, que pode ser utilizado como ação didática e não que ele deva ser erradicado, são percepções em comum dos autores estudados que versam sobre a temática erro (ASTOLFI, 2004; ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006; BORASI, 1996; CURY, 2007; ESTEBAN, 2013; LUCKESI, 2011).

Cury (2007) destaca que os erros são fontes de saberes que o estudante possui, é um conhecimento que aponta para algum problema que exige atenção. Este saber é “construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas” (CURY, 2007, p. 80).

Para Borasi (1996), erros podem ser tomados como “trampolim para a aprendizagem”, ou seja, uma maneira de utilizar os erros em uma perspectiva de avaliação como oportunidades de aprendizagem, o professor pode criar caminhos para o estudante refletir a respeito, que, por sua vez, conduzem os estudantes as explorações e aprendizagens. Para a autora, é importante criar oportunidades para que os erros emerjam, sobretudo aqueles que podem se tornar obstáculos na aprendizagem de novos conceitos matemáticos.

Astolfi (2004), corroborando com modelos construtivistas de aprendizagem, mostra em seu trabalho como o erro adquire o status de indicador de tarefas intelectuais que os estudantes vão resolvendo e os obstáculos que enfrenta seu pensamento quando se trata de resolvê-los. Ou seja, o “obstáculo consiste em agir e refletir com os meios disponíveis, enquanto o aprendizado consiste em construir meios mais adaptados à situação” (ASTOLFI, 2004, p. 115, tradução nossa^{xxvii}).

O autor questiona: como não "errar" um caminho quando você não o conhece? Segundo as pesquisas do autor, o erro é encontrado com sua etimologia latina de "errar" (indo de um lado para outro), em sentido figurado, como incerteza e ignorância. Sabemos que “se alguém nos ensina, podemos evitar errar por um tempo, mas sabemos que assim que nos deixarem sozinhos teremos que assumir o papel de quem nos guiou até agora” (ASTOLFI, 2004, p. 115-116, tradução nossa^{xxviii}).

Abrate, Pochulu e Vargas (2006) tomam o erro como “a capacidade de considerar verdadeiros conceitos e procedimentos que são pouco desenvolvidos, incluindo ideias contraditórias ou falsas interpretações e justificativas” (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 21, tradução nossa^{xxix}). Frequentemente o erro é o “resultado de concepções inadequadas sobre aspectos fundamentais da matemática” (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 34, tradução nossa^{xxx}).

Esteban (2013) afirma que o erro “encarna uma dimensão criativa e múltiplos conhecimentos, que nos oferece pistas importantes, assinala trilhas não percebidas que devem ser consideradas e exploradas” (ESTEBAN, 2013, p. 141). O erro, para a autora, muito mais que o acerto, pode colocar em discussão a prática pedagógica. A autora discute a desmistificação da cultura do “certo/errado”, não importando classificar as respostas em certas ou erradas, “mas tomá-las como indícios de que aparecem como necessidade e possibilidade no processo de construção de conhecimentos” (ESTEBAN, 2013, p. 140). Para a autora, o erro e acerto são ambos aspectos produtivos nos processos de ensino e de aprendizagem.

a oposição erro/ acerto, marcada pela dicotomia saber/não- saber, contribui para o silenciamento daquelas cujas vozes não são ouvidas, reconhecidas e valorizadas no processo pedagógico, revelando a tensão inclusão/exclusão social nos procedimentos escolares (ESTEBAN, 2013, p. 132).

Cury (2007) também destaca que na análise das respostas dos estudantes, o importante não é classificar o acerto ou o erro em si, mas como os estudantes lidam com seu conhecimento, e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. Para a autora, a análise de erro constitui a análise da produção escrita, seja ela representativa de acertos ou erros. A análise de erros, como a abordagem em pesquisa, tem pontos de contato com temas da Educação, da Educação Matemática e da própria matemática.

A partir de uma prova o professor pode avaliar se o estudante foi capaz de responder adequadamente às suas perguntas. Porém,

o erro ou acerto de cada uma das questões não indica quais foram os saberes usados para respondê-la, nem os processos de aprendizagem desenvolvidos para adquirir o conhecimento demonstrado, tampouco o raciocínio que conduziu à resposta dada. Para a construção do processo ensino/aprendizagem, estas são as questões efetivamente significativas, e não o erro ou acerto como ressalta a lógica do exame (ESTEBAN, 2013, p. 98).

Tanto Cury (2007) quanto Esteban (2013), trazem a discussão de que, seja qual a resposta atribuída revelada em uma produção escrita do estudante, independente de acertos e erros, possa tomá-las como indícios para que o professor busque junto ao estudante, a construção daquilo que falta em relação aos saberes ou simplesmente provocar uma oportunidade de aprofundar-se em um determinado conhecimento.

Abrate, Pochulu e Vargas (2006) ressaltam que o estudo dos erros poderia proporcionar chaves para aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem de matemática. Para esses autores, “embora o erro pode ter procedências diferentes geralmente tende a ser considerado como a presença de um esquema cognitivo inadequado no estudante, não apenas como consequência de uma falta específica de conhecimento” (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p.11-12, tradução nossa^{xxxi}).

Ressalta-se que os erros não aparecem por acaso, mas emergem em uma estrutura conceitual consistente, baseada em conhecimentos previamente adquiridos, e todo processo de instrução está potencialmente gerando erros, devido a diferentes causas, algumas das quais inevitavelmente surgem. Também se deve levar em conta que as oportunidades dos estudantes para aprender Matemática dependem do ambiente e do tipo de tarefas e discurso em que participam, dependendo do que aprendem de como estão envolvidos em atividades matemáticas, que por sua vez marcam as atitudes que eles têm para esta ciência (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 12, tradução nossa^{xxxii}).

Abrate, Pochulu e Vargas (2006) consideram que erros em matemática podem ser superados e aceitos, não como algo que não deveria ter aparecido, mas como um exemplo cuja aparência é útil e interessante, “pois permite a aquisição de um conhecimento novo e melhor” (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 12, tradução nossa^{xxxiii}).

Isso não significa que o erro seja algo desejável no processo de aprendizagem, mas sim que ele não deve ser visto como indesejável ou evitável, tendo em vista seu caráter inevitável.

Para Borasi (1996), erros podem servir como ferramenta poderosa para diagnosticar dificuldades específicas de aprendizagem e, conseqüentemente, direcionar soluções.

[...] erros dos estudantes são vistos como parte inevitável e integral da aprendizagem e uma fonte valiosa de informação sobre o processo de aprendizagem, uma pista que pesquisadores e professores devem aproveitar para descobrir o que um estudante realmente sabe e como ele ou ela construiu esse conhecimento (BORASI, 1996, p. 40, tradução nossa^{xxxiv}).

Cury (2007), concorda com a perspectiva de Brousseau (1986) de que os erros são manifestação de obstáculos¹⁸, que o estudante traz para a sala de aula. Ao focar a noção de obstáculo e aproximá-la da ideia de erro, tem que se considerar que

o obstáculo é um conhecimento. Assim sendo, o aluno constrói este conhecimento relacionando-o com outros, em diferentes contextos, tentando adaptá-los às novas situações e resistindo em abandoná-los. É por esse motivo que torna tão difícil superá-lo, já que, para isso, o aluno (e o professor, por suposto) terá de trabalhar da mesma forma que o faz quando da construção de um novo conhecimento, com o agravante de que o “falso” saber (aquele que funciona bem no contexto anterior) estará, ainda, por trás da nova construção (CURY, 2007, p. 34-35).

Astolfi (2004), traz uma discussão a respeito de correções de tarefas focadas em erros, criticando a forma como professores o fazem: “Intermináveis e exaustivas correções, sem pensar se serão eficazes, e sem acreditar que os estudantes vão levá-los em conta e, mesmo assim, continuam perseverando” (ASTOLFI, 2004, p. 111, tradução nossa^{xxxv}). Na presença de uma situação tão pouco reconfortante, os professores “evitam, tanto quanto possível, cruzar caminhos com erro” (ASTOLFI, 2004, p. 112, tradução nossa^{xxxvi}).

Cury (2007) critica o uso de testes para avaliar o raciocínio do estudante. Um teste não é capaz de avaliar os caminhos percorridos para chegar a uma solução. A autora enfatiza a importância de se analisar o processo e não apenas o produto. Deste olhar, pode-se aproveitar os erros para questionar com os estudantes.

[...] para a análise de erros, além dos vários tipos de problemas propostos, vale a ênfase na observação detalhada da resolução, com

¹⁸Bachelard (1996) apresenta a noção de obstáculo epistemológico, porém Brousseau(1986) foi quem introduziu esse estudo na Didática da Matemática.

o cuidado de registrar o pensamento em voz alta os estudantes, de questionar suas respostas, para verificar como pensavam ao solucionar as tarefas. Essa é, em meu entender, a maneira de enfatizar o produto – ou seja, focar a atenção a produção escrita ou oral, para, a partir dela, voltar ao aluno e auxiliá-lo a fazer uma análise da sua forma de aprender” (CURY, 2007, p. 28).

A noção de erro dominante na escola, representa “um marco na configuração da avaliação como um processo seletivo” (ESTEBAN, 2013, p. 132). Considera como um desafio desvelar os mecanismos que produzem o fracasso escolar como também procurar alternativas para a sua superação (ESTEBAN, 2013). Para a autora, estudantes que não demonstram saber o que foi ensinado, que se distanciam do padrão de desenvolvimento considerado normal, trazem turbulência para os processos de ensino e de aprendizagem. Destaca que

um olhar que reconheça a turbulência e que não a interprete como falta, impossibilidade e incapacidade, negação, pode indagar as conexões que efetivamente estão se estabelecendo no processo, os novos elementos que estão sendo configurados (ESTEBAN, 2013, p. 172).

Abrate, Pochulu e Vargas (2006), a partir de suas pesquisas, concordam em considerar como características gerais acerca dos erros cometidos pelos estudantes, os seguintes aspectos:

- Os erros surgem na aula geralmente de forma espontânea. Eles surpreendem o professor, embora possam ser desenvolvidos muito antes;
- São persistentes e particulares para cada indivíduo. São difíceis de superar porque exigem uma reorganização do conhecimento no estudante;
- Há um predomínio de erros sistemáticos em relação a erros aleatórios ou ocasionais. Erros sistemáticos revelam os processos mentais que levaram o estudante a um entendimento errado;
- Os estudantes no momento não têm consciência do erro, porque não questionam o que parece óbvio e não consideram o significado dos conceitos, regras ou símbolos com os quais trabalham;
- Os erros sistemáticos são geralmente o resultado de concepções inadequadas dos fundamentos da matemática, reconhecíveis ou não reconhecíveis pelo professor;
- Alguns erros são gerados na compreensão do estudante ou no processamento das informações fornecidas pelo professor. Os estudantes, por exemplo, recriam ou inventam seu próprio método com base no método descrito pelo professor (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 35, tradução nossa^{xxxvii}).

Estes autores inferiram a partir das informações de suas pesquisas que, muitos dos erros cometidos têm sua origem nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática com características como:

- Uso exacerbado de técnicas algorítmicas ou rotinas sem fundamentos teóricos;
- Uso de pequenas regras insignificantes como requisitos indispensáveis na execução de cálculos aritméticos ou resolução de equações;
- Desenvolvimentos muito ligados ao algébrico e pouco relacionados à resolução de problemas;
- Abordar conteúdo completamente descontextualizado e pouco articulado com o restante;
- Pouca importância dada ao desenvolvimento de habilidades relacionadas à leitura crítica de dados e análise de gráficos;
- Abuso de protótipos visuais que inibem a formação de imagens conceituais;
- Tratamento de problemas também focados no numérico (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 141, tradução nossa^{xxxviii}).

Dependendo do tipo de erro que o estudante manifesta o conteúdo de cada unidade de ensino deveria se “adaptar, expandir ou variar para lidar com a diversidade de erros e dificuldades que os estudantes possam apresentar” (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 146, tradução nossa^{xxxix}). Para isso é essencial conhecer a natureza dos erros que os estudantes cometem em cada conteúdo a ser desenvolvido.

O Quadro 2, refere-se a uma síntese da categorização de erros do trabalho de Abrate, Pochulu e Vargas (2006), com exemplos alusivos para uma compreensão.

Quadro 2 - Categorizações de erros

Categorias de erros	Descrição
Erros devidos à linguagem matemática	São produzidos por uma tradução incorreta de fatos matemáticos descritos em um idioma natural para outros mais formais em linguagem matemática ou para uma linguagem simbólica.
Erros devidos a dificuldades na obtenção de informações espaciais	Eles são atribuídos a dificuldade na capacidade para pensar mediante a imagens espaciais ou visuais.

Erros devidos a inferências ou associações incorretas	Eles são gerados pela aplicação de regras e propriedades justificadas por esquemas semelhantes ou inferir que eles são válidos em contextos semelhantes ou relacionados. Nestas circunstâncias, o estudante está ciente de que a situação levantada é diferente de outras abordagens, no entanto, "inventa" novas regras ou deriva a validade de outras situações.
Erros devidos à recuperação de um esquema anterior	São causados pela persistência de alguns aspectos do conteúdo ou processo de resolver uma situação, mesmo quando as condições fundamentais da tarefa matemática em questão foram modificadas. Nestas instâncias, o estudante não está ciente de que a situação é diferente para outros levantados, por isso não faz inferências sobre a validade de regras ou propriedades.
Erros devido a cálculos incorretos ou acidentais	São erros que surgem quando cada passo na realização da tarefa está correto, ou responde à lógica interna do procedimento esperado, mas o resultado não é a solução devido aos erros de cálculo que são apresentados na execução de operações básicas, ou realizadas pela transferência equivocada de símbolos e números envolvidos na situação.
Erros eventuais devidos às deficiências na construção do conhecimento prévio	São causados por aprendizado incorreto ou de fatos inadequados, habilidades e conceitos anteriores inadequados que interferem em um adequado processamento de informações.
Erros devido à falta de conhecimento prévio	Eles são causados pela falta de aprendizado de fatos, habilidades e conceitos anteriores, que inibem totalmente o processamento da informação

Fonte: Os autores, baseados em Abrate, Pochulu e Vargas (2006).

Investigar e reconhecer a natureza dos erros não está no fato de apenas analisar os padrões de erros que os estudantes mais comentem, mas principalmente buscar os indícios sobre quais estratégias podem ser as mais convenientes em vista a superá-los, e estes aspectos são comuns nos autores estudados. Buscar os indícios da natureza do erro, podem servir para um tratamento didático.

O ponto de partida, segundo a Esteban (2013, 2013, p. 32), para lidar com erros é o diálogo

[...] criando espaço para que seja explicitada a pluralidade de vozes existentes na vida escolar cotidiana, permita e estimule a reflexão, individual e coletiva, sobre o processo desenvolvido na sala de aula e a busca de formas coletivas de intervenção no sentido de ampliar a democratização do ensino.

Para tanto, a sala de aula, como espaço plural, segundo a autora, deve criar condições para a interpretação das experiências múltiplas que os sujeitos trazem, “favorecendo a apropriação das interpretações e conhecimentos que se

mostrem necessários” (ESTEBAN, 2013, p. 131). A autora reconhece o potencial construtivo do feedback e incentiva atividades coletivas para a efetivação da aprendizagem.

Apoiando-se em Bachelard, Astolfi (1999) investigou o status do erro na escola e propõe um resumo da tipologia dos erros dos estudantes, e seus possíveis tratamentos, alertando para a potencialidade desses no processo de ensino, apresentados no Quadro 3. Propõe considerar o erro como uma ferramenta para ensinar, um revelador dos mecanismos de aprendizagem do estudante.

Quadro 3 - Tipologia de erros dos estudantes segundo Astolfi (1999)

Natureza do diagnóstico	Mediação e solução
1. Erros devido à reescrita (redação) e compreensão das instruções	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise da legibilidade dos textos escolares; ● Trabalhar na compreensão, seleção e formulação de instruções;
2. Erros resultantes de hábitos escolares ou de uma má interpretação das expectativas	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise do modelo e dos hábitos didáticos em vigor; ● Trabalho crítico sobre expectativas;
3. Erros resultantes de concepções alternativas dos estudantes	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise das representações e obstáculos subjacentes ao conceito estudado; ● Trabalho de escuta, conscientização dos estudantes e debate científico no centro da aula;
4. Erros relacionados às operações intelectuais envolvidas.	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise das diferenças entre exercícios que parecem próximos, mas que iniciam diferentes habilidades lógicas matemáticas; ● Seleção mais forte de atividades e análise de erros na estrutura;
5. Erros nos processos adotados.	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise da diversidade de processos “espontâneos”, distanciados da estratégia esperada de “modelos” que se esperava; ● Trabalhar nas diferentes estratégias propostas para favorecer a evolução individual;
6. Erros devido à sobrecarga cognitiva na atividade.	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise da carga mental da atividade; ● Decomposição em subtarefas com dimensões cognitivas que podem ser gerenciadas;

7. Erros que têm origem em outra disciplina	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise de características estruturais comuns e diferentes características de superfície nas duas disciplinas; ● Trabalho de pesquisa sobre os elementos invariáveis das situações;
8. Erros causados pela complexidade do conteúdo	<ul style="list-style-type: none"> ● Análise didática dos nós de dificuldade intrínsecos aos conceitos, insuficientemente analisados.

Fonte: Astolfi (1999), p. 82, tradução nossa^{xl}.

Astolfi (2004) considera que professores deveriam fazer um esforço de deixar de lado a fixação por identificar se os estudantes se distanciam da norma, fato que nos faz considerar os erros como elementos excludentes que devem ser punidos, para começar a usá-los de modo estratégico, trata-se de aprofundar na lógica de erro e aproveitá-lo para a aprendizagem. “Há um ‘conhecimento de erro’, como explicam Jean-Pierre Jaffré e outros, dizendo que as invenções dos estudantes devem ser guiadas e orientadas antes de sublinhar inutilmente a incompletude de seus conhecimentos” (ASTOLFI, 2004. p. 119, tradução nossa^{xli}).

Para Borasi (1996) uma forma para lidar com erro consiste em “capitalizar¹⁹erros no ensino de matemática”^{xlii}. A autora distinguiu e explorou, a partir de inúmeras pesquisas, experiências de ensino, diferentes formas de usar erros como trampolins para pesquisa em matemática. Identificou três níveis do discurso matemático, que influenciam na forma como os erros são capitalizados: Realizando uma tarefa específica de matemática, compreendendo algumas técnicas de conteúdo matemático e compreendendo a Natureza da Matemática.

Independentemente do nível do discurso matemático, Borasi (1996) também identificou diferentes atitudes de aprendizagem que parecem influenciar as atitudes e objetivos dos estudantes no estudo de erros: remediação, descoberta e investigação^{xliii}.

Os três níveis do discurso matemático definidos anteriormente, combinados com as três atitudes de aprendizagens, formam o que Borasi (1996, p. 279) denomina de “taxionomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa”,

¹⁹ O termo capitalizar para a autora refere-se a reunir e aproveitar.

ou seja, nove (9) formas distintas de explorar os erros em matemática como trampolins para pesquisa resumidamente apresentado do Quadro 4.

Alguns encorajamentos sugeridos por Borasi (1996):

- Esperar que os estudantes desenvolvam atitudes mais positivas em relação à matemática e sejam encorajados a se engajar em atividades matemáticas tanto dentro quanto fora da escola;
- Os professores devem ser encorajados a assumir uma atitude e uma sensibilidade para erros que lhes permitam reconhecer e aproveitar as oportunidades de investigação que eles oferecem como parte integrante de uma atividade geral de resolução de problemas ou investigação;
- As questões levantadas pelos erros podem iniciar a exploração e a reflexão em direções totalmente novas, e até mesmo convidar os estudantes a desafiar o status quo;
- Encorajar o estudante a escrever uma “explicação” sobre como realizou determinada tarefa;
- Criar salas de aula de matemática em que os estudantes se envolvem ativamente na investigação matemática e na tomada de sentido como uma comunidade de pesquisa;
- Encorajar a pensar em outras formas de validar resultado;
- Encorajar os professores a incentivar os estudantes a ouvir os resultados dos colegas e feedback sobre seu próprio trabalho;
- Comparar e avaliar soluções alternativas propostas por diferentes estudantes.

Quadro 4 - Taxonomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa

Nível de discurso matemático			
Disposto a aprender	Realizando uma tarefa específica de matemática	Compreendendo algumas técnicas de conteúdo matemático.	Compreendendo a Natureza da Matemática

Remediação	Análise de erros reconhecidos para entender o que houve de errado e corrigi-lo, de forma a realizar a tarefa definida com sucesso. (Remedição/tarefa)	Análise de erros reconhecidos para esclarecer mal-entendido de conteúdo técnico-matemático. (Remedição/conteúdo)	Análise de erros reconhecidos para esclarecer mal-entendido sobre a natureza da matemática ou questões gerais de matemática. (Correção / matemática)
Descoberta	Erros e resultados incertos são utilizados de forma construtiva no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitorando o trabalho para identificar possíveis erros. (Descoberta/ tarefas)	Erros e resultados incertos são utilizados de forma construtiva à medida que se aprende sobre um novo conceito, regra, tópico etc. (Descoberta / conteúdo)	Erros e resultados incertos são utilizados de forma construtiva à medida que se aprende sobre a natureza da matemática ou algumas questões gerais de matemáticas. (Descoberta / matemática)
Investigação	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem gerar investigação em novas direções e novas tarefas matemáticas a serem realizadas. (investigação/tarefa)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas e percepções, não contempladas no planejamento original. (investigação/ conteúdo)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas e percepções inesperadas sobre a natureza da matemática ou algumas questões gerais de matemática. (Investigação / matemática)

Fonte: BORASI, 1996, p. 279, tradução nossa^{xliv}.

O Quadro 5, indica como a capitalização de erros pode sugerir diferentes implicações em termos de oportunidades de aprendizagem.

Quadro 5 - Contribuição da capitalização de erros

Capitalização de erros	Implicações em termos de oportunidades de aprendizagem
Permitir que os estudantes entendam melhor a natureza da matemática como disciplina.	Várias atividades de erro proporcionam a um meio concreto e acessível para abordar questões matemáticas abstratas, como a natureza das definições matemáticas, e, além disso, os estudantes ficaram mais conscientes do papel da incerteza, limitações e julgamento pessoal em matemática.

Facilitar a aprendizagem de conteúdo matemático significativo.	Isso foi conseguido muitas vezes como resultado das reflexões e explorações desenvolvidas em atividades de erros específicos, aproveitando-se do potencial de erros para criar conflito cognitivo.
Tornar os estudantes mais proficientes em "fazer" matemática.	As habilidades de representação de problemas, comunicação e raciocínio, melhoraram com o resultado de sua prática significativa no contexto de atividades de erro específicas, e os estudantes da experiência se tornaram aprendizes matemáticos mais independentes como resultado de aprender a monitorar e analisar seus próprios erros.
Tornar os estudantes mais confiantes em sua capacidade de aprender e usar matemática.	Isto foi conseguido especialmente como resultado do desenvolvimento de uma atitude mais saudável sobre cometer erros e de perceber a matemática como mais acessível a eles, e mostrou concretamente as atitudes e comportamentos dos estudantes no final das experiências.

Fonte: Adaptação de Borasi (1996), p. 168, tradução nossa^{xiv}.

Abrate, Pochulu e Vargas (2006) apresentam um capítulo com algumas recomendações e sugestões de trabalho para aulas de matemática. Sugerem que o estudante participe ativamente do processo de superação de seus próprios erros. Se o erro

[...] for descoberto como resultado de uma interação ou debate entre professor e estudante, ele promoverá a melhoria, uma vez que os estudantes podem modificar suas ideias antigas quando estiverem convencidos de que existe outra que é melhor (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 146, tradução nossa)^{xlvi}.

