



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

IDELMAR ANDRÉ ZANELLA

GEOMETRIA ESFÉRICA:
UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM APLICAÇÕES

IDELMAR ANDRÉ ZANELLA

GEOMETRIA ESFÉRICA:
UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ana Lúcia da Silva

Londrina
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Z28g Zanella, Idelmar André.
Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações / Idelmar
André Zanella. – Londrina, 2013.
129 f. : il.

Orientador: Ana Lúcia da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de
Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2013.
Inclui bibliografia.

1. Geometria – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino. –
Teses. 3. Geometria não euclidiana – Teses. 4. Geometria hiperbólica – Teses. 5.
Coordenadas geográficas – Teses. I. Silva, Ana Lúcia da. II. Universidade Estadual de
Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

IDELMAR ANDRÉ ZANELLA

GEOMETRIA ESFÉRICA:
UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. orientadora Dr^a. Ana Lúcia da Silva
UEL – Londrina – PR

Prof^a Dr^a Lilian Akemi Kato
UEM – Maringá – PR

Prof^a. Dr^a. Sandra Malta Barbosa
UEL – Londrina – PR

Londrina, 12 de março de 2013.

*À minha esposa Marli pela sua
compreensão e incentivo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me oportunizar a vida.

Agradeço aos meus pais, Maria Celestina Zanella e Fiorelo José Zanella, pelo carinho e educação que recebi.

Agradeço aos meus irmãos pelo apoio nesta etapa de estudos.

Agradeço à Professora Doutora Ana Lúcia da Silva que me orientou e auxiliou no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço às professoras Lilian Akemi Kato e Sandra Malta Barbosa com suas valiosas contribuições na banca examinadora.

Agradeço ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, à Universidade Estadual de Londrina – UEL e aos professores pela formação acadêmica.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo auxílio financeiro.

Agradeço aos colegas e amigos que fiz na turma PROFMAT 2011 pela troca de experiências e aprendizado.

*“Nenhuma Geometria é mais correta do
que qualquer outra – apenas é mais
conveniente”.*

Henri Poincaré

ZANELLA, Idelmar André. **Geometria esférica**: uma proposta de atividades com aplicações. 2013. p. 129. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo propor diversas atividades acerca da Geometria Esférica buscando instigar professores de Matemática e alunos da Educação Básica, em particular do Ensino Médio, a trabalharem em sala de aula com esta Geometria, visando a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. A priori, para atender o objetivo, realizou-se uma pesquisa bibliográfica, de cunho histórico, com o intuito de compreender como o quinto postulado de Euclides alavancou o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas no século XIX pelos estudos de Gauss, Bolyai, Lobacheswsky e Riemann. Neste sentido, uma cronologia é apresentada com os principais resultados matemáticos e sujeitos que contribuíram diretamente ou indiretamente para tal descoberta. Os elementos da Geometria Esférica também são apresentados por meio de definições e teoremas com o intuito de compará-la com a Geometria Euclidiana. Outra questão trabalhada é a relação entre coordenadas cartesianas e geográficas. E, finalmente, abordam-se algumas aplicações da Geometria Esférica no contexto da navegação sobre a superfície da Terra, mostrando como se calcula a distância entre dois pontos distintos na superfície esférica, em particular a terrestre e, como o Sistema de Posicionamento Global – GPS localiza um ponto na superfície da Terra. Destaca-se também, que ao longo do trabalho há vários exemplos resolvidos, seguidos por atividades propostas.

Palavras-Chave: Geometrias não-euclidianas. Geometria Esférica. Aplicações da geometria esférica.

ZANELLA, Idelmar André. Spherical Geometry: A Proposed Activities with Applications. 2013. p. 129. Dissertation (Professional Masters in Mathematics in National Network) - State University of Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This term paper has as its aim to propose activities regarding Spherical Geometry, trying to motivate Math teachers and students from basic education, especially the ones from high school, to work in the classroom with this kind of geometry for the improvement of Math teaching and learning processes. From cause to effect, in order to reach these aims, a bibliographical research was performed under a historical approach intending to understand how Euclid's fifth postulate helped the development of non-Euclidean geometries in the 19th century through