Borasi (1996) coloca que investigações matemáticas, podem ser especialmente importantes para desafiar alguns equívocos comuns sobre a natureza da matemática que podem ter contribuído para a aversão e desafeição de muitos estudantes em relação a esse assunto na escola (BORASI, 1996). Algumas sugestões de questionamentos para reflexões e discussões sobre a natureza da matemática:

- Existem outros casos em que em matemática algo pode estar certo e errado ao mesmo tempo? Como poderia ser?
- Como podemos decidir se uma dada regra é certa ou errada em matemática? Será sempre possível fazê-lo?
- O mesmo símbolo pode ser usado na matemática para significar coisas diferentes? Se sim, por quê (BORASI, 1996, p. 10, tradução nossa)^{xlvii}?

Para lidar com o erro, é preciso refletir no modelo de investigação que emerge das críticas ao paradigma de transmissão (BORASI, 1996). Para tanto, é fundamentado no seguinte conjunto de pressupostos sobre matemática, conhecimento, aprendizagem e ensino:

- Uma visão da matemática como disciplina humanista; isto é, a crença de que o conhecimento matemático é socialmente construído e falível, bem como moldado por valores culturais e pessoais.
- Uma visão do conhecimento mais geral do conhecimento como construído através de um processo de investigação em que a incerteza, o conflito e a dúvida fornecem a motivação para a busca contínua por uma compreensão cada vez mais refinada do mundo.
- Uma visão da aprendizagem como um processo gerador de construção de significado, exigindo interação social e construção pessoal, e informada por contexto e propósitos;
- Uma visão do ensino como estimulante e apoiando a própria investigação dos estudantes e estabelecendo um ambiente de aprendizagem propício para essa investigação (BORASI, 1996, p. 23-24, tradução nossa^{xlviii}).

Borasi (1996) sugere como uma possibilidade de ação didática é aceitar provisoriamente um resultado equivocado, oportunizando análises em conjunto ou levando os estudantes a questionar suas próprias respostas para (re)construir o próprio conhecimento. Perguntas como “o que aconteceria se aceitássemos esse resultado?” ou “em que circunstâncias esse resultado pode ser considerado correto?” (BORASI, 1996, p. 29, tradução nossa^{xlix}) são sugeridas.

Uma sala de aula em que busque formas de explorar o erro, buscando promover diálogo, discussões e reflexões que oportunizem aprendizagem, parecem ser bem diferentes de como o erro geralmente é tratado em sala de aula, ou seja, tratado como fonte de exclusão.

A partir dos pressupostos discutidos, apresentamos na seção seguinte, os procedimentos metodológicos da pesquisa.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Tendo em vista o interesse de investigar ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística frente ao erro, como apresentado por autores da literatura alcançada, este estudo de natureza teórica caracteriza-se como qualitativo, de cunho interpretativo, em que buscou-se analisar os dados à luz do instrumento metodológico denominada Análise de Conteúdo disposta pelas orientações de Bardin (2016), que a define como “um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens (BARDIN, 2016, p. 44)”.

Para a autora, a Análise de Conteúdo pode ser organizada principalmente em três polos cronológicos: 1) **pré-análise**, 2) **exploração do material** e 3) **tratamento dos resultados, inferência e interpretação**.

A **pré-análise** é uma etapa em que se busca organizar o material a ser analisado. Esta organização possui geralmente três missões: “[...] a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final” (BARDIN, 2016, p. 125) a qual são estreitamente ligados entre eles. Os procedimentos inseridos nesse momento distinguem-se em: leitura flutuante; escolha dos documentos; formulação das hipóteses e objetivos; referenciação dos índices e elaboração dos indicadores; e preparação do material. O objetivo desta etapa é “tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais” (BARDIN, 2016, p. 125).

De maneira geral, a leitura flutuante refere-se a uma leitura que visa conhecer do que se trata o assunto abordado; a escolha de documento é a seleção do material que será analisado; a formulação de hipóteses e objetivos são suposições, cuja origem é a intuição, que permanece em suspenso enquanto não for submetida à prova de dados seguros; a referenciação dos índices e elaboração dos indicadores refere-se elaboração de índices, que fornecem indícios da mensagem, do conteúdo e de indicadores, que são os elementos que asseguram os índices previamente estabelecidos e; a preparação do material refere-se a uma preparação formalizada (BARDIN, 2016).

A **exploração do material** “consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 2016, p. 131). Para a autora, se as diferentes operações da

pré-análise forem convenientemente concluídas, esta fase não é mais do que a aplicação sistemática das decisões tomadas. Nesta fase da exploração do material há duas fases: a codificação do material e a categorização.

A codificação “corresponde a uma transformação – efetuada segundo regras precisas – dos dados brutos do texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo ou da sua expressão” (BARDIN, 2016, p. 133).

A categorização “é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos” (BARDIN, 2016, p. 147). De modo geral, as categorizações são classe que reúnem um grupo de elementos sob um título genérico. Esses agrupamentos foram realizados em razão das características comuns destes elementos (BARDIN, 2016).

Na fase de **tratamento dos resultados obtidos e interpretação**, “pode-se propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas” (BARDIN, 2016, p. 131). É o momento da intuição, da análise reflexiva e crítica. Nesta fase, os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos e “[...] permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise” (BARDIN, 2016, p. 131).

Para compor a **pré-análise** deste trabalho, foram feitas buscas de teses, dissertações, artigos em periódicos que tratavam do tema “erro” na aprendizagem escolar.

Para a escolha das Teses e Dissertações foi feita uma busca com a palavra “erro” na plataforma CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior)²⁰, resultando em 12803 trabalhos²¹. Em seguida, foram aplicados os seguintes filtros:

- tempo: de 2000 a 2019;
- grande área do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra e Multidisciplinar;

²⁰ Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br>

²¹ Pesquisa feita em 18 de fevereiro de 2020 e confirmada em 26 de fevereiro de 2020.

- área de conhecimento: Ensino, Ensino de Ciências e Matemática, Interdisciplinar e Matemática;
- área de avaliação: Ensino, Ensino de Ciências e Matemática, Interdisciplinar e Multidisciplinar;
- área de concentração: Ciência tecnologia e educação, Educação Matemática, Ensino, Ensino de Ciências e Matemática, Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Ensino de Matemática, Ensino e aprendizagem e seus fundamentos Filosóficos e Científicos, Ensino e aprendizagem de ciências e matemática, Formação de professores em ciências e matemática.

Após essa filtragem, obtivemos 86 trabalhos, sendo 17 teses (Apêndice A) e 69 dissertações (Apêndice B). Então, foi feita uma leitura flutuante dos textos e optamos por manter apenas os trabalhos que se referiam ao “erro” em um contexto educacional, resultando em 3 teses e 14 dissertações, apresentadas no Quadro 6.

Quadro 6 - Informações das Teses e Dissertações

Ano	Tipo	Título	Autor(a)	Orientador (a)/coorientador	Programa
2013	Tese	Aprendizagem consciente: o relatório de reflexão dos erros (RRE) como alternativa pedagógica	SILVA, Andre Gustavo Oliveira da	SALVI, Rosana Figueiredo	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina
2013	Dissertação	Metodologia didática de análise de soluções aplicada no ensino de frações	VAZ, Rafael Filipe Nova	NASSER, Lilian	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro

2013	Dissertação	Erros e dificuldades de alunos em álgebra elementar: uma metanálise qualitativa de dissertações brasileiras de mestrado	SANTOS, Sueli dos Prazeres	Fiorentini, Dario	Programa de Pós-Graduação de Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas
2013	Dissertação	Fotografias; Percepção dos alunos; Erros; Modelagem Matemática.	ROCHA, Josy.	SANT'ANA, Marilaine de Fraga	Programa de pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul
2014	Tese	Desenvolvimento profissional de professores que lecionam matemática no ensino fundamental: possibilidades a partir da reflexão sobre os erros dos alunos	COSTA, José Roberto	PAVANELL O, Regina Maria	Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá
2014	Dissertação	Jogos com conteúdos matemáticos para os anos finais do Ensino Fundamental	PFIFFER, Claudimara da Silva	BAIER, Tânia	Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau
2015	Dissertação	O Enem como indicador qualitativo do ensino: uma aplicação às questões de Física	MARCOM, Guilherme Stecca	KLEINKE, Maurício Urban	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas

2015	Dissertação	A concepção de erro entre os professores de matemática: tensões entre falibilismo e absolutismo	RAMOS, Syana Monteiro de Alencar	SOUSA, Cidoval Morais de	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba
2015	Dissertação	A compreensão do professor sobre os erros dos alunos, em itens envolvendo expectativas de aprendizagem dos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental	SANTOS, John Kennedy	SANTOS, Marcelo Câmara dos	Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco
2016	Dissertação	Um estudo sobre o erro no processo de ensino-aprendizagem de hidrostática a partir de uma sequência de atividades investigativas	CARVALHO, Francarlos Martins de.	CAMELO, Midori Hijioka	Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal
2016	Dissertação	Investigando Erros em Matemática: Fatores que Interferem na Aprendizagem dos Educandos	ESCOBAR, Felipe Corrêa da Cruz	KISTEMANN JR, Marco Aurélio	Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora
2017	Dissertação	O erro no ensino de matemática: reflexões a respeito de ações docentes no processo de ensino	SOUSA, Valdirene da Silva de	BIANCHINI, Barbara Lutaif	Programa de Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

2017	Dissertação	Uma Análise do Erro de um Grupo de Estudantes do Ensino Médio em uma Escola de Juiz de Fora – MG sob a Ótica Sociocontextual	ZAGNOLI, Tiago de Paula	KISTEMAN N JR, Marco Aurélio	Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora
2018	Dissertação	Formação continuada para professores de matemática: o erro como recurso pedagógico e seu papel no processo de avaliação	RIZZON, Bruna Moresco	LIMA, Isolda Gianni de Coorientadora: SAUER Laurete Zanol	Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul
2019	Tese	Identificação e caracterização do perfil de erros e dificuldades de aprendizagem nas questões de estatística e probabilidade das provas de matemática do ENEM nos anos de 2013 a 2016 dos aprovados na primeira chamada do SISU para ingressar na UFRN	PONTES, Jailson da Costa.	NUÑEZ, Isaura Beltrán	Programa de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte
2019	Dissertação	As potencialidades e limitações de um trabalho de tratamento pedagógico dos erros matemáticos no 9º ano de uma escola pública de MG	ANTÃO, Andréa Cristina de Oliveira	MOREIRA, Plínio Cavalcanti	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto

2019	Dissertação	Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva	SILVA, Luciano Pontes da	FONSECA, Laerte Silva da	Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Fundação Universidade Federal de SERGIPE
------	-------------	--	--------------------------	--------------------------	---

Fonte: Os autores.

Para a pesquisa de artigos em periódicos, foram feitas buscas em duas plataformas: no Portal de Periódicos da CAPES/MEC²², cujo acesso foi feito por meio da Comunidade Acadêmica Federada (CAFe) e na plataforma Sucupira²³.

No Portal de periódicos da CAPES/MEC, o refinamento foi feito com a escolha de duas palavras na busca avançada, “erro” e “aprendizagem”, no período de 2000 a 2019, gerando 1449 trabalhos²⁴. Ao filtrar periódicos revisados por pares resultou em 1291 trabalhos. Dos resultados, foram preservados os tópicos: Matemática, Educação Matemática, Educação, Experiência/Tratamento teórico e Aprendizagem, resultando em 758 trabalhos. Outro refinamento foi feito para trabalhos em 4 idiomas: francês, inglês, português e espanhol totalizando 752 trabalhos. O refinamento foi feito em outro momento e, por motivos desconhecidos, a plataforma não permitiu maiores refinamentos. Optou-se por excluir os trabalhos que continham a palavra “erro” apenas como um dado estatístico, ou não havia informações na direção do estudo.

O Quadro 7, refere-se à organização sintetizada da busca dos periódicos da Plataforma CAPES/MEC apresentando o respectivo Qualis, bem como a quantidade de artigos apontados pela busca.

Na Plataforma Sucupira²⁵, para identificar as pesquisas que já foram publicadas a respeito do tema erro, desenvolveu-se uma busca pelos periódicos com

²² Disponível em: <https://www.periodicos.capes.gov.br/>

²³ Disponível em:

<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/veiculoPublicacaoQualis/listaConsultaGeralPeriodicos.jsf>

²⁴ Pesquisa feita na data de 25 de março de 2020.

²⁵ Pesquisa feita na data de 27 de janeiro de 2021

Qualis A1 e A2²⁶, do quadriênio 2013-2016²⁷, da área de Educação e da área de Ensino.

Quadro 7 – Periódicos alcançados pela Plataforma CAPES/MEC

Periódicos	Qualis	Quantidade de artigos
Educação & Realidade	A1	1
Educação e pesquisa	A1	1
Estudos em Avaliação Educacional	A2	1
Roteiro	A2	2
Revista Iberoamericana De Educación	A2	1
Interface: Comunicação, Saúde, Educação	A2	1
Interciência	B1	1
RAM - Revista de Administração Mackenzie	B1	1
Estudios Pedagógicos (Valdivia)	B1	1
Holos	B1	6
Educação Matemática e Pesquisa	B2	18
Revista Nómadas - revista crítica de ciencias sociales y jurídicas	B2	1
Total		35

Fonte: Os autores.

Na área de avaliação da Educação Qualis A1, a plataforma apontou 121 registros de periódicos e de Qualis A2, 380 registros. Na área de avaliação de Ensino Qualis A1, a plataforma apontou 145 registros de periódicos e de Qualis A2, 198 registros. O Quadro 8 refere-se a um resumo destas informações.

²⁶ Ao iniciar busca dos periódicos na plataforma CAPES, não foram feitos pontos de cortes do Qualis, uma vez que o número de publicação era plausível ao tempo do término do doutoramento. Já na busca de periódicos da Plataforma Sucupira, identificou-se uma quantidade muito grande de artigos e revistas, não sendo possível trabalhar no período estabelecido para o término do doutoramento, logo, optou-se como um ponto de corte, revistas com Qualis A1 e A2.

²⁷ A busca por periódicos na Plataforma Sucupira ainda não contempla as novas classificações do Qualis, sendo a última, até a presente data, a de Quadriênio 2013-2016.

Quadro 1 - Levantamento de revistas apontadas pela plataforma Sucupira na área de Avaliação de Educação e Ensino, de Qualis A1 e A2

Área de avaliação	Qualis	Quantidade de revistas apontada pela plataforma Sucupira
Educação	A1	121
	A2	380
Ensino	A1	145
	A2	198

Fonte: Os autores.

Com os periódicos já selecionados, realizou-se uma busca de artigos, do ano de 2000 a 2019, em que havia os termos “erro”, “erros”, “análise de erro” e “análise de erros”. No Quadro 9, foram indicados os periódicos que continham os termos pesquisados, indicando-se a área de avaliação, o Qualis e a quantidade de publicações encontrada na respectiva revista.

Quadro 9 - Levantamento de artigos da Plataforma Sucupira nas revistas selecionadas

	Revista	Área de avaliação	Qualis	Quantidade de artigos
1	Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior	Educação	A1	1
2	BOLEMA: Boletim de Educação Matemática (Online)	Educação e Ensino	A1	7
3	Cadernos de Pesquisa (Fundação Carlos Chagas - Online)	Educação e Ensino	A1	0
4	Ciência & Educação	Educação e Ensino	A1	3
5	Educação (UFMS - Online)	Educação	A1	2
6	Educação e Pesquisa	Educação e Ensino	A1	1
7	Educação & Realidade	Educação e Ensino	A1	1

8	ETD - Educação Temática Digital	Educação	A1	1
9	Educar em Revista	Educação e Ensino	A1	1
10	Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação	Educação e Ensino	A1	2
11	Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Online)	Ensino	A1	1
12	Acta Scientiae (Ulbra)	Ensino	A2	11
13	Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas (Online)	Ensino	A2	3
14	Atos de Pesquisa em Educação (FURB)	Ensino	A2	1
15	Contexto & Educação	Ensino	A2	1
16	Educação (Porto Alegre)	Educação	A2	2
17	Educação Matemática em Revista	Ensino	A2	12
18	Educação Matemática em Revista -RS	Ensino	A2	6
19	Educação Matemática Pesquisa (Online)	Ensino	A2	12
20	Estudos em Avaliação Educacional (Online)	Educação e Ensino	A2	3
21	Imagens da Educação	Educação e Ensino	A2	2
22	Nuances: Estudos sobre Educação	Ensino	A2	1

23	Práxis Educativa	Ensino	A2	1
24	Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)	Ensino	A2	5
25	<i>Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática</i>	Ensino	A2	8
26	Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos RBEP – INEP	Educação	A2	1
27	Revista de Educação Pública (UFMT)	Ensino	A2	1
28	Revista de Educação, Ciências e Matemática	Ensino	A2	2
29	Vidya (Santa Maria)	Ensino	A2	8
30	Zetetiké - Revista de Educação Matemática.	Ensino	A2	1
Total de publicações				101

Fonte: Os autores.

Em síntese, na plataforma CAPES/MEC foram encontrados 35 artigos, enumerados no Quadro 7 e listados no Apêndice D; na plataforma Sucupira, por sua vez, foram encontrados 101 artigos, enumerados no Quadro 9 e listados no Apêndice C, totalizando 136 artigos. Desse montante, 11 foram encontrados em ambas as plataformas (Quadro 10); assim, a quantidade final de artigos analisados neste trabalho foi de 125.

Quadro 10 - Artigos em comum das plataformas CAPES/MEC e Sucupira

	Ano	Título	Autores	Revista
1	2009	Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada	Lori Viali Helena Noronha Cury	Educação Matemática Pesquisa (Online)

2	2010	O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem.	Gerson Pastre de Oliveira Ricardo Uchoa Fernandes	Educação Matemática Pesquisa (Online)
3	2012	Pesquisas em ensino de ciências e matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos.	Helena Noronha Cury	Educação Matemática Pesquisa (Online)
4	2013	Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática	Vânia Maria Pereira Santos-Wagner Roberta D'Angela Menduni Bortoloti Juliana Rodrigues Ferreira	Educação Matemática Pesquisa (Online)
5	2013	Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática.	Helena Noronha Cury	Educação Matemática Pesquisa (Online)
6	2016	Concepções do erro matemático em 36 anos de publicações em revistas de educação matemática no Brasil	André Gustavo O. Silva Rosana Salvi Marinez Meneghello Passos	Educação Matemática Pesquisa (Online)
7	2016	Eu sei o que tenho que fazer: conquista da autoregulação.	Claudia Leme Ferreira Davis Marina Muniz Rossa Nunes	Estudos em Avaliação Educacional (Online)
8	2016	Um estudo sobre problemas de tradução relativos às propriedades de limites de função real de uma variável real.	Dailson Evangelista Costa Mônica Suelen Ferreira de Moraes Marisa Rosâni Abreu da Silveira	Educação Matemática Pesquisa (Online)
9	2017	Sentir, Significar e Construir Conhecimento com Base nos Erros.	Luciane Guimarães Batistella Bianchinil Mario Sergio VasconcelosII	Educação & Realidade
10	2019	As ajudas como estratégias de professores em duas tradições do ensino de matemática.	Alejandra Avalos Rogel	Educação Matemática Pesquisa (Online)

11	2019	Erros e obstáculos em torno dos objetos ostensivos de taxas de variação: autoanálises dos discentes da engenharia civil do IFBA – Eunápolis.	Celso Eduardo Brito Luiz Marcio Santos Farias	Educação Matemática Pesquisa (Online)
----	------	--	---	---------------------------------------

Fonte: Os autores

Dos levantamentos de literatura e da leitura flutuante, a fim de elaborar indicadores que fundamentem a interpretação final, conforme orientação de Bardin (2016), foram feitos inventários com os trechos dos textos que continham a expressão erro ou relações ao termo erro.

As informações partem dos excertos dos artigos nas duas plataformas, dissertações e teses encontradas nas buscas feitas.

A partir dos inventários, foi iniciada a segunda fase da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016), a **exploração do material**. Nesta fase, foram feitas codificações e agrupamentos, para isso buscou-se identificar a ideia central de cada um dos trechos inventariados em que na sequência foram agrupados correlacionando com temas que derivavam dela em grupos constituídos a posteriori, ou seja, subentendidos em decorrência delas, organizando-os em planilhas. Alguns dos trechos ou parágrafos estavam contidos em mais de um agrupamento, uma vez que remetiam a mais de uma ideia central.

Para a terceira fase da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016), **tratamento dos resultados, inferência e interpretação**, foi organizado um quadro em que nas linhas estão contidas os agrupamentos escolhidos na exploração do material e as colunas indicando: os nomes provisórios dos agrupamentos; as ideias essenciais do conjunto de informações destes agrupamentos; o que autores da RME pensam a respeito das ideias propostas do conjunto de informações dos agrupamentos e sugestões de ações didáticas à luz da RME que abarcam respectivamente o conjunto de informações destes agrupamentos. Esta organização em quadro foi uma forma encontrada para compor a construção da análise. Ressalta-se que neste procedimento agrupamentos foram excluídos e outros, reorganizados, uma vez que possibilitou um mergulho nas ideias e reflexões direcionando, enfim, para as escolhas do tema deste trabalho.

A fim de ilustrar nesta seção como foi feito o agrupamento dos excertos, escolhemos um de Bianchini e Vasconcelos (2017, p. 1038), em que os autores afirmam que “receio, medo, ansiedade são apenas alguns dos vários

sentimentos vivenciados pelo aluno diante do erro”. No procedimento de análise, ao ler esse excerto, buscamos inferimos qual sua temática central e, nesse caso, concluímos que é “o que o erro pode causar”. Isso foi feito para cada um dos outros excertos e, assim, os grupos foram constituídos.

Como o método escolhido para a análise foi retirar excertos que continham o verbete “erro” extraídos dos textos das teses, dissertações e artigos, é preciso observar que nem sempre os excertos referem-se à opinião dos autores. Em determinados momentos, por exemplo, certos excertos referiam-se, no decorrer do texto, há uma crítica, e como foram extraídos para a análise, aparentam ser a opinião do autor, no entanto estão fora de contexto.

Ao final do processo da elaboração do quadro, o conjunto de informações dos agrupamentos a serem analisados totalizaram em onze: como erro usualmente é visto nas escolas; correção; o que o erro pode causar; causa do erro; erro como oportunidade de aprendizagem; autoavaliação; erro como algo natural; erro de caráter construtivo; para que serve o erro; erro na prática de investigação; dicotomia acerto e erro.

Em síntese, os dados que foram analisados e discutidos neste trabalho, são aqueles excertos produzidos a partir das buscas dos levantamentos de literatura.

Como já discutido na seção da introdução deste trabalho, de maneira geral, a discussão do erro em pesquisas na área da Educação Matemática tem sido feita nessas duas vertentes: a do erro como falta de conhecimento ou como algo a ser punido, reprimido e a do erro como oportunidade de aprendizagem pertinente à regulação do ensino e à regulação da aprendizagem. Estas duas vertentes definidas a priori, com base na literatura, que por essência são conflitantes, vão ser utilizadas como uma forma de reagrupar os onze (11) agrupamentos levantados. Reorganizada no Quadro 11.

O objeto de análise deste trabalho partiu desta organização: utilizamos, então, os 125 artigos advindos das plataformas CAPES/MEC e Sucupira e os 17 trabalhos de teses e dissertações (3 e 14, respectivamente) que foram analisados e serão apresentados na seção seguinte.

Quadro 11 - Agrupamentos em duas vertentes

Erro como falta de conhecimento como algo a ser punido ou combatido	Erro como oportunidade de aprendizagem/regulação para gerar uma estratégia didática
<ul style="list-style-type: none"> ● como erro usualmente é visto nas escolas; ● correção; ● o que o erro pode causar; ● possíveis causas do erro. 	<ul style="list-style-type: none"> ● erro como oportunidade de aprendizagem; ● autoavaliação; ● erro como algo natural; ● erro de carácter construtivo; ● para que serve o erro; ● erro na prática de investigação; ● dicotomia acerto e erro.

Fonte: Os autores.

4 ALGUMA ANÁLISE

Esta seção está organizada em duas subseções, que contemplam as duas vertentes apontadas no Quadro 11: “Erro como falta de conhecimento como algo a ser punido ou combatido”; e “Erro como oportunidade de aprendizagem/regulação para gerar uma estratégia didática”. Em ambas as subseções foram analisadas e descritas ideias essenciais dos excertos inventariados, seguidas das ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística.

De acordo com o dicionário, algumas acepções **ação** são: “evidência de uma força, de um agente etc.; o seu efeito; disposição para agir; atividade, energia, movimento; faculdade de agir, de se mover; modo de proceder; comportamento; efeito de alguém ou algo sobre outra pessoa ou coisa; influência; acontecimento, ocorrência; atividade prática, concreta, que intervém no real em contraste à passividade de uma atitude puramente especulativa ou teórica; processo dinâmico em que há um agente que faz algo” (HOUAISS, 2009, CD-ROM) e **didático** pode ser entendido, dentre outras coisas, como “relativo a didática; destinado a instruir; que facilita a aprendizagem; que proporciona instrução e informação, assim como prazer e divertimento” (HOUAISS, 2009, CD-ROM).

A partir das definições de dicionário e das leituras em Educação Matemática Realística, entenderemos “ação didática” neste trabalho como **um modo de proceder ou de agir do professor em sala de aula com a intenção de auxiliar os processos de aprendizagem, de avaliação e de ensino, com vistas à formação dos estudantes.**

Desse modo, a partir deste momento, até o fim da seção de análise, **aparecem frases destacadas em negrito que se referem a ações didáticas que propomos e que são condizentes com a perspectiva da RME.** Consideramos que tais ações didáticas constituem a tese aqui defendida.

Como uma das etapas do método foi retirar excertos que contemplavam a ideia do erro, algumas ideias apresentadas na análise estão fora de contexto e não necessariamente representam concepções e ideias do(s) autor(es). Para evitar algum mal-entendido, foi tomada a decisão de não referenciar a autoria do excerto.

4.1 ERRO COMO FALTA DE CONHECIMENTO COMO ALGO A SER PUNIDO OU COMBATIDO

Esta vertente, conforme o Quadro 11, será apresentada a partir de quatro agrupamentos: “Correção”; “Como o erro usualmente é visto nas escolas”; “O que o erro pode causar; e “Quais as possíveis causas do erro”.

4.1.1 Como erro usualmente é visto nas escolas

O conjunto de informações, retiradas dos excertos deste agrupamento, traz a ideia de que o erro é visto como a confirmação da impossibilidade de sucesso do estudante, algo a ser evitado, escondido, indesejável, punível, inaceitável, abominável, desvinculando-o de qualquer processo de evolução, como um “não saber”, levando em conta apenas o produto e não o processo. O estudante é visto como aquele que não acompanhou, que não estudou ou que não compreendeu os “ensinamentos” do professor.

O erro é concebido como uma falha, como algo a ser substituído, sem nenhuma reflexão prévia. O acerto, por sua vez, é tratado com deferência, sendo incentivado e demarcado como objetivo maior do processo de ensino da escola: “o acerto significa que houve aprendizagem”. Em contrapartida, o erro se refere a uma falsa representação, um negativo do pensamento e/ou dificuldades do estudante.

Como a RME toma o processo da avaliação como didática, há uma visão oposta de como o erro é usualmente visto nas escolas, o erro observado na produção do estudante em vez de escondido, inaceitável, abominável ou indesejável, é até “bem-vindo” (FREUDENTHAL, 1991, p. 157, tradução nossa¹). O erro oportuniza ao professor ter pontos de apoio para a aprendizagem. Os indícios de erro podem oportunizar ao professor ter uma visão de suas próximas intervenções na direção de provocar reflexões e regulações ao estudante.

Para a RME, a matemática é uma atividade humana, em sua práxis e suas múltiplas dimensões o erro é um fenômeno que não só é visto como natural como também inerente à aprendizagem, fazendo parte de todo processo de construção do conhecimento.

Mesmo que o estudante responda corretamente uma questão, não quer dizer que houve aprendizagem e nem mesmo pode-se afirmar que, em um equívoco, o estudante não aprendeu. O erro e até o mesmo o acerto não são vistos

como a confirmação nem da impossibilidade nem da possibilidade de sucesso, pois tanto o acerto, quanto o erro não são garantias de saber ou de não saber (HADJI, 1994). Mesmo no caso de uma resposta correta, o estudante pode ter chegado incorretamente (DEKKER; QUERELLE, 2002), isso só significa que ele resolve corretamente. Conhecer e aprender não se referem a responder corretamente uma ou outra questão.

Os momentos de análise sobre as hipóteses são construídos pelo estudante, não são para evidenciar respostas certas e erradas, saber ou não saber, e nem sucessos e insucessos, mas sim provocar reflexão para que os estudantes reinventem a Matemática. O ponto não é tanto para distinguir entre: saber e não saber, em habilidade ou não habilidade, mas para saber distinguir em que níveis eles são capazes de saber ou fazer algo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

A RME propõe que os estudantes tenham oportunidades para a matematização, e leva em consideração todo o processo de resolução de uma tarefa, não somente sua resposta final. Todavia, não quer dizer que o produto não seja importante, mesmo porque, na RME, respostas finais, mesmo certas ou erradas, podem ser levadas a outros questionamentos na direção de oportunizar outros processos de pensamento e reflexões das respostas apresentadas.

Um dos aspectos essenciais na RME são as reflexões das atividades matemáticas, das respostas apresentadas que podem permitir uma mudança no nível de compreensão. É comum nesta abordagem os estudantes serem convidados a explicar suas soluções e resoluções para o professor e para os colegas, oportunizando que ideias levantadas os façam repensar novamente. Esta interação pode gerar regulação e entendimento de conceitos que podem levar a outros níveis de pensamento. Para tanto, o professor pode **promover um ambiente de sala de aula em que o estudante se sinta livre para arriscar-se em suas respostas, encarar o erro de forma natural e até como bem-vindo nas discussões.**

Como a matematização pode ocorrer em diferentes níveis e os “níveis de matematização estão ligados aos vários níveis de compreensão pelos quais os estudantes podem passar” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 13, tradução nossa^{li}), o estudante não é visto como aquele que não acompanhou, que não estudou ou que não compreendeu algo em que o professor tenha trabalhado; os erros do estudante são indícios para identificar o nível em que se encontram e, a partir disso, o professor tem a oportunidade de elaborar intervenções necessárias.

Oportunizar a matematização é essencial na RME, pois serve de auxílio na construção de novos conhecimentos, de novas relações com base em conhecimentos anteriores, independentemente do nível em que se encontra o estudante. O processo de matematização implica que os estudantes sejam capazes de analisar e organizar tarefas utilizando ferramentas matemáticas que, até certo ponto, eles próprios desenvolveram. Na perspectiva da RME, os estudantes são indivíduos, cada um seguindo um caminho de aprendizagem individual.

Diferente de como o erro usualmente é visto nas escolas, desvinculando-o de qualquer processo de evolução, como um “não saber”, o **professor na perspectiva da RME é incentivado a saber lidar com o nível que a produção do estudante evidencia. O professor produz e emite feedbacks genuínos, a fim de provocar reflexões para aprendizagens.** Os feedbacks podem encaminhar-se na direção de guiar o estudante a construir relações, de um modelo menos formal para um mais formal. **Conhecer os problemas de aprendizagem de seus estudantes, os progressos e nível de formalidade que estão operando (DE LANGE, 1999), é desejável para buscar atender as necessidades dos estudantes.**

Quando instrumentos de avaliação são utilizados na Avaliação Didática (RME), não tem a única/principal função de classificar ou certificar se o estudante aprendeu um determinado assunto, como usualmente é vista nas escolas, a ideia é **colher informações, pistas, para futuras ações e dessa forma, informar possíveis caminhos para o ensino, ou seja, auxiliar na regulação dos processos de ensino e de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).** Para tanto, **é interessante propor boas tarefas que possam ser resolvidas de diferentes maneiras, que iniciem a ação de matematizar, que busque desencadear processos de reflexões que permitam ao professor enxergar em que níveis os estudantes são capazes de saber ou fazer algo.** Ao elaborar intervenções ou proposição de tarefas coerentes **é ideal que o professor tenha clareza de seus objetivos de ensino e de aprendizagem (DE LANGE, 1999).**

4.1.2 Correção

O conjunto de informações presentes no agrupamento “Correção” permite trazer a ideia de que a correção das produções escritas dos estudantes possa

servir para mostrar caminhos, para aprimorar a aprendizagem e não para evidenciar fraquezas e insucessos. Apresenta também a importância de o professor corrigir os erros quando eles são cometidos a fim de evitar que eles se tornem sistemáticos.

Ainda, as informações deste agrupamento trazem que é necessário mudar o sentido do erro nas práticas corretivas, utilizando-se para isso, de outras estratégias para a “correção” das respostas dos estudantes, que o momento da correção passa a existir como um momento de reflexão sobre as hipóteses que vierem sendo construídas pelo estudante e não para considerá-las como, definitivamente, certas ou erradas.

As informações do agrupamento também apontam que, durante a correção da resolução das tarefas, pode haver desinteresse do estudante, pois geralmente o foco está voltado em saber o resultado quantificado pela nota e estabelecer comparações com os pares ao invés do aprendizado do conteúdo. Pode haver diferentes reações que variam desde a euforia pelo bom desempenho até manifestações de emoções negativas por um mau resultado.

Embora haja perguntas e manifestações de dúvidas por parte de uns poucos, muitos dos que copiam a resolução, durante uma correção, fazem de forma passiva, não evidenciando a existência de uma reflexão necessária para compreensão e superação do erro.

A RME ressalta a ideia de que a correção ao servir para “mostrar caminhos” não é no sentido de apresentar respostas exatas, prontas e acabadas, em que, muitas vezes, o professor entende a aprendizagem como algo a ser adquirido por meio de reprodução de procedimentos. “Mostrar caminhos” também não é no sentido de precisar dominar algo para prosseguir para um possível próximo conteúdo, para aqueles professores que seguem à risca uma sequencial lista de conteúdos preestabelecidos. Para a RME, o sentido de **“mostrar caminhos” está na direção das oportunidades de aprendizagem e reflexão que as explorações de tarefas podem oferecer** (DEKKER; QUERELLE, 2002).

Tradicionalmente, a matemática é ensinada como uma matéria pronta. Os estudantes recebem definições, regras e algoritmos, de acordo com os quais se espera que eles procedam. Apenas uma pequena minoria aprende matemática dessa maneira. Se você perguntar aos matemáticos como eles leem artigos, a maioria deles responderá que eles tentam reinventar seus conteúdos. Acredito que o jovem aprendiz pode reivindicar o mesmo privilégio (FREUDENTHAL, 1991, p. 48, tradução nossa^{lii}).

Na Avaliação Didática, a reprodução de procedimentos pouco contribui para o processo de aprendizagem. O professor, **ao conduzir uma “correção”, guia seus estudantes para que eles mesmos cheguem às suas próprias conclusões, oportunizando regulação de suas aprendizagens.** Em vez de tentar ajudar os estudantes a fazerem conexões com um corpo de conhecimento matemático objetivo, já construído e pronto, por vezes muito abstrato para eles, **pode-se guiar os estudantes a construir a matemática de uma forma mais fundamentada, ou seja, buscar construir um novo conhecimento matemático, construído sobre o que eles já sabem** (GRAVEMEIJER, 2005), por meio da reinvenção guiada e os modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999, 2008).

O professor, no ponto de vista da RME, **promove um ambiente em sala de aula em que os estudantes possam interagir e regularem suas aprendizagens e se autoavaliarem como um processo natural e contínuo.** “Autoavaliação é entendida como o processo em que o estudante se avalia por meio de instrumentos fornecidos pelo professor ou não” (SILVA, 2018, p. 37). Neste ambiente **o estudante é incentivado a ser responsável e proativo em sua própria aprendizagem.** Ao incentivar o estudante a ser proativo em sua própria aprendizagem, sobrepõe-se o papel usualmente adotado nas escolas em que o estudante é passivo e/ou copiadador de respostas.

Em relação à importância de o professor corrigir os erros quando eles são cometidos, a fim de evitar que eles se tornem sistemáticos, a RME pensa ao contrário, considera que é importante **não apontar erros dos estudantes e nem os acertos. O professor, neste processo, é um guia e, por meio da reinvenção guiada, faz intervenções, emite feedbacks,** no intuito de oportunizar reflexões e regulação de sua aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), diferentemente do professor corrigir os erros no momento que eles são cometidos.

Para a RME, não há lacunas que devam ser reprimidas ou corrigidas, não há erros para superar (DE LANGE, 1999). Isso se dá, porque o estudante, ao estar mergulhado no processo de matematização, sendo ele participante ativo em seus processos mentais, acaba por desenvolver tipos de ferramentas matemáticas e insights, conjecturas, tentativas, hipóteses, esquematização para um desenvolver da matemática. Nessa direção, **o professor faz intervenções, questiona os estudantes, proporciona que matematizem, discute as estratégias adotadas e, a toda oportunidade, auxilia o estudante a refletir em sua aprendizagem.**

Uma das consequências de não apontar erros ou validar uma resposta é que o professor deixa de ser autoridade em relação à resposta correta, sem deixar de ser a autoridade da sala de aula. A autoridade do professor está na medida em que ele é responsável por orientar e guiar os estudantes, escolher as tarefas, os tópicos de discussões, orquestrar as discussões nos grupos ou com a turma toda, enfim, todas as ações didáticas em prol de um ambiente que oportunize aprendizagem (GRAVEMEIJER, 2005).

Entende-se que correções não devem ter fim nelas mesmas, mas ir além: **o professor pode fazer intervenções, emitir feedbacks genuínos** (individual ou coletivamente, direta ou indiretamente, afirmativa ou interrogativamente), seja verbalmente ou nas produções escritas, questionar os estudantes, proporcionar que matematizem e discutam as estratégias adotadas e assim proporcionar que o próprio estudante reflita a respeito de sua aprendizagem e, conseqüentemente, a regule (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; DE LANGE, 1999). Esses feedbacks podem ser dados na direção de provocar o estudante a construir relações, de um modelo menos formal para uma mais formal.

A RME corrobora com a ideia de mudar o sentido do erro nas práticas corretivas, utilizando-se para isso, outras estratégias para a “correção” das respostas dos estudantes. O momento da correção passa a ser momentos de reflexões sobre as hipóteses que vierem sendo construídas pelo estudante (HOFFMANN, 1993).

Astolfi (2004), traz uma crítica em relação a professores que corrigem provas exaustivamente, sem pensar e sem acreditar que os estudantes vão levar as correções em conta e, mesmo assim, continuam perseverando e que a prática corretiva utilizada na avaliação, é injusta, imprecisa e em nada ajuda na superação do erro.

Algumas sugestões de instrumentos que podem ser utilizados em uma avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem se encontram no Quadro 12.

Quadro 12 - Alguns instrumentos de avaliação

Instrumentos de avaliação	Uma breve explicação
Portfólio	É um conjunto organizado de registros ou trabalhos produzidos pelo estudante ao longo de determinado período.

Prova de levar para casa	O estudante leva a prova para casa e tem a autonomia de buscar informações, utilizando quaisquer materiais ou até mesmo pedindo ajuda a outras pessoas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).
Prova de ensaio	Os estudantes são convidados a escrever respondendo a um artigo de jornal, ou dar a sua opinião acerca de alguma situação da vida cotidiana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).
Prova-Escrita-em-Fases	Consiste em uma prova escrita que foi primeiro concluída na escola, depois corrigida e comentada pelo professor e, posteriormente, devolvida ao estudante para o trabalho adicional em casa. Tal prova poderia compor-se de questões de resposta longa bem como as questões de resposta curta (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).
Produção de prova	Atribuir aos estudantes que eles mesmos criem uma prova (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).
Prova de raciocínio com informações fragmentadas	Individualmente ou em grupo, propor certas informações de forma fragmentada, então, pedir para tirar as partes relevantes da informação, combiná-las e, se necessário, completá-las com outras informações, a fim de testar uma dada hipótese. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).
Prova-Escrita-com-Cola	É uma prova escrita na qual o estudante tem a sua disposição um pedaço de papel, a cola, em que ele pode anotar as informações que julgar pertinentes para utilizar durante a realização da prova (FORSTER, 2016).
Vaivém	Consiste no estabelecimento de um espaço de comunicação (por escrito) entre professor e estudantes (individualmente). De maneira geral, pode-se dizer que no vaivém, o professor faz uma pergunta para toda a classe e cada estudante responde em uma folha de papel. A partir da resposta individual de cada estudante, o professor faz outras perguntas, comentários ao estudante (SILVA, 2018).
Provas orais	Discussão oral sobre um assunto ou uma tarefa.
Mapas conceituais	É uma estrutura gráfica que ajuda a organizar ideias, conceitos e informações de modo esquematizado.
Observação	A Observação Didática olha para os alunos vendo-os, podendo funcionar como elemento regulador para a tomada de decisões na sala de aula e pode atuar como processo subordinado ao serviço da aprendizagem (CORDEIRO, 2021).

Fonte: Os autores

Estes e outros instrumentos são estudados por autores do GEPEMA e por outros da avaliação da aprendizagem escolar. Salienta-se que, seja qual o instrumento escolhido pelo professor **no processo de avaliação, a intenção e objetivos devem estar claros, assim como os critérios de correção**. É desejável que o professor permita que **“os estudantes devem entender claramente os**

parâmetros usados para avaliar seu trabalho” (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 58, tradução nossa^{liii}). **Jamais fazer dos erros fonte de desconto de pontos** (DEKKER; QUERELLE, 2002).

Instrumentos de avaliação na Avaliação Didática, não têm a função de classificar ou certificar aprendizagens, como usualmente é feito nas escolas. A ideia é que, por meio da recolha de informações geradas a partir dos instrumentos avaliativos, sejam pistas para informar possíveis caminhos para o ensino, para próximas ações didáticas. Portanto, **os resultados da correção para a RME são meios/recursos para reorientar o planejamento das aulas, oportunizando ao professor ressignificar suas próximas ações** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Outra ação didática relativa à ressignificação de uma prática exaustiva de correção é a avaliação pelos pares e a autoavaliação (DE LANGE, 1999). Avaliação pelos pares e a autoavaliação além de ajudar o estudante a assumir mais responsabilidade por sua própria aprendizagem, oportuniza refletir sobre seu próprio entendimento (DE LANGE, 1999). Na avaliação por pares, os estudantes veem como seus colegas lidam com as tarefas, o que pode provocar uma discussão entre os estudantes sobre diferentes estratégias e soluções, ajudando a clarificar os seus pontos de vista (DE LANGE, 1999).

4.1.3 O que o erro pode causar

Para a análise desse agrupamento, serão discutidos três aspectos: o que o erro pode causar ao estudante, ao professor e além do ambiente escolar.

Em relação ao que o erro pode causar ao estudante, observou-se que o conjunto de informações do agrupamento evidencia causas emocionais e/ou psicológicas, como: receio, medo, sofrimento, tormento, ansiedade, sentimento de incompetência, de inabilidade, limitações, comparação, classificação, diferenciação, exclusão, tristeza, incapacidade, decepção, bloqueio cognitivo, inibição, vergonha, frustração de expectativas, angústia, raiva, insegurança sobre suas descobertas, desmotivação para prosseguir na execução das atividades propostas, incapacidade de questionar as ações alheias, desânimo, desejo de se tornarem invisíveis, diminuição da alegria, satisfação e a possibilidade de realização no ambiente escolar.

Podem ficar desacreditados em suas possibilidades de avanço na aprendizagem da matemática, pode ser associado ao ridículo ou ao fracasso escolar, insucesso, a falta, a carência, a incapacidade para justificar a repreensão, a censura. Pode interferir no papel das relações interindividuais para construção de conhecimento.

O cerceamento de oportunidades assume a função de disciplinamento dos indivíduos para que se ajustem às expectativas sociais; a estupidez, a inépcia, a inaptidão e a inércia passam a ser seus rótulos.

O medo do estudante ser considerado fraco, relapso, pouco engajado, desatento, de tal modo que parece decorrer automaticamente, dele próprio. Pode instituir fronteiras que rompem laços, impedem o diálogo, a rebaixar e depreciar aqueles que o cometem, a culpar o estudante pelas próprias dificuldades.

Além disso, pode-se levar o estudante a sentir-se ignorante, desestimulando seu pensamento crítico, gerando o conformismo e a necessidade de o estudante apenas obedecer, mesmo sem concordar, sem encontrar espaço para negociações, pois tudo já está definido.

O sentimento de culpa pode levar o estudante a desistir de tentar, cristalizando-se a vontade de desaparecer; muitos se calam, não mais respondendo a perguntas e explicitando dúvidas, outros abdicam do direito de resolver tarefas avaliativas e os espaços em branco se multiplicam nas provas, alguns passam a faltar, até que o abandono do processo de aprendizagem e a evasão se consolidam, em decorrência, são privados do direito à fruição de bens culturais e materiais produzidos pela humanidade.

Por parte do professor, o erro pode causar medo de “crucificação” representada pelo fato de não ter conseguido ensinar.

Extrapolando o ambiente escolar, o estudante pode sentir vergonha, pois carrega consigo a sensação de estar diante de um público real ou imaginário que julga o indivíduo inaceitável e merecedor de abandono. O medo de receber uma nota baixa, pode levar o estudante, em casa, a ser castigado. Pode acarretar na baixa autoestima, se os maus resultados se mantêm em muitas ocasiões. Pode acontecer um pré-julgamento em relação à matemática, se os pais ou irmãos já tiveram dificuldades nesta disciplina.

O estudante tende a sentir-se desestimulado e a perder a confiança. A reprovação extrapola o tempo escolar de permanência do estudante e se perpetua

no cenário complexo da escola como instituição inserida na sociedade e ainda inibidora da criatividade.

O fato de se permanecer aprisionado fisicamente (e legalmente) a um sistema escolar durante 10 a 12 anos e receber repetidamente classificações negativas durante este período deve exercer algum efeito prejudicial decisivo no desenvolvimento da personalidade e do caráter.

Ao que o erro pode causar nos três panoramas levantados baseado no conjunto de informações deste agrupamento, abarcam uma forma de violência e com ela consequências. As agressões levantadas de ordem psicológicas e/ou emocionais são consideradas sob diversas óticas e são amplas, subjetivas e imprecisas no ambiente escolar. A Avaliação Didática pode ser uma abordagem que contribui para o desenvolvimento dos estudantes, que oportuniza aprendizagens, com diminuição do fracasso escolar e os sentimentos mencionados.

Relacionadas ao panorama do que o erro pode causar “por parte do estudante”, a RME, por tomar o processo da avaliação como didática, corroborando com a ideia de que o erro pode ser um objeto importante para os processos de ensino e de aprendizagem, incentiva usar os erros observados em estratégias de resolução não para reprimir o estudante, mas sim como pontos de apoio para a aprendizagem. Como a matemática para a RME é reinventada sob orientação, “erros são inevitáveis ou até bem-vindos” (FREUDENTHAL, 1991, p. 157,^{liv} tradução nossa). Assim, receios, medos de errar e as sensações mencionadas diante ao erro que possivelmente abarcam o âmbito emocional, para a RME são tratadas de forma natural, bem diferente do como o erro usualmente é visto nas escolas. A avaliação para a RME é para evidenciar o que os estudantes sabem ao invés do que eles não sabem (DE LANGE, 1987), é para distinguir em que níveis os estudantes são capazes de saber ou fazer algo.

A sensação dos estudantes não se sentirem capazes de questionar as ações alheias, interferindo no papel das relações interindividuais para construção de conhecimento são pouco prováveis de acontecer na RME, uma vez que o ensino e a aprendizagem da matemática são processos dinâmicos. O princípio da interatividade junto ao princípio da orientação, fazem esta dinâmica acontecer, oportunizando trocas entre os pares e o professor, incentivando os estudantes a compartilharem suas descobertas e pensamentos, **sem precisar se preocupar com as certezas no processo de matematização. Para tanto, o professor cria um**

ambiente propício para a dinâmica acontecer, oportunizando momentos em que as interações ocorram. Momentos em que o estudante possa expressar suas ideias, seus processos de pensamento a fim de regularem suas aprendizagens e refletirem.

A respeito de possíveis inseguranças do estudante sobre suas descobertas e desmotivação para prosseguir na execução das atividades propostas, a RME propõe—que sejam trabalhadas com os estudantes, tarefas envolvendo contextos que promovam a matematização. Esses contextos para que possam motivar os estudantes, podem ser formulados de uma forma desafiadora sem ditar aos estudantes o que eles devam fazer (DEKKER; QUERELLE, 2002; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Problemas de contextos partindo de situações realísticas, que façam sentido para o estudante, “podem aumentar a acessibilidade por meio de seu elemento motivacional” (DEKKER; QUERELLE, 2002; VAN DEN HEUVEL PANHUIZEN, 1996), além de que, em comparação com tarefas simples, contextos oferecem aos estudantes mais oportunidades para demonstrar suas habilidades, mesmo que resolvam informalmente, oportunizando a aqueles com mais dificuldades poderem resolver em um nível inferior, podendo reduzir o caráter de respostas únicas geralmente vistas como ou certo ou errado nas provas usualmente aplicadas nas escolas.

Como as tarefas na RME podem ser resolvidas em diferentes níveis, os estudantes têm mais liberdade na maneira de lidar com elas, havendo maiores chances de se sentirem motivados e confiantes em suas aprendizagens. Para tanto, **o professor acrescenta em seu ambiente de aprendizagem tarefas com contextos**, de preferência abertas, oportunizando que o estudante possa matematizar, arriscar-se em suas respostas, tendo a oportunidade de responder em um nível particular (no seu nível), sem a preocupação se sua resposta estará correta ou não, **encarar o erro de forma natural e até bem-vindo**. Recordar-se que contextos não têm necessariamente de se referir a situações da vida real, mas que possam ser imagináveis ou até mesmo matemáticos (DEKKER; QUERELLE, 2002; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b; WIJAYA et al., 2014).

“Somente verificar os erros em uma prova pode ser uma maneira rápida de realizar o trabalho corrigido, mas isso nem sempre dá crédito pelo que o estudante fez” (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 58, tradução nossa^{lv}). **É igualmente**

importante que o professor, ao analisar uma resolução que contenha algum erro, reconheça sua natureza (categoria e tipo), para poder intervir, saber lidar com ele. As intervenções devem estar de acordo com o nível em que se encontra o estudante, portanto é desejável emitir feedbacks genuínos, na direção de provocar reflexões.

Um espaço para negociação das respostas em tarefas, com diálogo e interatividade também é muito bem-vindo na RME, evitando o conformismo e a necessidade de o estudante apenas obedecer. A RME não concebe a matemática como uma ciência pronta e acabada, como uma verdade única. **Apresentar aos estudantes fatos da História da Matemática, especialmente em momentos em que houve erros ou mudanças de paradigmas, é uma estratégia que pode auxiliá-los a verificar que a falibilidade de resultados pode ocorrer** (BORASI, 1996).

As resoluções dos estudantes nas tarefas propostas não são confinadas a um critério único de correção, permitindo mais espaço para interpretar e resolver os problemas à sua maneira. “Apresentar as diferentes respostas dos estudantes a um problema específico pode servir como ponto de partida para uma discussão em classe” (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 58, tradução nossa^{lvi}).

Dekker e Querelle (2002) afirmam que é preciso tomar o cuidado para não expor os estudantes durante uma dinâmica de correção de tarefa ou questão de uma prova escrita ao mencionar seus nomes. **“Nenhum estudante deve se sentir exposto na frente da classe”** (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 60, tradução nossa^{lvii}). Uma sugestão, caso o professor perceba a relevância de algo que o chamou a atenção, é **transcrever diferentes resoluções de uma tarefa, com a própria caligrafia, permitindo que todos os estudantes expliquem por que uma certa resposta foi correta ou incorreta ou até mesmo que os estudantes sugiram outra solução possível** (DEKKER; QUERELLE, 2002).

A aprendizagem não se dá por transmissão de conhecimentos. Os estudantes, em vez de serem os receptores de uma matemática pronta, são tratados como participantes ativos no processo educacional, em que eles próprios desenvolvem todos os tipos de ferramentas matemáticas e insights. O professor não é um transmissor de conhecimento, mas um guia no processo.

Além disso, a proposta de trabalho da RME que não tem como centro os erros, mas a atividade matemática, pode fazer com que se diminuam as

consequências tanto do panorama do erro por parte do professor quanto ao panorama relacionado a extrapolação do ambiente escolar, apresentadas no conjunto de ideias neste agrupamento, visto que todas elas estavam relacionadas às frustrações geradas ao enfatizar e punir os erros dos estudantes.

4.1.4 Possíveis causas do erro

No conjunto de informações dos excertos extraídos deste agrupamento, foi identificado que o erro pode estar relacionado a situações de origens internas como: a forma como o estudante aprende, como organiza e processa informações, assim como suas habilidades linguísticas; ou de origens externas: a natureza do objeto de estudo, a demanda das tarefas e o método de ensino.

Notou-se no conjunto de informações deste agrupamento que, os autores buscaram ora classificar erros, ora categorizar erros, ora tipificar erros, enfim, trataram da natureza dos erros nas produções escritas dos estudantes.

Numa visão geral foi possível inferir que o motivo para incentivar que professores identifiquem e reconheçam a origem e causas dos erros são para entendimento do porquê de os estudantes apresentarem determinadas dificuldades para servir a posteriores ações didáticas.

Para esta análise, na tentativa de capitalizar as ideias deste agrupamento, foram reunidas ideias análogas dos excertos buscando evidenciar as causas do erro levantadas.

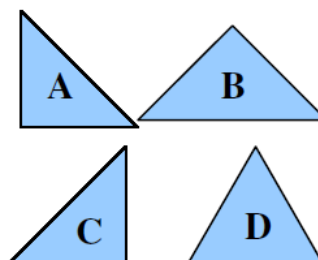
Dentre os diversos fatores, levantados no conjunto de informação deste agrupamento, o erro pode ocorrer devido a (I) ausência de “conhecimento prévio”, pela falta de fatos a respeito de aprendizagem, habilidades e conceitos que inibem completamente o processamento de informações ou imaturidade cognitiva, ou seja, erros em que o estudante não possui estrutura necessária ou suficiente para compreender a situação.

Erros podem ocorrer (II) devido a inferências ou associações incorretas, por inferir que são válidos em contextos semelhantes ou relacionados, teoremas distorcidos. Por exemplo, $(-5)^0 = -1$, nesta situação infere-se que se $a^0=1$, com $a>0$, infere-se que $(-a)^0 = -1$.

Os erros também podem ser (III) associados às dificuldades na obtenção de informações espaciais, atribuído a deficiências na capacidade de pensar

através de imagens espaciais ou visuais, que levam a interpretações incorretas de informações ou fatos matemáticos. Por exemplo: Se um triângulo retângulo é aquele que tem um ângulo reto, qual ou quais das seguintes figuras corresponde à definição?

Figura 2 - Triângulos dos quais os estudantes devem reconhecer quais são retângulos.



Fonte: Abrate, Pochulu e Vargas (2006, p. 50).

Resposta frequente: A, C ou A e C. A dificuldade de obter informação espacial ou para pensar imagens se manifestam com maior nitidez por não identificar triângulo B como um retângulo.

O erro pode também ser devido à (IV) linguagem matemática, seja ela simbólica, má leitura, incompreensão ou má interpretação de enunciados matemáticos, ou ainda seleção incorreta das informações do enunciado, por exemplo: $2^3 = 6$, observe que a semântica a^b não é identificada. Infere-se que foi associada à multiplicação.

A causa do erro pode derivar também de (V) dificuldades na construção do “conhecimento prévio”, no processo lógico, procedimentos imperfeitos, erro nas estratégias ou na organização dos dados, causada pela incorreta ou inadequada aprendizagem de fatos, habilidades e conceitos que interferem com o processamento adequado de informações.

O erro pode ser também devido à (VI) recuperação de uma ideia que se desenvolve a partir de outros conceitos relacionados anteriormente, que pode ser causado pela persistência de alguns aspectos do conteúdo ou o processo de resolver uma situação, mesmo que as condições fundamentais da tarefa matemática em questão haviam mudado, rigidez no pensamento. Por exemplo: $-5 - 8 = +13$ Infere-se que o esquema recuperado é “ $- \cdot - = +$ ” da multiplicação.

(VII) Falta de atenção, erro mecânico de algum cálculo ou manipulação algébrica, confusão, desacerto, equívoco, falha, inadvertência, inexatidão, engano, também pode ser configurado como causas. Pode acontecer também sobrecarga de informações, memória a curto prazo.

O erro pode também ocorrer devido à (VIII) forma de abordar o conteúdo completamente descontextualizado e pouco articulado com o restante, fragmentado, ou pouco significativo do que foi trabalhado ou proposto ou que não oportunizou ao estudante reflexão sobre os resultados ou devido à formulação do enunciado que pode estar mal estruturado, mal escrito, sem clareza, sem compreensão do objetivo ou da intenção metodológica do professor. Assim como o erro pode acontecer devido a relações estabelecidas entre professor, estudante e saber, medo de questionar e /ou não considerar o significado dos conceitos, regras ou símbolos ou falta de capacidade de se expressar.

O estudante pode também apresentar (IX) concepções alternativas de uma resolução de uma situação. Os estudantes muitas vezes inventam seus próprios métodos, não formais, mas altamente originais, para a realização das tarefas propostas e a resolução de problemas e isso pode configurar uma causa de erro.

A RME corrobora com a importância de o professor reconhecer a natureza do erro, com o objetivo de buscar indícios dos processos mentais dos estudantes e, assim, entender como certas concepções estão sendo encaminhadas, como os estudantes lidam com os assuntos matemáticos, a fim de fazer as devidas orientações. Saber a causa do erro pode ser usada como ponto de partida ou foco das atividades. **O professor formula feedbacks de qualidade a partir da “análise das respostas dos estudantes aos itens de resposta livre que podem fornecer informações valiosas sobre a natureza do conhecimento e compreensão dos estudantes e, nesse sentido, nos ajudam a formular feedback de qualidade”** (DE LANGE, 1999, p. 42, tradução nossa^{lviii}).

A riqueza de respostas e os diferentes aspectos que se distinguem em um resultado ou em uma resolução, são fontes de oportunidades para o professor poder provocar reflexões. Como as respostas dos estudantes nem sempre vão pelo mesmo caminho, **é interessante que o professor emita feedbacks de qualidades e genuínos** (DE LANGE, 1999). O uso de feedbacks pode ser encarado como uma ponte para os estudantes passem de um nível menos formal para um mais formal (DE LANGE, 1999; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Quando a causa do erro ocorrer devido a inferências ou associações incorretas, por inferir que são válidos em contextos semelhantes ou relacionados, a RME propõe que os professores **assumam uma atitude inquiridora, indagadora frente aos erros**, não no sentido de apontá-los, mas que permita ao professor aproveitar as oportunidades que os erros oferecem como parte integrante e natural de uma tarefa a serviço dos processos de ensino e de aprendizagem.

Algumas atitudes inquiridoras podem contribuir para ajudar o professor a detectar a causa do erro, além de oportunizar reflexões aos estudantes. As sugestões a seguir foram baseadas em Abrate; Pochulu e Vargas (2006), Borasi (1996), Cury (2007):

- **Por favor, você pode ler novamente a pergunta para mim?**
- **Você pode explicar sua pergunta para entendermos o que você está pensando?**
- **Como você obteve esta resposta?**
- **Como você pensou neste procedimento?**
- **A sua resposta tem coerência? Por quê?**
- **Como você faria para validar seu resultado?**
- **Você conhece uma outra forma de resolver?**
- **Em que caso essa regra poderia ser válida? Em quais condições?**
- **Por que a regra é verdadeira em alguns casos e falsa em outras?**
- **Como então podemos saber se algo é verdadeiro ou falso em matemática?**

Relacionada à última pergunta da lista anterior, é muito bem-vindo para a RME ter momentos para desafiar o que entendemos como verdade na matemática, afinal “na matemática, a verdade é socialmente negociada, como na ciência” (BORASI, 1996, p. 20, tradução nossa^{lix}).

Com base em Esteban (2013), apresentam-se algumas sugestões de indagações aos professores frente ao erro que vão ao encontro das propostas apresentadas pela RME.

- O que significa a resposta do estudante?

- Que informações pode dar ao professor sobre seu processo de aprendizagem e seu desenvolvimento?
- Quais conhecimentos estão presentes em suas respostas?
- Há diferenças entre sua produção individual e coletiva?
- Que desconhecimentos demonstram?
- Que conhecimentos estão sendo esboçados?
- Que tipo de ação pode ter o professor para auxiliar a aprendizagem?
- Quais pontos do processo não estão claros para o professor?
- De que novos conhecimentos necessitam?
- Por que uns estudantes aprendem e outros não?

Seja qual for a natureza do erro, a RME ressalta o princípio da interatividade como uma importante estratégia reguladora, por oportunizar o estudante a compartilhar suas formas de pensar uns com os outros e evidenciar algum aspecto que não ficou evidenciado. As explicações dos estudantes contribuem para a percepção ou investigação do professor para suas próximas ações didáticas. Por vezes, o estudante, ao expor seu procedimento, reconhece em sua própria fala o equívoco cometido.

Ao permitir que um estudante prossiga com uma explicação, mesmo quando a resposta seja considerada incorreta e já se tenha detectado a natureza do erro, elucida-se que o professor não é a única autoridade na sala de aula a quem os estudantes devam recorrer para possíveis validações.

Caso o estudante ou um grupo de estudantes apontem a mesma natureza do erro, uma possível ação didática é continuar aceitando provisoriamente o erro até que leve a uma contradição e os estudantes a percebam em suas próprias produções. Para a RME não é só o professor que exerce o papel de analisar os erros, compete também ao estudante esse papel.

O processo de avaliação, incluindo pontuação (nota), deve ser aberto aos estudantes.

“A função de avaliar não precisa ser apenas de responsabilidade do professor. É importante, também, que os alunos se sintam responsáveis e tenham autonomia para avaliar suas tarefas e desenvolver um espírito autocrítico” (FERREIRA, 2013, p. 18).

Hadji (1994) afirma que participar da avaliação é um direito dos estudantes e apresenta três maneiras de o estudante exercer esse direito: como um simples fornecedor de informações, como um produtor de informações que auxilia na construção de instrumentos de avaliação e de avaliador propriamente dito (HADJI, 1994).

Aos estudantes, a RME **incentiva a serem ativamente envolvidos com os processos de resolução nas tarefas propostas, buscando fornecer justificativas, rever ou visitar processos de pensamento, a expor e ouvir os resultados e procedimentos alternativos dos colegas, aprimorar suas estratégias de resolução e regularem suas aprendizagens, ou seja, sendo ativos no seu processo de aprender.** Para tanto, o professor promove um ambiente para que isto aconteça, **encorajando os estudantes a serem participantes ativos e reflexivos do processo de aprendizagem** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Em uma visão da Educação Matemática em que a matemática é vista como uma atividade humana que pode ser melhor aprendida fazendo, uma avaliação passiva em que os estudantes apenas escolhem ou reproduzem uma resposta já não é suficiente (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.166, tradução nossa^{lx}).

Ainda neste ambiente **o professor convida o estudante a expor e dialogar sobre seus pensamentos e procedimentos** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), e neste contexto o erro é tratado como algo natural de acontecer, logo o erro ser atribuído a relações estabelecidas entre o professor, estudante e saber, ou o medo de questionar ou expor pensamentos é pouco provável acontecer.

A causa de o erro ser devido à forma de abordar o conteúdo completamente descontextualizado e pouco articulado com o restante, fragmentado, ou pouco significativo do que foi trabalhado ou proposto é um ponto que a RME chama fortemente a atenção. O princípio da realidade, deriva de uma das características da RME em que os estudantes desenvolvam conceitos matemáticos, expondo-os a uma grande e variada quantidade de problemas e situações que têm sentido na realidade (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). **“O professor tem o papel de, de alguma maneira, auxiliar os estudantes a ‘estarem próximos’ de contextos que lhes possam ser importantes”** (SILVA, 2018, p. 23). Ao resolver uma tarefa baseada em contexto, os estudantes podem se conectar à situação do problema para as suas experiências (WIJAYA et al., 2014). Contextos apoiam o desenvolvimento

compreensão matemática dos estudantes (DE LANGE, 1999; GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Na RME “problemas de contexto podem funcionar como pontos de ancoragem para a reinvenção da matemática pelos estudantes” (GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999, p. 1^{xi}).

Uma ação aconselhável ao professor é que se certifique de que os estudantes entendam o que precisam fazer, por exemplo, se a tarefa for “leia o gráfico”, nenhuma explicação é necessária (DEKKER; QUERELLE, 2002).

Como um dos princípios da RME é o entrelaçamento, busca-se **trabalhar e explorar tarefas com uma visão integrada da matemática** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a), ou seja, que não são divididas em conteúdos fragmentados. Desta forma é pouco provável que a causa do erro seja devido a assuntos descontextualizados e pouco articulados com o restante. A RME não está interessada apenas em matemática em um determinado nível de compreensão, mas também no uso da matemática em uma ampla gama de situações (DEKKER; QUERELLE, 2002).

4.2 ERRO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM/ REGULAÇÃO PARA GERAR UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA

Conforme o Quadro 11, esta vertente está subdividida em oito (8) agrupamentos: “erro como oportunidade de aprendizagem”; “autoavaliação”; “erro como algo natural”; “erro construtivo”; “para que serve o erro”; “erro na prática de investigação”; e “dicotomia acerto e erro”.

4.2.1 Erro como oportunidade de aprendizagem

Do conjunto de informações deste agrupamento, tem-se a perspectiva de que os estudantes devam conhecer e ser conscientes do que erraram e porque erraram, permitindo a (re)construção do seu próprio conhecimento. Os autores afirmam que é importante incentivar os estudantes à reflexão (Em que errei? Por que errei?) e responsabilizá-los por elaborar planos de ação para sua própria aprendizagem.

Os estudantes têm de perceber que os erros são uma oportunidade para crescimento quando são descobertos e explicados.

A diversidade de respostas e estratégias encontradas nos erros de resolução de uma situação-problema revelada não dificulta, mas é desejável no processo de aprendizagem e na abertura ao diálogo. A análise crítica e a exploração de estratégias operativas favorecem mais a superação das dificuldades dos estudantes do que o uso de algoritmos, a socialização dos resultados obtidos numa determinada tarefa e a discussão de diferentes perspectivas e estratégias, sob condições de cooperação, favorecem a reflexão, a descentração do pensamento e a autonomia.

Os estudantes, confrontados com situações novas, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas. Os estudantes vão aprendendo a ter uma espécie de espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar informações, a sistematizar resultados, a validar soluções, desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade e,

finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

A perspectiva da RME é convergente às ideias de erro como oportunidade de aprendizagem, além de estar de acordo com o todo do conjunto de informações levantadas neste agrupamento, pois, nessa abordagem, a avaliação é didática e, dessa forma, até mesmo o erro pode ser usado pelo professor e pelos estudantes como o ponto de partida de alguma ação didática, tendo em vista que na RME, a avaliação está a serviço dos processos de ensino e de aprendizagem.

Tarefas de avaliação e as tarefas de ensino para a RME não são distintas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996) assim como os instrumentos de avaliação e os instrumentos de ensino também não se distinguem nessa perspectiva (SILVA, 2018), ou seja, a Avaliação Didática está amalgamada aos processos de aprendizagem e de ensino e está a serviço deles.

Da ideia de os estudantes buscarem ter conhecimento e consciência do que erraram e porque erraram, não necessariamente as validações partem apenas do professor. Na RME, como um dos princípios é a interatividade, este processo pode ocorrer com diálogos e troca de informações com colegas. Recorda-se também que na matematização, não existem erros para serem apontados. Uma ação didática condizente é que o professor **faça intervenções nas produções dos estudantes, as observações feitas podem ser estendidas aos demais estudantes e que essa interação possa servir para que outros estudantes reflitam, permitindo regulações ou compreensão, oportunizando aprendizagens** (DE LANGE, 1999; DEKKER; QUERELLE, 2002; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Chama-se a atenção sobre a forma como o professor possa fazer suas intervenções, ao emitir feedbacks, aconselha-se que busquem evitar dizer “está certo” ou “está errado”, mas que busquem ser de forma inquiridora, como já sugestionados no agrupamento “possíveis causas do erro”.

Há outras ações didáticas em que o erro o erro possa ser usado como oportunidade de aprendizagem:

- **Pedir ao estudante para “pensar em voz alta”** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- **Solicitar que descreva o que foi feito ou pensado** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);

- **Repetir a pergunta de outra maneira** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- **Estimular a reflexão, demonstrando a atividade própria do estudante ou de outro estudante** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- **Oferecer um problema diferente do mesmo grau de complexidade, um problema mais ou um menos complexo** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- **Encarar provisoriamente o erro até que enxerguem o equívoco** (BORASI, 1996);
- **Iniciar uma tarefa com erro e deixar que os estudantes percebam no decorrer da ação de resolver** (BORASI, 1996);
- **Desafiar o status quo** (BORASI, 1996).

Métodos informais de avaliação, tais como a observação, questionamento e entrevistas, são importantes, uma vez que por meio destes tipos de procedimentos que os professores podem adquirir com rapidez as informações necessárias para tomada de decisão em que o erro se torne oportunidade de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Oportunizar diferentes instrumentos de avaliação, como sugerido no Quadro 12, são ações que podem contribuir à aprendizagem dos estudantes.

Para que o erro seja visto como uma oportunidade de aprendizagem na perspectiva da RME aconselha-se que o professor **encoraje os estudantes a sentirem-se responsáveis pela sua aprendizagem** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), **incentivando-os que se autoavaliem e regulem suas aprendizagens a toda oportunidade** (DE LANGE, 1999; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

4.2.2 Autoavaliação

O conjunto de informações deste agrupamento destaca que o uso sistemático da autoavaliação permitirá ao estudante consciencializar-se dos seus

processos metacognitivos, das suas dificuldades, dos erros cometidos, da “eficácia”²⁸ das estratégias usadas, do esforço para a execução das tarefas/atividades, do distanciamento entre os objetivos desejados e os alcançados e de autoavaliar o seu progresso e desempenho.

Sobressai, assim, a relevância de práticas de autoavaliação como dispositivo gerador de feedback, orientando e guiando o estudante para que este aprenda a refletir sobre o processo de aprendizagem, capacitando-o a realizar aprendizagens, gradualmente mais autônomas.

Salienta que se possibilite ao estudante a reflexão sobre as suas ações a ponto de ele construir novas hipóteses, mesmo que elas sejam consideradas erradas do ponto de vista do professor, isto é, o docente oferece condições para explicitar o caminho que construiu para chegar a um determinado resultado.

Para a RME, um dos papéis do professor é **proporcionar ao estudante constante autoavaliação, para que ele seja responsável pela sua aprendizagem** (DE LANGE, 1999). “A autoavaliação é uma condição necessária para uma aprendizagem efetiva” (DE LANGE, 1999, p. 35, tradução nossa^{lxii}). Nesta perspectiva os **estudantes são incentivados a refletirem sobre sua própria aprendizagem**, corroborando com o conjunto de informações deste agrupamento.

Para uma cultura em sala de aula em que promova autoavaliação, é desejável **que o professor emita feedbacks genuínos, que possam fortalecer a capacidade do estudante refletir. Promover um ambiente em que os estudantes possam interagir como um processo natural contribui para esta prática.** Sugere-se que os professores **deem a oportunidade aos estudantes de aprender a ver a relação entre diferentes assuntos, escrever relatórios sobre suas descobertas e falar sobre isso** (DEKKER; QUERELLE, 2002).

Outra forma de promover a cultura da autoavaliação é buscar proporcionar aos estudantes a oportunidade de ser “dono da tarefa”, tarefas com questões de natureza aberta de avaliação também são importantes, pois, com esta qualidade, incentiva os estudantes a assumirem uma responsabilidade maior para a resposta (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

“Os estudantes devem ser autorizados a encontrar seus próprios níveis e a explorar os caminhos que levam até lá com tantas e tão pouca orientação

²⁸ O termo “eficácia” é utilizado pelos autores deste agrupamento.

quanto cada caso em particular exigir” (FREUDENTHAL, 1991, p. 47, tradução nossa^{lxiii}).

A proposição de diferentes instrumentos de avaliação em que permita reflexões de suas próprias produções como as sugeridas no Quadro 12, também contribuem para a cultura da autoavaliação.

O princípio da interatividade, para a RME, tem um importante papel a desempenhar no processo de regulação da aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b), o **professor pode permitir que os estudantes troquem informações uns com os outros e com toda a classe**. O diálogo e interação, além de permitir que o professor compartilhe os diferentes resultados com toda a turma e discuta o porquê uma forma pode ser mais apropriada em determinados casos do que em outro (DEKKER; QUERELLE, 2002), também permite que o estudante reflita a respeito de suas próprias produções (DE LANGE, 1999; GRAVEMEIJER, 2008; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

4.2.3 Erro como algo natural

O conjunto de informações deste agrupamento traz a ideia de que é natural que os estudantes tenham dificuldades e cometam erros em seu processo de aprendizagem e que possam aprender com os próprios erros. O erro é parte do processo de conhecimento das pessoas, inevitável e estará sempre presente.

Além disso, o erro é um fator que contribuiu para o avanço das ciências e que era parte integrante do conhecimento humano. É o afastamento gradativo dos erros que permite o avanço do conhecimento científico.

Menciona-se no conjunto de informações do agrupamento que há a presença permanente de erros no conhecimento humano. O desenvolvimento do conhecimento científico é cheio de erros. A matemática não é infalível e a noção da verdade se modifica de acordo com o momento e o contexto histórico e cultural.

Alguns excertos comentam que o erro não só é natural, mas necessário, outros manifestam a ideia de o erro ser fundamental. Ambos derivam da percepção de que o erro pode desencadear o processo de aprendizagem e assim o professor situar as concepções do estudante e, eventualmente, compreender os obstáculos subjacentes e o professor adaptar a situação didática. Ou seja, o erro sendo útil para quem ensina e quem aprende determinado conteúdo.

Consoante às ideias apresentadas no conjunto informação deste agrupamento, Freudenthal (1991) traz a concepção de que como a matemática é reinventada sob orientação, os “erros são inevitáveis ou mesmo bem-vindos” (FREUDENTHAL, 1991, p. 157, tradução nossa^{lxiv}), não no sentido de desejar que ele ocorra, mas por ser oportuno para desencadear diálogo e reflexões que permitam um aprofundamento das ideias do contexto.

Borasi (1996) afirma que erros dos estudantes são parte inevitável e integral da aprendizagem além de uma “fonte valiosa de informação sobre o processo de aprendizagem, uma pista que pesquisadores e professores devem aproveitar para descobrir o que um estudante realmente sabe e como ele ou ela construiu esse conhecimento” (BORASI, 1996, p. 40, tradução nossa^{lxv}).

Cabe ao professor a tarefa de **guiar o estudante, não prescrevendo, mas permitindo aos estudantes a reinventar a matemática**. Ao permitir a matematização, erros acontecerão e serão vistos de alguma forma, como aconteceu em todo processo de aprendizagem da humanidade. Ressalta-se que mesmo as tentativas e os erros pressupõem algum conhecimento (FREUDENTHAL, 1991).

Uma ação didática é o professor **trazer, às aulas, a História da Matemática, uma vez que possa ser uma oportunidade de o professor procurar especialmente por potenciais barreiras conceituais, impasses e avanços históricos para que desenhe as rotas de reinvenção** (GRAVEMEIJER, 2008).

4.2.4 Erro de caráter construtivo

O agrupamento “erro de caráter construtivo” pode ser representado pela concepção que todo o erro pode ser favorável desde que a ação do professor junto ao estudante seja construtiva, considerando o erro uma forma provisória de saber.

Busca-se o comprometimento existencial, ético e social do professor em relação à prática docente e o desenvolvimento da consciência de que o conhecimento é construído em curso, considerando a sucessão de estados ou de mudanças no fenômeno de aprendizagem dos estudantes.

Da visão fecunda do erro é importante que o professor tome os conhecimentos prévios dos estudantes de forma a elaborar um conflito cognitivo, isto é, uma perturbação no quadro de referência do estudante para que ele possa avançar

em sua aprendizagem. A consciência do estudante está repleta de influências culturais que permeiam seu processo de aprendizagem, de maneira que é necessário que o professor interfira de modo que o estudante se desacomode, construindo um novo conhecimento ou aprimorando aquele já existente.

A tendência amplamente reconhecida para a avaliação didática está intimamente relacionada ao fato de que a base para a reforma do ensino de matemática consiste, até certo ponto, de ideia construtivistas sobre a aprendizagem. Como é o caso na RME, isso envolve considerar os estudantes como participantes ativos no processo educacional, os quais constroem seus próprios conhecimentos matemáticos. E isto, por sua vez, tem consequências significativas para a avaliação. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 102, tradução nossa^{lxvi}).

Embora o erro não seja considerado uma forma provisória do saber na perspectiva da RME, porque não há erros para superar no processo de matematização pois constitui-se um saber, convergem as ideias apresentadas no conjunto de informações deste agrupamento, inclusive do professor **buscar elaborar conflitos cognitivos que por meio da reinvenção guiada, buscará provocar reflexões contínuas de caráter formativo.**

Como ponto de partida para a aprendizagem, com esse olhar do erro ser construtivo, é importante que o professor **proponha boas tarefas em que o estudante tenha oportunidade de organizar, por meio da matemática, fenômenos da realidade.** Ao resolver um problema baseado em contexto, os estudantes podem conectar a situação do problema às suas experiências (WIJAYA et al., 2014). Assim como **promover um ambiente de aprendizagem em que encoraje os estudantes a serem participantes ativos e reflexivos do processo de aprendizagem.**

4.2.5 Para que serve o erro

O conjunto de informações deste agrupamento indica que o erro serve para sinalizar, dar pistas da aprendizagem dos estudantes, se tornando uma ferramenta para diagnosticar dificuldades dos estudantes, dos obstáculos subjacentes.

Serve também para indicar novas direções a serem dadas aos encaminhamentos das aulas, desencadear o processo de aprendizagem, oportunizar

motivação necessária para exploração em sala de aula, oferecer ao professor oportunidade de ampliar seus saberes, dar novas ideias, identificar os caminhos percorridos e discutir a coerência da estratégia adotada.

Serve para reflexão das ações, suscitar atitudes diferentes, ajudar o professor na construção de propostas de ensino, como instrumento de identificação dos problemas do currículo e dos métodos, permitindo novas estratégias de retomada dos conteúdos. Pode oportunizar discussão da prática pedagógica, estimular novas questões e explorações.

Esteban (2013, p. 141) entende que “o erro encarna uma dimensão criativa e múltiplos conhecimentos, que nos oferece pistas importantes, assinala trilhas não percebidas que devem ser consideradas e exploradas”. Tal entendimento está na perspectiva da RME. Além disso, “a presença do erro, mais do que acerto, coloca em discussão a prática pedagógica” (ESTEBAN, 2013, p. 57).

Criar um ambiente de aprendizagem em que o estudante enxergue a serventia dos erros a favor dos processos de aprendizagem é uma ação pertinente na perspectiva da RME.

O professor pode aproveitar todas as situações emergentes no contexto de sala de aula na direção de oportunizar aprendizagem.

Que um dia, de repente, os estudantes se sentem fortes tentando usar novas estruturas. Certamente naquele dia, não tendo completamente integrado as sutilezas e casos particulares, eles estarão errados na construção desta ou daquela situação. Ainda assim continuará a ser um sinal de progresso (ASTOLFI, 2004, p. 117, tradução nossa^{lxvii}).

Nos processos de ensinar e aprender, **experiências diárias dos estudantes e estratégias informais também podem ser usadas como ponto de partida para introduzir conceitos matemáticos** (WIJAYA et al., 2014).

4.2.6 Erro na prática de investigação

No conjunto de informações do agrupamento “erro como prática de investigação” encontram-se excertos que tratam de quando erros se configuram como recursos didáticos. Como sinalizador, indicador, referência para novas ações para o processo cognitivo da formação daquele que está aprendendo, podendo revelar as estratégias e mecanismos de pensamentos. Ponto inicial para exploração matemática.

Mostram um caminho que o estudante construiu por meio de uma lógica particular de lidar com um problema matemático.

Fornecem elementos tanto para o planejamento como para execução das atividades pedagógicas em sala de aula. O erro é visto como um “veículo” que aproxima as intenções das realizações, podendo ser utilizado como estratégia inovadora quando depreendidas ações para a superação das dificuldades.

São fontes de informações para a elaboração de boas tarefas. Revelam a maneira como o estudante “está vendo”, favorecendo uma reflexão sobre seu planejamento, desenvolvimento e avaliação da sua prática pedagógica.

A perspectiva da RME é convergente às ideias de erro como prática de investigação, pois a avaliação é didática, portanto, busca-se conhecer, reconhecer, encontrar pistas dos processos de pensamentos dos estudantes em suas produções para favorecer tomadas de decisões na direção de intervir nos processos de ensino e de aprendizagem com intuito de provocar reflexões e fornecer meios para regulação.

Na RME, aconselha-se **a elaboração de trajetórias de avaliação** (SILVA, 2018), para tanto é recomendável que antes de começar a elaborar, o professor terá que pensar sobre o tipo de informação que deseja coletar, por exemplo,

- Como os estudantes estão progredindo em seus conhecimentos e habilidades nos diferentes níveis de compreensão;
- Que evidências podem ser reunidas sobre seu domínio da matemática que foi ensinado durante o período letivo;
- Como os estudantes trabalham em conjunto com seus colegas e são capazes de expressar suas opiniões e usar seu raciocínio matemático para apoiar estas opiniões;
- O modo como os estudantes apresentam seu trabalho: detalhado e acompanhado por explicações corretas e não muito elaboradas ou desleixadas sem explicações compreensíveis;
- A maneira pela qual os estudantes participam das discussões em classe e são capazes de se envolver na solução de um problema (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 46, tradução nossa^{lxviii}).

Todos os aspectos do trabalho do estudante precisam de uma maneira diferente de avaliar. **“É importante garantir formatos diferentes em instrumentos de avaliação, não se ater a um único formato”** (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 48, tradução nossa^{lxix}), uma vez que o professor ao **propor para os estudantes diferentes instrumentos de avaliação pode recolher maior quantidade de informações a respeito do que os estudantes mostram saber, assim oportunizar-se de elaborar intervenções necessárias no processo de**

matematização dos estudantes. Quanto mais instrumentos para colher informações, menos injusta uma avaliação pode ocorrer (DE LANGE, 1995).

O professor aproveita todas as situações emergentes no contexto de sala de aula na direção de encontrar informações.

4.2.7 Dicotomia acerto e erro

O conjunto de informações deste agrupamento traz a reflexão sobre o ensino e a aprendizagem e nos indica a necessidade de superar a dicotomia estabelecida na escola entre o acerto e o erro. Erro e acerto são duas faces de uma mesma moeda, porém o espaço e a dinâmica da sala de aula muitas vezes, sobretudo quando o saber em jogo é um saber matemático, carregado de exatidão e preciosismos, nos leva a enxergar apenas por um viés.

A classificação das respostas em “acertos e erros” ou em “satisfatórios e insatisfatórios”, fundamenta-se numa dicotomia entre saber e não saber.

A RME vai ao encontro das ideias postas deste conjunto de informações. Saber e o não saber são situações inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem e não excludentes. Na RME, mesmo algo observado como um “não saber” e até mesmo um acerto, são explorados com a finalidade de oportunizar reflexões. A ideia é oportunizar aos estudantes alcançar um maior nível de compreensão por meio da reinvenção guiada (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). “A fim de apoiar este processo de reinvenção guiada, os problemas de avaliação devem fornecer ao professor um máximo de informações sobre o conhecimento dos estudantes, visão e habilidades, incluindo suas estratégias” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 89, tradução nossa^{lxx}).

Tanto o erro como o acerto não indicam quais foram os saberes usados em tarefas, nem os processos de aprendizagem desenvolvidos, tampouco o raciocínio que conduziu à resposta dada (ESTEBAN, 2013). O modo como a escola, o professor e o estudante, sujeitos dos processos de ensino e de aprendizagem,

assumem o diálogo entre o saber e o não-saber dentro do movimento de construção de conhecimentos organizado pela escola é um importante articulador do movimento de manutenção/transformação das práticas pedagógicas e, em consequência, da produção dos resultados escolares (ESTEBAN, 2013, p. 30).

Cury (2007) chama a atenção para que ao fazer uma análise de respostas dos estudantes, o acerto e o erro em si não sejam elementos importantes, mas “as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem” (CURY, 2007 p. 63).

Na perspectiva da RME, a fim de oportunizar exploração para aumento do nível de compreensão, aconselha-se ao **professor propor tarefas aos estudantes, que busquem ser acessíveis, mais claras quanto possível, além de oportunizar dar suas próprias respostas com suas próprias palavras, favorecendo construções próprias dos estudantes, “o que significa que os problemas devem ser de um tipo que pode ser resolvido de diversas maneiras e em diferentes níveis”** (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 90, tradução nossa^{lxxi}), revelando o que demonstram saber, em vez de simplesmente revelar o que os estudantes ainda não sabem (DE LANGE, 1999).

Dekker e Querelle (2002) trazem como sugestão buscar **perguntar regularmente aos estudantes: “Como você conseguiu essa resposta?” ou “Por que você pensa isso?”** (DEKKER; QUERELLE, 2002, p. 61, tradução nossa^{lxxii}). Esta constante prática pode levar os estudantes a levarem com seriedade seu raciocínio e acabam por aprender que escrever apenas um número ou uma palavra para uma resposta não é suficiente (DEKKER; QUERELLE, 2002).

Algo que também poderia ser ensinado aos estudantes é o **hábito de comparar suas resoluções com outras, justificando-as** (DEKKER; QUERELLE, 2002).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo geral descrever, analisar e discutir aspectos referentes ao erro, como apresentado por autores da literatura alcançada, a fim de propor ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística para lidar com o erro. Para tanto, foram elencados os seguintes objetivos específicos:

- Inventariar excertos de dissertações, teses e artigos que contenham o verbete “erro”, publicados entre os anos de 2000 e 2019;
- Descrever, analisar e discutir os excertos inventariados à luz da Educação Matemática Realística, evidenciando a perspectiva de erro que estão relacionados;
- Propor ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística para lidar com o erro, como apresentado por autores da literatura alcançada.

Para atingir o primeiro objetivo específico desta pesquisa, foram realizados inventários das teses, dissertações e artigos em periódicos, com a finalidade de inventariar o verbete “erro” no contexto escolar no período mencionado. Para a escolha de Teses e Dissertações a busca foi realizada na plataforma CAPES e para a escolha de artigos em periódicos, foram feitas buscas em duas plataformas: no Portal de Periódicos da CAPES/MEC e na plataforma Sucupira.

Posterior à etapa da busca pelos trabalhos, foram realizadas as leituras buscando separar trechos (excertos) dos textos que continham a expressão (verbeta) erro ou relações ao termo erro a fim de construir o inventário.

Para o segundo objetivo específico, foram realizados agrupamentos a partir da ideia central de cada um dos trechos inventariados. Na sequência, esses agrupamentos foram correlacionando com temas que derivavam dela em grupos constituídos a posteriori, ou seja, subentendidos em decorrência delas, organizando-os em planilhas.

A partir da planilha foi organizado um quadro em que se expressavam as ideias, e aos quais foi estruturado da seguinte maneira: nomes provisórios dos

agrupamentos; as ideias essenciais do conjunto de informações destes agrupamentos; o que autores da RME pensam a respeito das ideias propostas do conjunto de informações dos agrupamentos; e sugestões de ações didáticas à luz da RME que abarcam respectivamente o conjunto de informações destes agrupamentos.

O terceiro objetivo foi atingido, uma vez que no decorrer das descrições, análises e discussões, foram acrescentados no texto ações didáticas condizentes com a perspectiva da Educação Matemática Realística para lidar com o erro. Essas ações foram destacadas no corpo do texto em negrito afim de evidenciá-las. As ações didáticas elencadas no trabalho sugerem que o professor:

- saiba lidar com o nível que a produção do estudante evidencia;
- conheça os problemas de aprendizagem de seus estudantes, os progressos e nível de formalidade que estão operando (DE LANGE, 1999);
- reconheça a natureza do erro (categoria e tipo), ao analisar uma resolução que contenha algum erro, para poder intervir, saber lidar com ele;
- colha informações e pistas nas produções dos estudantes, para futuras ações e, desse modo, informe possíveis caminhos para o ensino, ou seja, auxilie na regulação dos processos de ensino e de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- proponha aos estudantes diferentes instrumentos de avaliação, recolhendo a maior quantidade de informações a respeito do que mostram saber, assim, elaborando intervenções necessárias para auxiliar o processo de matematização dos estudantes;
- proponha diferentes instrumentos de avaliação que permitam reflexões de suas próprias produções;
- ressignifique suas próximas ações por meio dos resultados da correção (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- proponha boas tarefas que possam ser resolvidas de diferentes maneiras, que iniciem a ação de matematizar, que busque desencadear processos de reflexões que permitam ao

professor enxergar em que níveis os estudantes são capazes de saber ou fazer algo;

- proponha tarefas aos estudantes, que busquem ser acessíveis, mais claras quanto possível, além de oportunizar dar suas próprias respostas com suas próprias palavras, favorecendo construções próprios dos estudantes, o que significa que os problemas podem ser de um tipo que pode ser resolvido de diversas maneiras e em diferentes níveis;
- auxilie os estudantes a 'estarem próximos' de contextos que lhes possam ser importantes (SILVA, 2018);
- esclareça sua intenção e objetivos no processo de avaliação, assim como os critérios de correção. É desejável permitir que os estudantes devam entender os parâmetros usados para avaliar seu trabalho (DEKKER; QUERELLE, 2002);
- “mostre caminhos” na direção das oportunidades de aprendizagem e reflexão que as explorações de tarefas podem oferecer (DEKKER; QUERELLE, 2002);
- guie seus estudantes, ao conduzir uma “correção”, para que eles mesmos cheguem às suas próprias conclusões, oportunizando regulação de suas aprendizagens;
- guie os estudantes a construir a matemática de uma forma mais fundamentada, ou seja, buscar construir um novo conhecimento matemático, construído sobre o que eles já sabem (GRAVEMEIJER, 2005), por meio da reinvenção guiada e dos modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999, 2008);
- promova um ambiente em sala de aula em que os estudantes possam interagir e regularem suas aprendizagens e se autoavaliarem como um processo natural e contínuo;
- promova um ambiente de sala de aula em que o estudante se sinta livre para arriscar-se em suas respostas, encarar o erro de forma natural e até como bem-vindo nas discussões;
- incentive o estudante a ser responsável e proativo em sua própria aprendizagem;

- promova um ambiente de aprendizagem em que encoraje os estudantes a serem participantes ativos e reflexivos do processo de aprendizagem;
- não aponte erros dos estudantes e nem os acertos, mas assuma o papel de guia por meio da reinvenção guiada, fazendo intervenções, emitindo feedbacks;
- busque não expor nenhum estudante na frente da classe;
- busque emitir feedbacks genuínos, na direção de provocar reflexões;
- faça intervenções nas produções dos estudantes, as observações feitas podem ser estendidas aos demais estudantes e que essa interação possa servir para que outros estudantes reflitam, permitindo regulações ou compreensão, oportunizando aprendizagens (DE LANGE, 1999; DEKKER; QUERELLE, 2002; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- não faça dos erros fonte de desconto de pontos;
- apresente aos estudantes fatos da História da Matemática, especialmente em momentos em que houve erros ou mudanças de paradigmas, auxiliando-os a verificar que a falibilidade de resultados pode ocorrer (BORASI, 1996) e que traga às aulas a História da Matemática, uma vez que possa ser uma oportunidade de o professor procurar especialmente por potenciais barreiras conceituais, impasses e avanços históricos para que desenhe as rotas de reinvenção (GRAVEMEIJER, 2008);
- transcreva diferentes resoluções de uma tarefa, com a própria caligrafia, permitindo que todos os estudantes expliquem por que uma certa resposta foi considerada correta ou incorreta ou até mesmo que os estudantes sugiram outra solução possível (DEKKER; QUERELLE, 2002);
- continue aceitando provisoriamente o erro até que leve a uma contradição e os estudantes os percebam em suas próprias produções;

- trabalhe e explore tarefas com uma visão integrada da matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a);
- promova o hábito de comparar suas resoluções com outras, justificando-as;
- peça ao estudante para “pensar em voz alta” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- solicite que descreva o que foi feito ou pensado (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- repita a pergunta de outra maneira (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- estimule a reflexão, demonstrando a atividade própria do estudante ou de outro estudante (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- ofereça um problema diferente do mesmo grau de complexidade, um problema mais ou um menos complexo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- inicie uma tarefa com erro e deixe que os estudantes percebam no decorrer da ação de resolver (BORASI, 1996);
- desafie o status quo (BORASI, 1996);
- dê a oportunidade aos estudantes de aprender a ver a relação entre diferentes assuntos, escrever relatórios sobre suas descobertas e falar sobre isso (DEKKER; QUERELLE, 2002);
- busque elaborar conflitos cognitivos que por meio da reinvenção guiada, que provoque reflexões contínuas de caráter formativo.
- crie um ambiente de aprendizagem em que o estudante enxergue a serventia dos erros a favor do processo de aprendizagem;
- aproveite todas as situações emergentes no contexto de sala de aula na direção de oportunizar aprendizagem;
- use experiências diárias dos estudantes e estratégias informais como ponto de partida para introduzir conceitos matemáticos (WIJAYA et al., 2014);
- elabore uma trajetória de avaliação (SILVA, 2018);

- assuma uma atitude inquiridora, indagadora frente aos erros;
- pergunte regularmente aos estudantes: "Como você conseguiu essa resposta?" ou "Por que você pensa isso?" (DEKKER; QUERELLE, 2002);
- tenha algumas atitudes inquiridoras, como: "Por favor, você pode ler novamente a pergunta para mim?", "Você pode explicar sua pergunta para entendermos o que você está pensando?", "Como você obteve esta resposta?", "Como você pensou neste procedimento?", "A sua resposta tem coerência?", "Por quê?", "Como você faria para validar seu resultado?", "Você conhece uma outra forma de resolver?", "Em que caso essa regra poderia ser válida?", "Em quais condições?", "Por que a regra é verdadeira em alguns casos e falsa em outras?", "Como então podemos saber se algo é verdadeiro ou falso em matemática?".

Esclarece-se que o fato de determinadas informações não estarem na perspectiva da RME, não significa que a perspectiva adotada é uma verdade absoluta ou está em oposição a outras. Ressalta-se que a escolha da abordagem RME deve-se, além do fato dos indícios que podem auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem reconhece-se que nas vertentes apontadas, a do erro como falta de conhecimento ou como algo a ser punido, reprimido e a do erro como oportunidade de aprendizagem, mostraram potencialidades para gerar sugestões de ações didáticas ao encontro de uma avaliação formativa.

Ressalta-se que esta lista de ações didáticas levantadas são sugestões as quais não se apresentam como receitas para um bom trabalho e nem podem ser vistas de forma estática, que não possa ser acrescida de outras maneiras de lidar com o erro, mas são indicativos de procedimentos que podem ser adotados pelo professor para construir uma prática para que o erro sirva como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem.

O professor, dentro de sua autonomia, pode trabalhar com a perspectiva da RME tentando incorporar as ações didáticas propostas e não necessariamente seguir à risca.

Reconhece-se que esta pesquisa teve algumas limitações, uma delas deve-se ao fato de não ter buscado maiores amplitudes de literatura, como textos em outras línguas, outras plataformas de buscas, amplitudes para outros Qualis de revistas ou mesmo outros cortes temporais.

Portanto, sugere-se mais pesquisas sobre a temática, não só relacionadas às possibilidades de análises além das limitações citadas, mas a outras situações acerca do tema, como, por exemplo, explorações de resultados que poderiam ser observados no ensino e aprendizagem na Educação Básica e/ou Ensino Superior com um olhar para o erro na perspectiva da RME. Outras pesquisas podem ser realizadas em observações em trabalhos práticos, tentando lidar com erros em aulas de matemática, na perspectiva da RME, utilizando das ações didáticas levantadas nesta tese.

Ainda podem ser exploradas pesquisas no campo da formação docente e continuada, buscando os reflexos, frente as sugestões de ações didáticas levantadas. Quais inclusões ou ressignificações, poderiam ser levadas em consideração sobre a prática de ensino dos professores. Além de materiais ou trajetórias de avaliação emergentes que podem ser reveladas com intuito de auxiliar a formação de professores, seja continuada ou não.

Desta tese, ainda podem emergir outras pesquisas com margens significativas para desencadear discussões e reflexões a respeito do tema.

Esta pesquisa pode vir a contribuir para professores que estão buscando formação continuada, futuros professores e/ou pesquisadores que buscam conhecer ou ampliar conhecimentos a respeito da avaliação da aprendizagem escolar e da abordagem de ensino RME. As ações didáticas levantadas podem servir como sugestões, como uma visão alternativa de uma sala de aula contrapondo a concepção do erro como algo que não pode acontecer e, em que o estudante geralmente é penalizado, podendo gerar uma série de desconfortos emocionais.

Quanto à aprendizagem da pesquisadora, as reflexões serviram a um novo olhar para as maneiras de lidar com o erro na sala de aula e uma oportunidade para ressignificar ações docentes a serviço de um processo de aprendizagem menos injusto e mais humano.

REFERÊNCIAS

- ABRATE, R. S.; POCHULU, M. D.; VARGAS, J. M. **Errores y dificultades en matemática**: análisis de causas y sugerencias de trabajo. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006.
- AÇÃO. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.
- ALMEIDA, V. L. C. de. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.
- ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ALVES, R. M. F. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.
- ASTOLFI, J. P. **El “error”, un medio para enseñar**. México, 2004, p. 109 -119. Disponível em:<https://www.rmm.cl/sites/default/files/usuarios/13793347/articulos/astolfi_jean_pierre._el_error_un_medio_para_ensenar.pdf> Acesso em 28 jul. 2019.
- _____. **El “error”, un medio para enseñar**. Sevilla: Díada, 1999. Colección Investigación y Enseñanza.
- BARDAÇON, A. C. **Análise do desenvolvimento de uma trajetória de ensino e aprendizagem para a construção dos números naturais. 2020**. 124f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luís, A. R.; Augusto P. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- BARRETTO, A. C. **Procedimentos da análise da produção escrita em matemática no contexto do GEPEMA**: um olhar para dentro. 2018. 116f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.
- BENEDITO, J. E. G. **Um estudo do caráter de continuidade na avaliação didática**. 2018. 63f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

BENNETT, R. Formative assessment: a critical review. **Assessment in Education Principles Policy and Practice**, v. 18, n. 1, fev. 2011.

BEZERRA, G. C. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

BORASI, R. Using errors as springboards for the learning of mathematics: an introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. . 7, n. 3-4, p.1-14, 1985.

_____. **Reconceiving mathematics Instruction**: a Focus on Errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em Matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. 238f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

_____. Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n.22, p.155-177, jul/dez. 2000.

BURIASCO, R. L. C.; SOARES, M. T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção matemática. In: VALENTE, W. R. **Avaliação em matemática**: histórias e perspectivas atuais. 2ª ed. Campinas: Editora Papirus, 2013. p. 11-38.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA**, Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-96, 2009.

CELESTE, L. B. **A Produção Escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

CORDEIRO, E. C. F. **Observação**: Instrumento de Avaliação Didática? 2021. 56 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

ESTEBAN, M. T. **O que sabe que erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3. Ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2013.

DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007

DEKKER, T., QUERELLE, N. **Great assessment problems**. Utrecht: Freudenthal Instituut, 2002. Disponível em: http://www.fisme.science.uu.nl/catch/products/GAP_book/intro.html. Acesso em: 10 jun. 2019.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning** (Doctoral dissertation). Utrecht: OW&OC, 1987.

_____. Assessment: No change without problems. In: ROMBERG, T. A. (Ed.), - **Reform in School Mathematics and Authentic Assessment**. New York: SUNY Press, 1995. p. 87-172.

_____. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DIDÁTICO. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

_____. **Enunciados de tarefas de matemática: um estudo sob a perspectiva da educação matemática realística**. 2013. 121 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FORSTER, C. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2016. 123f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

_____. **Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos**. 2020. 112f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 45. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

FREUDHENTHAL, H. Why to teach mathematics as to be useful? **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 3-8, 1968.

_____. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

_____. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1973.

_____. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas**, Portugal, v. 9, n. 3, p. 317-328, 1979.

_____. Major Problems of mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Holanda, v. 12, n. 2, p. 133-150, 1981.

_____. **Revisiting mathematics education**. Dordrecht: Kluwer 1991.

GRAVEMEIJER, Koeno. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 1, n. 2, p. 155-177, jun. 1999.

_____. O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar? In: SANTOS, M.L.; CANAVARRO, A. P.; BROCARD, J.. **Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas**. Lisboa: APM, 2005. p. 83-101.

_____. RME Theory and Mathematics Teacher Education. In: **International Handbook of Mathematics Teacher Education**. Rotterdam: Sense Publishers. 2008, v. 1. p. 283-302.

GRAVEMEIJER, Koeno; COBB, Paul. Design research from a learning design perspective. In: VAN DEN AKKER, Jan. et al. **Educational design research**. London: Routledge, 2006.

GRAVEMEIJER, Koeno; DOORMAN, Michiel. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. **Educational Studies in Mathematics**, v. 39, n. 1, p. 111-129, jan., 1999.

GRAVEMEIJER, K; TERWEL, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777- 796, nov.-dez., 2000.

GOMES, M. T. **O portfolio na avaliação da aprendizagem escolar**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003.

HADJI, C. **Avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos**. Porto: Porto Editora LDA, 1994.

HARMUCH, D. **Tarefas para uma educação financeira: um estudo**. 2017. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

HOFFMANN, J. M. L. **Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade**. Porto Alegre: Educação & Realidade, 1993.

INNOCENTI, M. S. **Prova-escrita-com-cola em aulas de matemática no 8º ano do Ensino Fundamental**. 2020. 78f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

LIMA, R. C. N. d. **Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

LOPEZ, J. M. S. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem componente do ato pedagógico**. São Paulo: Cortez, 2011.

MARQUES, A. F. **Aulas de Matemática: narrativas de uma professora em transição**. 2017. 82f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

MORAES, M. A. G. **Correção de uma prova escrita de matemática: algumas considerações**. 2013. 91f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em Questões Discursivas Não Rotineiras de Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

_____. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

NAGY-SILVA, M. C. **Do Observável ao Oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

NEGRÃO DE LIMA, R. C. **Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

NICOL, D. J.; MACFARLANE-DICK, D. Formative assessment and self-regulated learning: a model and seven principles of good feedback practice. **Studies in Higher Education**, [S.l.], v. 31, n. 2, p. 199–218, 2005.

- OLIVEIRA, R. C. de. **Matematização: estudo de um processo**. 2014. 62f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- OLIVEIRA, J. R. **Oficina de correção de provas escritas de matemática: um estudo**. 2021. 166. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.
- PAIXÃO, A. C. G. **Uma Prova em Fases de Matemática: da análise da produção escrita ao princípio de orientação**. 2016. 103f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- PASSOS, A. Q. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA: algumas aproximações**. 2015. 147 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.
- PEDROCHI JUNIOR, O. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em Matemática**. 2012. 56f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.
- _____. **A Avaliação Formativa como Oportunidade de Aprendizagem: fio condutor da prática pedagógica escolar**. 2018. 67 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.
- PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.
- PEREGO, S. C. **Questões Abertas de Matemática: um estudo de registros escritos**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.
- PEREIRA JUNIOR, A. **Enunciados de Itens de provas de Matemática: um estudo na perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2014. 65f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases**. 2013. 122f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- PRESTES, D. B. **Prova em fases de Matemática: uma experiência no 5o ano do Ensino Fundamental**. 2015. 122f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.
- _____. **Um olhar realístico para tarefas de probabilidade e estatística de uma coleção de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental**. 2021. 128f.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ROCHA, F. B. S. **Um mapeamento de publicações em Educação Matemática no Instituto Freudenthal de 2000 a 2019**. 2021. 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ROSSETTO, H. H. P. **Trajectoria Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

_____. **O desenvolvimento de um framework de trajetórias de ensino e aprendizagem de Matemática**. 2021. 91f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em Questões Discursivas Não Rotineiras de Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

_____. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SCHASTAI, M. B. **Tall e Educação Matemática Realística: algumas aproximações**. 2017. 179f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SEGURA, R. O. **Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões discursivas de Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SILVA, G. dos S. e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015

_____. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, V. K. da. **FEEDBACK: recurso para aulas de matemática**. 2020. 68f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

SOUZA, J. A. de. **Cola em Prova Escrita: de uma conduta discente a uma estratégia docente**. 2018. 146 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

TREFFERS, A. **Wiskobas doelgericht**. Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht, 1978.

_____. Meeting innumeracy at primary school. **Educational Studies in Mathematics**. v. 22, n. 4, p. 333-352, 1991.

TREVISAN, A. L. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 168f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

_____. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. In: **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000a. CD-ROM.

_____. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.). **Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001**. The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics. Taipei, Taiwan, p. 1-43, November, 2000b.

_____. **Los niños aprenden matemáticas**: una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria. tr. del inglés Fernanda Gallego y Betina Zolkower; tr. del neerlandés Cornelis van der Meer, México: Correio del maestro: La Vasija, 2010a.

_____. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, Len; KISSANE, Barry; HURST, Chris (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA, 2010b.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

WIJAYA, A.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; DOORMAN, M.; ROBITZSCH, A. Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. **The Mathematics Enthusiast**, Universidade de Utrecht, v.11, p. 555-584, 2014.

WINSLOW, C.; JESSEN, B.; DOORMAN, M.; BOS, R. **Meria practical guide to inquiry based mathematics teaching**. Retrieved from: <https://meria-project.eu/activities-results/practical-guideibmt>, MERIA, 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Referência das Teses

	Referências	no
1.	PONTES, J. da C. Identificação e caracterização do perfil de erros e dificuldades de aprendizagem nas questões de Estatística e Probabilidade das provas de matemática do ENEM nos anos de 2013 a 2016 dos aprovados na primeira chamada do SISU para ingressar na UFRN. 2019. 198f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.	019
2.	FERREIRA, H. S. Métodos matemáticos em modelagem e simulação do craqueamento térmico do 1,2-Dicloroetano. 2003. 179 p. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Química, Campinas, 2003.	018
3.	SANCHEZ, E. de M. Erros conceituais na aprendizagem contábil: ensine o errado! 2018. Tese (Doutorado em Controladoria e Contabilidade: Contabilidade) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.	018
4.	SANTANA, L.E.D.L. A conversão entre representações semióticas: um estudo no domínio das frações à luz de Duval e Vergnaud. 2018. 195f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.	018
5.	PIRES, V. L. Pontos de conflito na relação criança-escrita e seus efeitos heterogêneos: rasuras, reformulações, recomposições textuais. 2015. 114 f. Tese (Doutorado em Linguística) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.	015
6.	SANTOS, C. S. dos. Um estudo sobre os erros ortográficos de alunos do Ensino Médio do IFSUL – Campus Pelotas Visconde da Graça (CaVG), à luz do Modelo de Redescrição Representacional (MRR) de Karmiloff-Smith (1994). 2015. 373 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2015.	015
7.	BIANCHINI, L. G. B. Significações e sentimentos sobre o erro: alunos que frequentam a sala de apoio à aprendizagem. 2014. 175 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras de Assis, 2014.	014
8.	COSTA, J. R. Desenvolvimento profissional de professores que lecionam Matemática no Ensino Fundamental: possibilidades a partir da reflexão sobre os erros dos alunos. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.	014
9.	MARCZAL, D. Farma: uma ferramenta de autoria para objetos de aprendizagem de conceitos matemáticos. 2014. 174 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014	014
10.	PITARELLO, A. de O. O computador nas aulas de língua estrangeira: o recurso F.A.R.E. em atividades de correção automática. 2014. Tese (Doutorado em Língua e Literatura Italiana) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.	014
11.	ROLIM, A. L. de S. Corregulação da Aprendizagem: efetividade do artefato social em Ambiente Virtual de Aprendizagem. 2014. 387 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.	014
12.	SILVA, A. G. O. Aprendizagem consciente: o relatório de reflexão dos erros (RRE) como alternativa pedagógica. 2013. 141 f. Tese (Doutorado em Ensino	013

	de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.	
13.	LUFT, C. D. B. Aprendendo com feedback : um estudo sobre como o cérebro utiliza informação para aprender. 2012. 209f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.	012
14.	Ferreira, C. C. O imperativo em gramáticas e em livros didáticos de espanhol como língua estrangeira visto sob a ótica dos modelos de Análise Contrastiva e de Análise de Erros . 2007. 561f Tese (Doutorado em Estudos da Linguagem) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.	007
15.	DIAS, M. A. da S. Dificuldades na aprendizagem dos conteúdos de Biologia : evidências a partir das Provas de Múltipla Escolha do Vestibular da UFRN (2001-2008). 2008. 275 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.	008
16.	VANZIN, T. TEHCo - modelo de ambientes hipermídia com tratamento de erros, apoiando na teoria da cognição situada . 2005. 188 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.	005
17.	FIGUEIREDO, J. F.Q. de. Correção com os pares : os efeitos do processo da correção dialogada na aprendizagem da escrita em língua inglesa. 2001. 240 f. Tese (Doutorado em Estudos Linguísticos) - Universidade Federal de Minas Gerias, Belo Horizonte, 2001.	001

Fonte: Os autores.

APÊNDICE B

Referência das Dissertações

	Referências	no
1.	SILVA, L. P. da. Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva. 2019. 209 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.	019
2.	CARRIJO, A. R. D. A (re)significação do erro no ensino de Química orgânica numa perspectiva construtivista. 2019. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2019.	019
3.	MORALES VÁZQUEZ, R. Os erros na oralidade e o feedback corretivo: crenças e ações de duas professoras de Espanhol para aprendizes brasileiros. 2019. 190 f., Dissertação (Mestrado em Linguística Aplicada) - Universidade de Brasília, Brasília, 2019.	019
4.	CARVALHO, A. L. B. de. O uso da rede social facebook como ferramenta para ensino da ortografia em séries finais do Ensino Fundamental: o caso da hipossegmentação. 2018. 104f. - Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Humanidades, Fortaleza, 2018.	018
5.	RIZZON, B.M. Formação continuada para professores de matemática: o erro como recurso pedagógico e seu papel no processo de avaliação. 2018. 122 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul, 2018.	018
6.	SANTOS, S. dos P. Erros e dificuldades de alunos em Álgebra Elementar: uma metanálise qualitativa de dissertações brasileiras de mestrado. 2013. 164p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2018.	018
7.	TRAVASSOS, W. B. Um estudo sobre o conceito de inequação com licenciandos em Matemática: contribuições da teoria dos registros de representação semiótica. 2018. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, 2018, Maringá, PR.	018
8.	LIMA, P. B. S. QIn - Framework para Gestão Integrada de Qualidade e de Inovação - o paradoxo entre qualidade e inovação na gestão de projetos de software. 2017. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Inovação) - Escola de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.	017
9.	MELO, V. N. Sequência Fedathi e análise de erros aplicados ao ensino de frações. 2017. 76f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.	017
10.	MUNIZ, A. M. C. Procedimentos utilizados por estudantes do nível médio técnico em problemas de semelhança de triângulos contextualizados e não contextualizados. 2017. 114 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.	017
11.	PENHA, R. S. A aprendizagem cooperativa como estratégia metodológica no ensino de Matemática no Ensino Médio. 2017. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017	017
12.	SOUSA, V. da S. de. O erro no ensino de Matemática: reflexões a respeito de ações docentes no processo de ensino. 2017. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de	017

	São Paulo, São Paulo, 2017.	
13.	ESCOBAR, F.C. da C. Investigando erros em matemática: fatores que interferem na aprendizagem dos educandos. 2016. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2016	016
14.	OZORES, A. L. F. Entendendo alguns erros do Ensino Fundamental II que os alunos mantêm ao final do Ensino Médio. 2016. 206 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.	016
15.	ZAMITH, C. Efeitos de erros sobre o estabelecimento de relações condicionais e sobre a formação de classes de estímulos equivalentes. 2016. 119 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.	016
16.	CARNEIRO, A. C. C. Avaliando o uso de reforçamento em um procedimento de correção no ensino de tato para crianças com autismo. 2015. 23f. Dissertação (Mestrado em Teoria e Pesquisa do Comportamento) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.	015
17.	COSTA, R. Q. G. da. Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente. 2015. 212 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2015.	015
18.	MOURA, V. A. B. Avaliação do impacto da retroação na aprendizagem apoiada por uma ferramenta educacional. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015	015
19.	SANTOS, J. K. A compreensão do professor sobre os erros dos alunos, em itens envolvendo expectativas de aprendizagem dos números racionais, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. 2015. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.	015
20.	SOUZA, E. C. Programação no ensino de Matemática utilizando Processing 2: um estudo das relações formalizadas por alunos do Ensino Fundamental com baixo rendimento em Matemática. 2015. 189 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2015.	015
21.	CASTRO, M.F.de Utilização de portfólios eletrônicos na promoção da reflexão sobre o erro em programação para alunos do ensino superior. 2018. 68 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.	014
22.	JESUS, L. R. de. Ensinando o sistema circulatório no Ensino Fundamental. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Biologia) - Ensino de Ciências (Física, Química e Biologia), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.	014
23.	NASCIMENTO, L. D. do. Desalinho à norma: um estudo de caso sobre marcas de oralidade em produções textuais na educação de jovens e adultos. 2014. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Formação de Professores) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.	014
24.	LIMA, E. N. As deficiências conceituais por trás dos erros. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, Mestrado Profissional em Matemática, São Cristóvão, Sergipe, 2013.	013
25.	SANCHEZ, E. de M. Avaliação de aprendizagem: o importante é errar! 2013. Dissertação (Mestrado em Controladoria e Contabilidade: Contabilidade) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São	013

	Paulo, São Paulo, 2013.	
26.	SANTOS, Adriana Malinowski dos. Avaliação da aprendizagem em curso de formação de gestores de EaD a distância. 2013. 162 fls. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.	013
27.	SPERAFICO, Y. L. S. Competências cognitivas e metacognitivas na resolução de problemas e na compreensão do erro: um estudo envolvendo equações algébricas do 1º grau com alunos do 8º ano. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.	013
28.	ROCHA, J. Modelagem Matemática com fotografias. 2013. 165 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.	013
29.	SILVA, D. N. da. Programa de leitura e sua aplicação ao atraso no desenvolvimento. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2012.	012
30.	FREITAS, G. M. da S. O retorno na produção escrita e suas influências na motivação para a aprendizagem de Inglês. 2012. 118 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Letras e Comunicação, Belém, 2012.	012
31.	MILEO, C. D. O significado do erro nva da aprendizagem: entre o ideal e o real apontado por professoras do Ensino Fundamental I da Zona Oeste da cidade de São Paulo. 2012. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.	012
32.	TIBURCIO, R.R.R. Dialog journal writing: a study on the effects of (in) direct corrective feedback. 2012. 118 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) - Universidade do Sul de Santa Catarina – Tubarão, 2012.	012
33.	BATISTA, A. O. Desempenho ortográfico de escolares do 2º ao 5º ano: proposta de elaboração de um protocolo de avaliação da ortografia. 2011. 233 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2011.	011
34.	REIS, A. M. Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do Ensino Médio. 2011. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.	011
35.	VIEIRA, L. B. Implicações pedagógicas do lúdico para o ensino e aprendizagem da Álgebra. 2011. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2011.	011
36.	QUEIROZ, S. M. A aprendizagem de matemática por alunos adolescentes na modalidade educação de jovens e adultos: analisando as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva. 2010. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2010.	010
37.	SILVA, J. T. da. O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias. 2010. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.	010
38.	COSTA, C. C. Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 2009.170 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, 2009.	009
39.	ESPINDOLA, N. A. A concepção do erro como uma estratégia de revisão do processo de ensino e aprendizagem em matemática nível fundamental. 2010. 96 f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário	009

	Univates, Lajeado, 2009.	
40.	GARCIA, M. C. C. Língua estrangeira: entre a demanda de saber e o medo de ser. 2009. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Estudos da Linguagem, Campinas, 2009.	009
41.	GOMES, Suzy Mara. As reflexões de uma professora de Língua Inglesa sobre as percepções do outro com relação a como tra(tar)balhar o erro no Ensino Línguas. 2009. 197 f. Dissertação (Mestrado em Linguística Aplicada) - Universidade de Brasília, Brasília, 2009.	009
42.	GUENDELMAN, C. K. O conceito de douta ignorância de Nicolau de Cusa em uma perspectiva pedagógica. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.	009
43.	PAIAS, A. M. Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos dos ensinos Fundamental e Médio. 2009. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.	009
44.	PERON, L. D. C. Um processo de pesquisa em colaboração e a formação continuada de professora de Matemática a respeito dos erros de seus alunos. 2009. 239 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.	009
45.	VIEIRA, C. R. O Erro na Aprendizagem de Inglês-Le: Uma Análise da Interlíngua Escrita de Alunos do Núcleo de Lingu. 2009. Sem Numeração. Dissertação (Mestrado Acadêmico ou Profissional em 2009) - Universidade Estadual do Ceará, 2009.	009
46.	BOCALON, G. Z. O erro na aprendizagem de frações no Ensino Fundamental: concepções docentes. 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2008.	008
47.	MESQUITA, A. A. F. de. Crenças e práticas de avaliação no processo interativo e na mediação de um par no tandem a distância: um estudo de caso. 2008. 238 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2008.	008
48.	PONTES, J. da C. Questões objetivas sobre funções das provas de matemática do vestibular da UFRN dos anos de (2001 a 2008): um diagnóstico sobre os erros que os candidatos cometem. 2008. 199 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.	008
49.	SCHERER, D. L. Afetividade e correção e/ou tratamento de erros de dois professores de E/LE da rede pública do DF. 2008. 197 f. Dissertação (Mestrado em Linguística Aplicada) - Universidade de Brasília, Brasília, 2008.	008
50.	BERTI, N. M. A análise do erro sob a perspectiva didático-pedagógica no ensino-aprendizagem da Matemática: um estudo de caso na 5ª série. 2007. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2007.	007
51.	DALTO, J. O. A Produção Escrita em Matemática: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.	007
52.	FELICE, D. M. G. de. Erros orais: evidências da neurobiologia na aquisição de segunda língua. 2007. 107 f. Dissertação (Mestrado em Linguística Aplicada) - Universidade de Brasília, Brasília, 2007.	007
53.	MENDES, I. M. Os significados do erro na práxis pedagógica da matemática nos anos iniciais de escolarização. 2007. 139 f. Dissertação	007

	(Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2007.	
54.	MIRANDA, W. dos S. Erros e obstáculos: os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental no processo de avaliação. 2007. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.	007
55.	PESSOA, R. C. M. F. O Processo avaliativo na progressão continuada: qual o sentido do erro? 2007. 171 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2007.	007
56.	PIAI, D. Hipóteses sobre a combustão entre alunos do Ensino Médio: a epistemologia de Gaston Bachelard. 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2007	007
57.	GARRIDO, A. M. P. de C. Errar é humano! A vivência de erros e seus efeitos na produção oral sob a perspectiva do aluno de Inglês como Língua Estrangeira. Rio de Janeiro, 2006. 172p. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2006.	006
58.	KRAIDE, Samira. Lapsos de linguagem e posição discursiva de alunos formandos de letras. 2006. 84f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Estudos da Linguagem, Campinas, 2006.	006
59.	NEGRÃO DE LIMA, R. C. Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.	006
60.	NOGUEIRA, R. S. F. Efeitos do tempo de exposição ao feedback na aprendizagem em treinamento baseado na web. 2006. 180 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Universidade de Brasília, Brasília, 2006.	006
61.	RUY, R. C. Avaliação Formativa no Ensino Fundamental II: possibilidades enunciadas na atuação docente. 2006. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.	006
62.	SANTOS, A. M. dos. Análise de erros gramaticais na produção escrita de aprendizes brasileiros de espanhol: o papel da língua materna. 2006. 87 f. Dissertação (Mestrado em Letras) - Universidade Católica de Pelotas, Pelotas, 2006.	006
63.	SILVA, M. M. da. Dificuldades de alunos do Ensino Médio em questões de Matemática do Ensino Fundamental. 2006. 201 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.	006
64.	VIEIRA, K. R. C. F. Avaliação em processo. 2006. 172 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação, Florianópolis, Santa Catarina, 2006	006
65.	VURANDE, T. E. C. A Gestão Pedagógica do Erro no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática: Um estudo de caso. 2006. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.	006
66.	ALVES, M. do R. do N. R. A escrita na primeira série do Ensino Médio: uma análise sobre a alfabetização. 2005. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2005.	005
67.	SILVA, A. R. H. S. A concepção do professor de Matemática e dos alunos frente ao erro no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. 2005. 137 f. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2005.	005
68.	SPATTI-CAVALARI, S. M. O tratamento do erro na oralidade: uma proposta focada em características da interlíngua de alunos de inglês como língua estrangeira. 2005. 233f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual	005

	Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2005.	
69.	BASTOS, E. C. de M. Ensino de leitura de frases com compreensão a alunos de 2ª série de escolas públicas de Belém. 2004. 67 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Belém, 2004.	004

Fonte: Os autores.

APÊNDICE C

Referência de artigos da Plataforma Sucupira

	Referências	no
1.	BATHELT, R. E. A psicologia do número. Educação , v. 25, n. 1, p. 97-112, jan./jun. 2000.	000
2.	GUSMÃO, T. C. R. S.; EMERIQUE, P. S. Do Erro Construtivo ao Erro Epistemológico: um espaço para as emoções. Bolema , Rio Claro (SP), v. 13, n. 14, 2000.	000
3.	TANCREDI, R. M. S. P. et al. Os cadernos dos alunos e a aprendizagem da matemática. Educação Matemática em Revista , v. 8, n. 11, p. 26-33, dez. 2001.	001
4.	CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças. Acta Scientiae , Canoas, v. 6, n. 1, p. 27-36, jan./jun. 2004.	004
5.	MATHEUS, M. S.; DALLACORT, M. D. Reavaliando a avaliação discente. VIDYA , v. 24, n. 42, p. 61-76, jul./dez. 2004.	004
6.	SILVA, M. C. N.; BURIASCO, R. L. C. de. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. Ciência & Educação , Bauru (SP), v. 11, n. 3, p. 499-512, abr. 2005.	005
7.	BISOGNIN, E.; FIOREZE, L. A.; CURY, H. N. Análise de erros e proporcionalidade: uma experiência com alunos de graduação e pós-graduação. VIDYA , v. 25, n. 2, p. 31-40, jul./ dez. 2005.	005
8.	PEREGO, S. C.; BURIASCO, R. L. C. de. Registros escritos em matemática: que informações podem fornecer na avaliação? Educação Matemática em Revista , n. 18/19, p. 46-56, dez. 2005.	005
9.	CURY, H. N. Análise de Erros e Formação de Professores: Sugestões para Ensino e Pesquisa em Cursos de Licenciatura em Matemática. Contexto e Educação , n. 76, p. 95-113, jul./dez. 2006.	006
10.	RUY, R. C.; SOUZA, N. A. de. Avaliação Formativa no Ensino Fundamental II: possibilidades da atuação docente. Estudos em Avaliação Educacional , v. 17, n. 35, p. 49-68, set./dez. 2006.	006
11.	MORETTI, M. T. Estudo das divergências entre corretores na avaliação de provas em matemática. Avaliação , 2007.	007
12.	MACIEL, A.; CÂMARA, M. Analisando o rendimento de alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em atividades envolvendo frações e idéias associadas. Bolema , Rio Claro (SP), v. 20, n. 28, p. 163-177, 2007.	007
13.	CURY, H. N.; KONZEN, B. Uma aplicação de jogos na análise de erros em educação matemática. Revista Eletrônica de Educação Matemática , v. 2, n. 1, p. 107-117, 2007.	007
14.	MELO, A. C. S. de et al. Contribuições da epistemologia bachelardiana no estudo da história da óptica. Ciência & Educação , Bauru (SP), v. 13, n. 1, p. 99-126, abr. 2007.	007
15.	ABRAHÃO, M. H. M. B. Estudos sobre o erro construtivo – uma pesquisa dialógica. Educação , Porto Alegre (RS), v. 30, n. 4, p. 187-207, 2007.	007
16.	LIMA, R. C. N. de; BURIASCO, R. L. C. de. Avaliação da aprendizagem escolar: um olhar em perspectiva para a produção escrita. VIDYA , v. 27, n. 2, p. 43-54, jul./ dez. 2007.	007
17.	RENZ, S. P. A sua calculadora erra? Educação Matemática em Revista , Rio Grande do Sul, n. 8, p. 59-63, 2007.	007
18.	SILVA, M. C. N.; BURIASCO, R. L. C de. Uma possibilidade para a avaliação	

	escolar em matemática: a análise da produção escrita. Acta Scientiae , Canoas, v. 10, n. 1, p. 84-96, jan./jun. 2008.	008
19.	SILVA, E. D. da. A Virtude do Erro: uma visão construtiva da avaliação. Estudos em avaliação educacional , v. 19, n. 39, p. 91-114, jan./abr. 2008.	008
20.	BERTI, N.; ROSSO, A.; BURAK, D. Compreensão e significado do erro em Matemática dado pelos alunos da 5ª série. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos , Brasília, v. 89, n. 223, p. 553-575, set./dez. 2008.	008
21.	MONTICELLI, F. F. Efeitos da ausência paterna na aprendizagem. Educação Temática Digital , Campinas, v. 10, n. 1, p. 87-104, dez. 2009	009
22.	FAIRCHILD, T. M. Conhecimento técnico e atitude no ensino de língua portuguesa. Educação e pesquisa , São Paulo, v. 35, n. 3, p. 495-507, set./dez. 2009.	009
23.	VIALI, L.; CURY, H. N. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 11, n. 2, p. 373-391, 2009.	009
24.	ROSSO, A. J.; BERTI, N. M. O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. Bolema , Rio Claro (SP), v. 23, n. 37, p. 1005-1035, dez. 2010.	010
25.	BELTRÃO, R. C. Estratégias mobilizadas por alunos de escolas públicas para resolver um problema que explora a ideia de equilíbrio. Atos de pesquisa em educação , v. 5, n. 3, p. 447-462, set./dez. 2010.	010
26.	LEIVAS, J. C. P.; CURY, H. N. Análise de Erros em Soluções de um Problema de Geometria: uma Investigação com Professores em Formação Continuada. Revista Eletrônica de Educação Matemática , Florianópolis (SC), v. 5, n. 1, p. 71-83, 2010.	010
27.	TELES, R. A. de M. Um estudo sobre a influência do campo algébrico na resolução de situações que envolvem fórmulas de área. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 12, n. 1, p. 129-142, 2010.	010
28.	MORAES, F. R. de; BITTAR, M. Um estudo sobre erros em Álgebra Elementar. Educação Matemática em Revista , n. 29, p. 35-41, mar. 2010.	010
29.	OLIVEIRA, G. P. de; FERNANDES, R. U. O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 12, n. 3, p. 548-577, 2010.	010
30.	TELES, R. A. de M.; BELLEMAIN, P. M. B. Fórmula de Área para Otimização: um olhar sob a ótica das imbricações entre Campos Conceituais. Educação Matemática em Revista , n. 31, p. 04-13, nov. 2010.	010
31.	CORDEIRO, C. C.; FRIEDMANN, C. V. P.; SILVA, R. Alguns resultados de uma análise de erros das questões de geometria de alunos selecionados na primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas. Educação Matemática em Revista , Rio Grande do Sul, v. 1, n. 12, p. 09-20, 2011.	011
32.	LIMA, I. M. da S. Conhecimentos e concepções de professores de matemática: análise de sequências didáticas. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 13, n. 2, p. 359-385, 2011.	011
33.	SEBASTIANI, R. G.; VIALI, L. Teste de Hipóteses: uma análise dos erros cometidos por alunos de engenharia. Bolema , Rio Claro (SP), v. 24, n. 40, p. 835-854, 2011.	011
34.	QUEIROZ, S.; LINS, M. A Aprendizagem de Matemática por Alunos Adolescentes na Modalidade Educação de Jovens e Adultos: analisando as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva. Bolema , Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 75-96, 2011.	011
35.	TEIXEIRA, L. R. M. et al. Problemas Multiplicativos Envolvendo	

	Combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do ensino fundamental público. Educar em Revista , Curitiba, n. 1, p. 245-270, 2011.	011
36.	SILVA, L. C. M. da; VICTER, E. das F.; NOVIKOFF, Cristina. Análise do rendimento escolar de turmas do 9º ano no simulado de Matemática da Prova Brasil: um estudo exploratório na rede pública municipal de Duque de Caxias/RJ. Revista Práxis , v. 3, n. 6, p. 19-28, ago. 2011.	011
37.	CURY, H. N.; BORTOLI, M. de F. Pensamento algébrico e análise de erros: Algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. Revista de Educação, Ciências e Matemática , v. 1, n. 1, p. 101-113, ago./dez. 2011.	011
38.	TANUS, V. L. F. A.; DARSIE, M. M. P. O erro como forma provisória do saber: um tratamento diferenciado no processo ensino-aprendizagem da matemática. Revista de Educação Pública , Cuiabá, v. 21, n. 45, p. 169-189, jan./abr. 2012	012
39.	ALVES, R.; SEGADAS, C. Sobre o ensino da Análise Combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. Acta Scientiae , Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420, set./dez.2012.	012
40.	CASTANHO, S. B.; CURY, H. N. Uso de Jogos a Partir de Análise de Erros de Alunos de 8º Ano do Ensino Fundamental. Educação Matemática em Revista , n. 36, p. 31-38, ago. 2012.	012
41.	CURY, H. N. Pesquisas em ensino de ciências e matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 14, n. 2, p. 237-256, 2012.	012
42.	KLEIN, R. Alguns aspectos da teoria de resposta ao item relativos à estimação das proficiências. Ensaio: avaliação e políticas públicas em educação , Rio de Janeiro, v. 21, p. 35-56, jan./mar. 2013.	013
43.	FONTANIVE, N. S. A divulgação dos resultados das avaliações dos sistemas escolares: limitações e perspectivas. Ensaio: avaliação e políticas públicas em Educação , Rio de Janeiro, v. 21, n. 78, p. 83-100, jan./mar. 2013.	013
44.	RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. Análise de erro em avaliação de sistemas digitais: uma questão com lógica AND e flip-flop. Revista Eletrônica de Educação Matemática , Florianópolis (SC), v. 8, n. 1, p. 232-247, 2013.	013
45.	RAMOS, M. L. P. D; CURI, E. O “estado do conhecimento” dos termos erro, dificuldade e obstáculo nos periódicos de Educação Matemática. VIDYA , v. 33, n. 2, p. 29-39, jul./dez. 2013.	013
46.	SOUZA, N. A. de; SIBILA, M. C. C.; CORREIA, L. C. Do erro como fracasso ao erro como possibilidade de superação de dificuldades. Imagens da Educação , v. 3, n. 3, p. 51-61, 2013.	013
47.	SANTOS, D. P.; LOPES NETA, N. A. Investigando os erros dos alunos como fonte de possibilidades didático-metodológicas. Educação Matemática em Revista , Rio Grande do Sul, v. 2, n. 14, p. 06-15, 2013.	013
48.	FUCK, R. S. Análise de erros em geometria: uma investigação com alunos da educação de jovens e adultos (EJA). Revista de Ensino de Ciências e de Matemática , v. 4, n. 2, p. 16-36, 2013.	013
49.	BRUM, L. D.; CURY, H. N. Análise de erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. Revista de Ensino de Ciências e Matemática , v. 4, n. 1, p. 45-62, 2013.	013
50.	CURY, H. N. Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 15, n. 3, p. 547-562, 2013.	013
51.	SANTOS-WAGNER, V. M. P.; BORTOLOTI, R. D'A. M.; FERREIRA, J. R. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.	013

52.	PLAZA, E. M.; CURI, E. Sistema de numeração decimal: saberes revelados por alunos do 5º ano. Revista Eletrônica de Educação Matemática , Florianópolis(SC), v. 8, n. 1, p. 104-118, 2013.	013
53.	HRESCAK, R. D.; TREVISAN, A. L. Tarefa em fases em aulas de matemática: análise de uma experiência nos anos iniciais. VIDYA , v. 33, n. 1, p. 67-79, jan./jun. 2013.	013
54.	CURY, H. N. Um mapeamento de artigos de Educação Matemática que apresentam as palavras “erros”, “dificuldades” ou “obstáculos”. Educação Matemática em Revista , Rio Grande do Sul, v. 2, n. 15, p. 63-71, 2014.	014
55.	RAMOS, M. L. D. R.; CURI, E. Erros na resolução de inequações: consequências de dificuldades relativas a conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio. Acta Scientiae , Canoas, v. 16, n. 3, p. 457-471, set./dez. 2014.	014
56.	RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. Análise de erro em uma questão sobre função: uma forma de desvendar as dificuldades dos alunos. Revista de Educação, Ciências e Matemática , v. 4, n. 3, p. 13-24, set./dez. 2014.	014
57.	RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. Modelo de Análise Didática dos Erros: um guia para analisar e tratar erros referentes à função polinomial do 2º grau. Revista Eletrônica de Educação Matemática , Florianópolis (SC), v. 9, n. 1, p. 27-42, 2014.	014
58.	WANDERER, F.; KNIJNIK, G. Processos avaliativos e/na educação matemática: um estudo sobre o Programa Escola Ativa. Educação , Porto Alegre, v. 37, n. 1, p. 92-100, jan./abr. 2014	014
59.	SANTOS, J. A. S. dos. Problemas de ensino e de aprendizagem em perímetro e área de figuras planas. Revista Eletrônica de Educação Matemática , Florianópolis (SC), v. 9, n. 1, p. 224-238, 2014.	014
60.	CURY, H. N. Erros, dificuldades e obstáculos no ensino e na aprendizagem de matemática: um levantamento de trabalhos em Anais. Acta Scientiae , Canoas, v. 17, n. 2, p. 357-370, mai./ago. 2015.	015
61.	RAMOS, M. L. P. D. A importância da análise didática dos erros matemáticos como estratégia de revelação das dificuldades dos alunos. Revista Eletrônica de Educação Matemática , Florianópolis (SC), v. 10, n. 1, p. 132-149, 2015.	015
62.	RAICIK, A. C.; PEDUZZI, L. O. Q. Um resgate histórico e filosófico dos estudos de Charles Du Fay. Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências , Belo Horizonte, v. 17, n. 1, p. 105-126, jan./abr. 2015.	015
63.	OLIVEIRA, E. C. de; CHIUMMO, A. Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em Matemática. VIDYA , v. 35, n. 2, p. 179-195, 2015.	015
64.	LESSA, V. E.; FRESCH, E. M. Um Estudo Sobre o Erro Matemático de Estudantes de Engenharia Mecânica. Educação Matemática em Revista , n. 44, p. 05-13, mar. 2015.	015
65.	SPINILLO, A. G. et al. Como Professores e Futuros Professores Interpretam Erros de Alunos ao Resolverem Problemas de Estrutura Multiplicativa? Bolema , Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1188-1206, dez. 2016.	016
66.	SILVA, A. G. O.; SALVI, R. F. O Erro Cometido em Prova de Matemática; um Saber Escolar? Acta Scientiae , Canoas, v. 18, n. 1, p. 55-70, jan./abr. 2016.	016
67.	ALVARENGA, K. B.; ANDRADE, I. D.; SANTOS, R. de J. Dificuldades na resolução de problemas básicos de matemática: um estudo de caso do agreste sergipano. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas , v. 12, n. 24, p. 39-52, jan./jul. 2016.	016
68.	CLARETO, S. M.; SILVA, A. A. da. Quanto de Inusitado Guarda uma Sala de Aula de Matemática? aprendizagens e erro. Bolema , Rio Claro (SP), v.	016

	30, n. 56, p. 926-938, set./dez. 2016.	
69.	LOPES, B. J. S.; SOUZA, N. A. de; GUIMARÃES, A. L. B. Avaliação da aprendizagem: uma experiência formativa com mapas conceituais. Imagens da Educação , v. 6, n. 2, p. 08-18, ago. 2016.	016
70.	FERREIRA, D. H. L. et al. Reflexões sobre os erros em estatística: um estudo de caso em um curso de administração. Revista de Ensino de Ciências e Matemática , v. 7, n. 2, p. 13-24, 2016	016
71.	ANDO, R. de S. J.; COSTA, N. M. L da. Avaliação em Matemática no Ensino Médio: uma análise de estratégias equivocadas de estudantes. Acta Scientiae , Canoas, v. 18, n. 3, p. 597-620, set./dez. 2016.	016
72.	GONÇALVES, A.; BIANCHINI, B. L. Utilização de questões do SARESP como metodologia de análise de erros. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13., 2016, São Paulo. Anais [...] . São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.	016
73.	DAVIS, C.; NUNES, M. M. R. Eu sei o que tenho que fazer: a conquista da autorregulação. Estudos em Avaliação Educacional , v. 27, n. 64, p. 10-35, jan./abr. 2016.	016
74.	BARBOSA, G. dos S. Números primos e decomposição em fatores primos: um diagnóstico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Educação Matemática em Revista , Rio Grande do Sul, v. 1, n. 8, p. 34-47, 2016.	016
75.	SILVA, A. G.; SALVI, R.; PASSOS, M. M. Concepções do erro matemático em 36 anos de publicações em revistas de educação matemática no Brasil. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 18, n. 2, p. 843-870, 2016.	016
76.	COSTA, D. E.; MORAES, M. S. F. de; SILVEIRA, M. R. A. da. Um estudo sobre problemas de tradução relativos às propriedades de limites de função real de uma variável real. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 18, n. 1, p. 203-216, 2016.	016
77.	BIANCHINI, L. G. B.; VASCONCELOS, M. S. Sentir, Significar e Construir Conhecimento com Base nos Erros. Educação e realidade , Porto Alegre, v. 42, n. 3, p. 1035-1057, jul./set. 2017.	017
78.	NÚÑEZ, I. B.; RAMALHO, B. L. Os itens de Química do ENEM 2014: erros e dificuldades de aprendizagem. Acta Scientiae , Canoas, v. 19, n. 5, p. 799-816, set./out. 2017	017
79.	KLIEMANN, G. L.; DULLIUS, M. M. Análise de erros na resolução de problemas matemáticos. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas , v. 13, n. 28, p. 166-180, jul./dez.2017.	017
80.	MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C.; SPINILLO, A. G. Que ações didáticas escolher diante de erros de alunos em problemas matemáticos? Zetetikè , Campinas (SP), v. 25, n. 3, p. 418-439, set./dez. 2017.	017
81.	ROCHA, M. M.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Impactos de análise de acertos e erros em Cálculo I. VIDYA , v. 37, n. 2, p. 367-382, jul./dez. 2017.	017
82.	TEIXEIRA JR., V. P.; SILVA, F. H. S. da. Avaliação Formativa e a prática de provas: uma análise das concepções de professores de matemática. Educação Matemática em Revista , v. 22, n. 55, p. 40-59, jul./set. 2017.	017
83.	JÜRGENSEN, B. D. da C. P. Cenários Para Investigação como Ferramenta de Avaliação: uma discussão. Educação Matemática em Revista , v. 22, n. 56, p. 21-38, out./dez. 2017.	017
84.	BRITO, C. E.; NUNES, T. R. Erros e Obstáculos no Processo de Aprendizagem de Derivadas: uma análise bilateral docente/discente. Educação Matemática em Revista , v. 22, n. 56, p. 277-288, 2017.	017
85.	REZENDE, V.; TRAVASSOS, W. O software Aplusix e a resolução de inequações: um estudo de erros e acertos de estudantes do 1º ano de matemática. Educação Matemática em Revista , v. 22, n. 53, p. 85-98,	017

	jan./mar. 2017.	
86.	MENESES, F. M. G. de; NUÑEZ, I. B. Erros e dificuldades de aprendizagem de estudantes do ensino médio na interpretação da reação química como um sistema complexo. Ciência & Educação , Bauru (SP), v. 24, p. 175-190, 2018.	018
87.	NUÑES, I. B.; RAMALHO, B. L. Dificuldades de aprendizagem em itens de uma prova de Didática Geral de futuros professores. Educação , v. 42, n. 3, jul./set. 2018.	018
88.	CARDOSO, V. C.; AMARAL-SCHIO, R. B.; OLIVEIRA, S. R. de. Um estudo de situações-problema do campo multiplicativo exploradas por professores e estudantes do Ensino Fundamental. Nuances: estudos sobre Educação , Presidente Prudente (SP), v. 29, n. 3, p. 192-214, set./dez. 2018.	018
89.	VIDOTTI, Daniela Barbieri; KATO, Lilian Akemi. Um Estudo sobre Alguns Conflitos no Processo de Aprendizagem de Limite de Funções de Várias Variáveis. Acta Scientiae , Canoas, v. 20, n. 5, p. 930-949, set./out. 2018	018
90.	SILVA, J. L. de O. C da.; PINHEIRO, N. A. M. Estudo de Erros e Obstáculos nas Operações Fundamentais da Matemática com Alunos de 6º Ano de Salas de Apoio. Acta Scientiae , Canoas, v. 20, n. 5, p. 800-812, set./out. 2018.	018
91.	SOUZA, P. F. de; FERRARI, P. C.; QUEIROZ, J. R. de O. História Recorrente e o Caráter Provisório da Ciência no Ensino da Natureza da Luz. Acta Scientiae , Canoas, v. 20, n. 4, p. 648-669, jul./ago. 2018.	018
92.	MIRANDA, W. dos S.; FARIAS, L. de N.; PEREIRA FILHO, S. C. F. Aspectos epistemológicos subjacentes a erros individuais frequentes no ensino institucionalizado. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas , v. 14, n. 30, p. 31-41, jan./jul. 2018.	018
93.	SÁ, L. C.; SOUZA, S. G. de. O jogo “Onde está o erro?” no ensino de sistema de equações lineares. Educação Matemática em Revista , Rio Grande do Sul, v. 2, n. 19, p. 73-80, 2018.	018
94.	BRITO, C. E.; FARIAS, L. M. S. Erros e obstáculos em torno dos objetos ostensivos de taxas de variação: autoanálises dos discentes da engenharia civil do IFBA–Eunápolis. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 21, n. 5, p. 485-497, 2019.	019
95.	OLIVEIRA, L. O. de. Análise de erros como metodologia em cursos de Licenciatura em Matemática. Educação Matemática em Revista , v. 23, n. 57, p. 138-145, mar. 2018.	019
96.	PAULUCCI, E. M. Perguntas pedagógicas como alternativa que promove experiências na aula de matemática. Educação Matemática em Revista , v. 24, n. 63, p. 108-120, jul./set. 2019.	019
97.	AVALOS-ROGEL, A. As ajudas como estratégias de professores em duas tradições do ensino de matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 21, n. 5, p. 709-710, 2019	019
98.	NOBRE, S.; MANRIQUE, A. L. Análise de uma sequência didática envolvendo conteúdos de Geometria. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 21, n. 5, p. 134-150, 2019.	019
99.	OLIVEIRA, R. G. de. Uma referência para a elaboração de saberes docentes a partir da observação e da reflexão de dificuldades e de erros sobre números inteiros relativos. Revista de Ensino de Ciências e Matemática , v. 10, n. 5, p. 318-332, out. 2019.	019
100.	BRANDT, C. F. et al. Reflexões sobre a aprendizagem das operações aritméticas elementares por alunos das séries iniciais do ensino fundamental à luz da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Revista Eletrônica de Educação Matemática , v. 14, n. 1, p. 01-16, 2019.	019
101.	LAUDARES, J. B.; RAMOS, A. C. M. Objeto de aprendizagem de geometria plana e dos sólidos para o ensino médio e técnico profissionalizante. VIDYA ,	019

	v. 39, n. 1, p. 91-113, jan./jun. 2019.	
--	---	--

Fonte: Os autores.

APÊNDICE D

Referência de artigos da Plataforma CAPES/MEC

	Referências	no
1.	VIALI, L.; CURY, H. N. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 11, n. 2, p. 373-391, 2009.	009
2.	DALTO, J. O.; BURIASCO, R. L. C. Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença? Educação e Pesquisa , São Paulo, v. 35, n. 3, p. 449-461, set./dez. 2009.	009
3.	SILVA, B. V. da C. Discutindo Modelos de Visão Utilizando a História da Ciência. Holos , v. 3, p. 180-190, jan. 2009.	009
4.	OLIVEIRA, G. O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. Educação Matemática Pesquisa , v. 12, n.3, p. 548-577, 2010.	010
5.	OLIVEIRA, L. M. S.; SILVA, O. G. da; FERREIRA, U. V. da S. Desenvolvendo jogos didáticos para o ensino de química. Holos , v. 5, p. 166-175, mar. 2010.	010
6.	PETRONILO, A. B.; OLIVEIRA, D. L. de; OLIVEIRA, L. P. T. de. Dislexia nas séries iniciais do Ensino Fundamental: como facilitar o aprendizado. Holos , v. 5, p. 184-193, mar. 2010.	010
7.	BELTRÃO, R. C.; SOUZA, C. M. P.; SILVA, C. P. S. Contrato didático e suas influências na sala de aula. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 12, n. 2, p. 335-353, 2010	010
8.	COSTA, M. L. C.; LINS, A. F. Trabalho colaborativo e a utilização das tecnologias da informação e comunicação na formação do professor de Matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 12, n. 3, p. 452-479, 2010.	010
9.	VILELA, D.; MENEGHETTI, R. C. G. Transposição Didática ou práticas matemáticas específicas? O caso do número ordinal e cardinal. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 13, n. 1, p. 179-196, 2011.	011
10.	RECIO, R. A. Enseñanza para la comprensión: El caso de la escuela rural de Bolonia (Cádiz, España). Revista Iberoamericana De Educación , n. 57, p. 183-202, 2011.	011
11.	LIMA, I. M. da S. Conhecimentos e concepções de professores de matemática: análise de sequências didáticas. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 13, n. 2, p. 359-385, 2011.	011
12.	PUNHAGUI, G. C.; SOUZA, N. A. de. A autoavaliação na aprendizagem de língua inglesa: subsídio para reconhecimento da própria aprendizagem e gestão do erro. Roteiro , Joaçaba, v. 37, n. 2, p. 265-294, jul./dez. 2012.	012
13.	PEREIRA, J. E.; UEHARA, F. M. G.; NÚÑEZ, I. B. Análise pedagógica das provas discursivas de matemática e química do vestibular da UFRN. Holos , v. 3, p. 172-183, jun. 2012.	012
14.	CURY, H. N. Pesquisas em ensino de ciências e matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 14, n. 2, p. 237-256, 2012.	012
15.	BICALHO, R. N. de M.; OLIVEIRA, M. C. S. L. de. The dialogic process of knowledge construction in discussion forums. Interface: Comunicação Saúde Educação , v. 16, n. 41, p. 469-483, abr./jun. 2012.	012
16.	ASSIS, L.; PAULA, A.; BARRETO, R.; VIEGAS, G. Estudos de caso no ensino da administração: o erro construtivo libertador como caminho para	013

	inserção da pedagogia crítica. Revista de Administração Mackenzie , São Paulo, v. 14, n. 5, p. 44-73, set./out. 2013.	
17.	LIMA, M. F. Formação dos professores para o uso das mídias: uma proposta de ação, reflexão e transformação. Holos , v. 3, p. 100-110, 2013.	013
18.	SANTOS-WAGNER, V. M. P.; BORTOLOTTI, R. D'A. M.; FERREIRA, J. R. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.	013
19.	CURY, H. N. Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 15, n. 3, p. 547-562, 2013.	013
20.	SILVEIRA, M. R. A. da. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 16, n. 1, p. 47-73, 2014.	014
21.	CARVALHO, S. F.; SCHERER, S. Integração da lousa digital em aulas de matemática: análise da prática pedagógica de uma professora. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 16, n. 2, P. 577-597, jun. 2014.	014
22.	REIS, L. A. C.; ALLEVATO, N. S. G. Trigonometria no triângulo retângulo: as interações em sala de aula sob a ótica da teoria das situações didáticas. Holos , v. 1, p. 253-279, fev. 2015.	015
23.	Lopez RAMOS, A. L.; GUERRERO, Y. N.; RODRÍGUEZ-MONROY, Carlos. Desempeño, miedo al error y capacidad de innovación en una muestra de directivos de empresas de servicios españolas. Interciencia , v. 40, n. 4, p. 224-232, 2015.	015
24.	GALVÃO, E.; SOUZA, N. O compromisso formativo na avaliação da aprendizagem em química. Roteiro , v. 41, n. 2, p. 379-406, mai./ago. 2016.	016
25.	BIGGIO, M.; GARCÍA, S.; VAZQUEZ, S. El rol de las creencias de aprendizaje auto-regulado y su relación con el aprendizaje del dibujo. Estudios pedagógicos , v. 42, n. 1, p. 177-185, 2016.	016
26.	SILVA, A. G.; SALVI, R.; PASSOS, M. M. Concepções do erro matemático em 36 anos de publicações em revistas de educação matemática no Brasil. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 18, n. 2, p. 843-870, set. 2016.	016
27.	DAVIS, C. L. F.; NUNES, M. M. R. Eu sei o que tenho que fazer: a conquista da autorregulação. Estudos em Avaliação Educacional , São Paulo, v. 27, n. 64, p. 10-35, mai. 2016.	016
28.	COSTA, Dailson Evangelista; MORAES, Mônica Suelen Ferreira de; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Um estudo sobre problemas de tradução relativos às propriedades de limites de função real de uma variável real. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 18, n. 1, p. 203-216, abr. 2016.	016
29.	SANTOS, J. R. V.; LINS, R. C. Uma Discussão a Respeito da(s) Matemática(s) na Formação Inicial de Professores de Matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 18, n. 1, p. 351-372, abr. 2016.	016
30.	BIANCHINI, L. G. B.; VASCONCELOS, M. S. Sentir, Significar e Construir Conhecimento com Base nos Erros. Educação & Realidade , Porto Alegre, v. 42, n. 3, p. 1035-1057, jul./set. 2017.	017
31.	VANDRESEN, D. S.; GELAMO, R. P. O ensino de filosofia e a criação dos modos de vida. Nômadias , Bogotá, n. 46, p. 47-63, 2017 .	017
32.	ROCHA, F. S. M da et al. Uma análise de projetos criados no Scratch com base em critérios construtivistas e ergonômicos. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 21, n. 2, p. 422-440, set. 2019.	019
33.	AVALOS-ROGEL, A. As ajudas como estratégias de professores em duas	

	tradições do ensino de matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 21, n. 5, p. 709-719, nov. 2019.	019
34.	BRITO, C. E.; FARIAS, L. M. S. Erros e obstáculos em torno dos objetos ostensivos de taxas de variação: autoanálises dos discentes da engenharia civil do IFBA – Eunápolis. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 21, n. 5, p. 485-497, nov. 2019.	019
35.	MENEGHELLI, J.; POSSAMAI, J. P. Resolução de Problemas e o software GeoGebra: um caminho para a compreensão das funções seno e cosseno. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 21, n. 2, p. 491-512, set. 2019.	019

Fonte: Os autores.

ⁱ formative assessment, does not yet represent a well-defined set of artefacts or practices.

ⁱⁱ formative assessment is not simply the elicitation of evidence but also includes making inferences from that evidence.

ⁱⁱⁱ This assessment is closely linked to the education, and all aspects of it reveal this educational orientation. This means that the purpose of the assessment as well as the content, the methods applied and the instruments used are all of a didactical nature.

^{iv} Assessment within RME is primarily assessment on behalf of education.

^v should cover all topics of the subject matter and should include problems on each level: from basic skills to higher-order reasoning.

^{vi} Los problemas del nivel 3 son más difíciles de resolver y llevan más tiempo que aquellos en los que se evalúan habilidades básicas.

^{vii} Only if we offer that wide variety do we have a chance at “fair” classroom assessment.

^{viii} makes sense to the students and makes them feel comfortable to start thinking because it relates to their prior knowledge. It may be related to every-day (real) life, but that is not necessary.

^{ix} From the point of view of the student, the problems must therefore be accessible, inviting, and worthwhile solving.

^x The education is designed to dovetail as closely as possible with the students’ informal knowledge, and therefore help them to achieve a higher level of understanding through guided re-invention. In order to support this process of guided re-invention, the assessment problems must provide the teacher with a maximum of information on the students’ knowledge, insight and skills, including their strategies.

^{xi} History of mathematics has been a learning process of progressive schematising. Youngsters need not repeat the history of mankind but they should not be expected either to start at the very point where the preceding generation stopped. In a sense youngsters should repeat history though not the one that actually took place but the one that would have taken place if our ancestors had known what we are fortunate enough to know.

^{xii} The learner shall invent something that is new to him but well-known to the guide.

^{xiii} Mathematics has arisen and arises through mathematizing.

^{xiv} Mathematization, as it is being dealt with here, is organizing reality using mathematical ideas and concepts.

^{xv} There are no vaccines against mathematical errors. On the contrary, and in particular if mathematics is to be reinvented under guidance, errors are unavoidable or even welcome provided they are used to stimulate resistance against their own consolidation and recurrence.

^{xvi} Right or wrong is not enough.

^{xvii} Such a limitation would do an injustice to the richness of the answers and to the different aspects that are distinguishable in a result. One can better speak of the ‘reasonableness’ of a given answer, rather than of its correctness. In a sense, this implies putting oneself in the students’ shoes and asking oneself what they might have meant by their answer, or what their reasoning might have been.

^{xviii} This does not mean, however, that ‘knowing what they do not know’ has become unimportant.

^{xix} A summary of the reasons to use context problems:

- To introduce a new subject or a new concept in mathematics. By using examples within a context, the mathematical content involved becomes clear.

- To practice a new concept or procedure. By doing many different context problems with the same mathematical content the students learn how to use and apply this content.
- To show the power of mathematics. By understanding that different context problems are based on the same mathematical content.
- To show a student masters the mathematical content. By using an unfamiliar context in a test that is based on the same mathematical content that was used during previous lessons.
- To get students involved in the problem. By using real life problems students can show they are mathematical literate and know how mathematics is used to solve practical problems showing up in real life situations.

^{xx} Generally, a formal presentation of mathematics is rather inaccessible for novice learners.

^{xxi} Queremos que nuestros alumnos sean matemáticamente alfabetizados, lo que significa que no sólo estamos interesados en la matemática a determinado nivel de comprensión sino también en usar la matemática en un rango extenso de situaciones.

^{xxii} · The natural process (being led by questions, problems, curiosity ...) of arriving at the mathematics is not shown. Meaning and motivation is taken away from the learner. · Intuition that leads to the theory is remote from the learning process. · It is not clear what is solved, modelled or captured by the system (and what is not). · Heuristics that were needed to organise the mathematics in that way are neglected. · The presentation can be too dense or sparse. An aspect of the mathematics may be very difficult to grasp but only be given little emphasis in a formal presentation.

^{xxiii} Throughout the school year, the teacher will constantly evaluate the students' individual progress and the progress of the whole classroom within the learning trajectory and thus evaluate the intended learning goals as benchmarks. This ongoing and continuous process of formative assessment, coupled with the teachers' so-called intuitive feel for students' progress, completes the picture of the learning trajectory that the teacher builds.

^{xxiv} A learning-teaching trajectory describes the learning process the students follow.

^{xxv} - a learning trajectory that gives a general overview of the learning process of the students - a teaching trajectory, consisting of didactical indications that describe how the teaching can most effectively link up with and stimulate the learning process - a subject matter outline, indicating which of the core elements of the mathematics curriculum should be taught.

^{xxvi} Having an overview of the process the students go through is very important for working on progress in students' understanding.

^{xxvii} El obstáculo consiste en actuar y reflexionar con los medios de los que se dispone, mientras que el aprendizaje consiste en construir medios mejor adaptados a la situación.

^{xxviii} Si alguien nos lo enseña, podríamos evitar errar por un tiempo, pero sabemos que en cuanto nos dejen solos tendremos que asumir el papel del que hasta ahora nos guiaba.

^{xxix} capacidad de considerar verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas.

^{xxx} Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.

^{xxxi} Si bien el error puede tener procedencias diferentes, generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos.

^{xxxii} Es de destacar que los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente, y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente. También se debe tener en cuenta que las oportunidades de los estudiantes para aprender Matemática dependen del entorno y del tipo de tareas y discurso en que participan, dependiendo lo que aprenden de cómo se implican en las actividades matemáticas, lo que marca, a su vez, las actitudes que tienen hacia esta ciencia.

^{xxxiii} ya que permite la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento.

^{xxxiv} student errors are seen as an inevitable and integral part of learning and a valuable source of information about the learning process, a clue that researchers and teachers should take advantage of for uncovering what a student really knows and how he or she has constructed such knowledge.

^{xxxv} Interminables y agotadoras correcciones, sin pensar que vayan a ser eficaces, y sin creer que los alumnos van a tenerlas en cuenta, y aun así, se sigue perseverando.

^{xxxvi} los enseñantes eviten en lo posible cruzarse con el error en su camino.

^{xxxvii}

- Los errores surgen en la clase por lo general de una manera espontánea. Sorprenden al profesor, aunque pueden gestarse desde mucho antes.

- Son persistentes y particulares de cada individuo. Son difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Hay un predominio de los errores *sistemáticos* con respecto a los errores *por azar u ocasionales*. Los errores sistemáticos revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada.
- Los alumnos en el momento no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.
- Los errores sistemáticos son en general el resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el profesor.
- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor. Los alumnos, por ejemplo, recrean o inventan su propio método em base al método descrito por el profesor.

^{xxxviii} - Uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos, - Utilización de reglas poco trascendentes como requisitos indispensables en la ejecución de cálculos aritméticos o resolución de ecuaciones,- Desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas, - Abordaje de contenidos completamente descontextualizados y poco articulados con los restantes, - Escasa importancia otorgada al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas, - Abuso de prototipos visuales que inhiben la formación de imágenes conceptuales, -Tratamientos de problemas demasiado centrados en lo numérico.

^{xxxix} los contenidos de cada unidad didáctica se deberían adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos.

^{xi} TIPOLOGÍA DE LOS ERRORES Naturaleza del diagnóstico Mediaciones y Remedio 1. Errores debido a la redacción y comprensión de las instrucciones. • Análisis de la legibilidad de los textos escolares. • Trabajo sobre la comprensión, la selección y la formulación de las instrucciones 2. Errores resultados de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas. • Análisis del modelo y de los hábitos didácticos en vigor. • Trabajo crítico sobre las expectativas. 3. Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos. • Análisis de las representaciones y de los obstáculos subyacentes al concepto estudiado. • Trabajo de escucha, de toma de conciencia por los alumnos y de debate científico en el seno de la clase. 4. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas. • Análisis de las diferencias entre ejercicios que parecen cercanos, pero que ponen en marcha capacidades lógicomatemáticas distintas. • Selección más estricta de las actividades y análisis de los errores en ese marco. 5. errores en los procesos adoptados • análisis de la diversidad de procesos “espontáneos”, distanciados de la estrategia “modelo” que se esperaba. • Trabajo sobre las diferentes estrategias propuestas para favorecer la evolución individual 6. errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad. • Análisis de la carga mental de la actividad. • Descomposición en subtareas con unas dimensiones cognitivas que puedan se gestionadas. 7. errores que tiene su origen en otra disciplina • análisis de los rasgos estructurales comunes y de los rasgos superficiales diferentes en las dos disciplinas. • Trabajo de investigación de los elementos invariables de las situaciones. 8. errores causados por la complejidad propia del contenido • análisis didáctico de los nudos de dificultad intrínsecos a los conceptos, analizados insuficientemente.

^{xii} Existe un “saber del error”, como explican Jean-Pierre Jaffré y otros, al decir que se deben orientar y guiar los inventos de los alumnos antes que subrayar inútilmente lo incompleto de sus conocimientos.

^{xiii} Capitalizing on errors in mathematics instruction.

^{xliii} Remediation stance, discover stance and Inquiry stance.

^{xliv} A Taxonomy of Uses of Errors as Springboards for Inquiry Level of Math Discourse Stance of Learning Performing a Specific Math Task Understanding Some Technical Math Content Understanding the Nature of Mathematics **Remediation** Analysis of recognized errors to understand what went wrong and correct it, so as to perform the set task successfully.

(Rernediation/task)

Analysis of recognized errors to clarify misunderstanding of techmeal mathematical content.

(Remediation/content)

Analysis of recognized errors to clarify misunderstandings regarding the nature of mathematics or general mathematical issues.

(Remediation/math)

Discovery

Errors and uncertain results are used constructively in the process of solving a novel problem or task; monitoring one's work to identify potential mistakes.

(Discovery/task)

Errors and uncertain results are used constructively as one learns about a new concept, rule, topic, etc.

(Discovery/content)

Errors and uncertain results are used constructively as one learns about the nature of mathematics or some general mathematical issues.

(Discovery/math)

Inquiry

Errors and puzzling results motivate questions that may generate inquiry in new directions and new mathematical tasks to be performed. (inquiry/task)

Errors and puzzling results motivate questions that may lead to new perspectives and insights on a concept, rule, topic, etc., not addressed in the original lesson plan. (Inquiry/content)

Errors and puzzling results motivate questions that may lead to unexpected perspectives and insights on the nature of mathematics or some general mathematics issues. (Inquiry/math)

xiv

- *Enabling the students to better understand the nature of mathematics as a discipline.* Several error activities provided Katya and Mary with a concrete and accessible means to address abstract metamathematical issues such as the nature of mathematical definitions, and in addition the students were made more aware of the role of uncertainty, limitations, and personal judgment in mathematics as a result of discussing some "borderline" cases of mathematical error.

- *Facilitating the learning of significant mathematical content.* This was often achieved as a result of the reflections and explorations developed in specific error activities by taking advantage of the potential of errors to create cognitive conflict (as exemplified in the cases of the concepts of circle, polygon, and exponentiation).

- *Making the students more proficient in "doing" mathematics.* Katya and Mary's problem-posing, problem-solving, communication, and reasoning skills improved as a result of their meaningful practice in the context of specific error activities, and the two students became more independent mathematical learners as a result of learning to monitor and analyze their own errors.

Making the students more confident in their ability to learn and use mathematics. This was achieved especially as a result of developing a more healthy attitude about making mistakes and of perceiving mathematics as more accessible to them, and showed concretely in the students' attitudes and behaviors toward the end of the experience.

^{xv} Si el error es descubierto como consecuencia de una interacción o debate entre profesor y alumno, promoverá la superación, puesto que los estudiantes pueden modificar sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra que es mejor.

^{xlvii} Are there other cases when in mathematics something can be right and wrong at the same time? How could that be? How can we decide whether a given rule is right or wrong in mathematics? Will it always be possible to do so? Can the same symbol be used in mathematics to mean different things? If so, why?

^{xlviii} A view of *mathematics* as a humanistic discipline; that is, the belief that mathematical knowledge is socially constructed and fallible as well as shaped by cultural and personal values; A view of *knowledge* more generally as constructed through a process of inquiry where uncertainty, conflict and doubt provide the motivation for the continuous search for a more and more refined understanding of the world; A view of *learning* as a generative process of meaning making, requiring both social interaction and personal construction, and informed by context and purposes. A view of *teaching* as stimulating and supporting the students' own inquiry and establishing a learning environment conducive to such inquiry; A view of *teaching* as stimulating and supporting the students' own inquiry and establishing a learning environment conducive to such inquiry.

^{xlix} such as "what would happen if we accepted this result?" or "in what circumstances could this result be considered correct?"

ⁱ errors are unavoidable or even welcome.

ⁱⁱ levels of mathematization are connected to the various levels of understanding through which students can pass.

ⁱⁱⁱ Traditionally, mathematics is taught as a ready made subject. Students are given definitions, rules and algorithms, according to which they are expected to proceed. Only a small minority learn mathematics in this way. If you ask mathematicians how they read papers, most of them will answer that they try to reinvent their contents. I believe the young learner may claim the same privilege

^{liii} Los alumnos deben comprender claramente los parámetros usados para evaluar su trabajo.

^{liv} errors are unavoidable or even welcome.

-
- lv Solamente verificar los errores en una prueba puede ser una forma rápida para lograr el trabajo corregido, pero no siempre esto da crédito de lo que el alumno hizo.
- lvi Presentar las diferentes respuestas de los alumnos sobre un problema particular puede servir como punto de partida para una discusión en la clase.
- lvii Ningún alumno debería sentirse expuesto frente a la clase.
- lviii Analysis of students' responses to free-response items can provide valuable insights into the nature of student knowledge and understanding and in that sense help us formulate quality feedback.
- lix In mathematics truth is socially negotiated, as it is in science.
- lx In a view of mathematics education where mathematics is seen as a human activity that can best be learned by doing, a passive assessment in which the students merely choose or reproduce an answer will no longer suffice.
- lxi context problems can function as anchoring points for the reinvention of mathematics by the students.
- lxii In this view, self-assessment is a sine qua non for effective learning.
- lxiii Learners should be allowed to find their own levels and explore the paths leading there with as much and as little guidance as each particular case requires.
- lxiv errors are unavoidable or even welcome.
- lxv a valuable source of information about the learning process, a clue that researchers and teachers should take advantage of for uncovering what a student really knows and how he or she has constructed such knowledge.
- lxvi The widely recognized trend towards didactical assessment is closely related to the fact that the basis for mathematics education reform consists, to a great extent, of constructivistic ideas on learning. As is the case in RME, this involves regarding the students as active participants in the educational process, who construct their mathematical knowledge themselves. And this, in turn, has significant consequences for assessment.
- lxvii Y un buen día, de repente, se sienten con fuerzas para intentar utilizar nuevas estructuras. Seguro que ese día, no teniendo integrados del todo las sutilezas y los casos particulares, se equivocarán en la construcción de tal o cual frase. Aun así seguirá siendo una señal de progreso.
- lxviii Cómo los alumnos están progresando en su conocimiento y habilidades en los diferentes niveles de competencia. - Qué evidencia puede recolectarse sobre su dominio sobre la matemática que ha sido enseñada durante el año escolar - Cómo trabajan los alumnos junto con sus compañeros y son capaces de expresar sus opiniones y usar su razonamiento matemático para apoyar estas opiniones. - La forma en que los alumnos presentan su trabajo: prolijo y acompañado de explicaciones correctas y no demasiado elaboradas o descuidado y desprolijo sin explicaciones comprensibles - El modo en que los alumnos participan en las discusiones de la clase y son capaces de involucrarse en resolver un problema.
- lxix Lo que importa es asegurarse de utilizar formatos diferentes y no pegarse a un solo formato para todas las pruebas de evaluación.
- lxx In order to support this process of guided re-invention, the assessment problems must provide the teacher with a maximum of information on the students' knowl- Chapter 3 90 edge, insight and skills, including their strategies. For this to succeed, the problems must again be accessible to the students.
- lxxi which means that the problems must be of a kind that can be solved in different ways and on different levels.
- lxxii Pregunte regularmente a sus alumnos: "¿Cómo obtuviste esa respuesta?" o "¿Por qué pensás eso?"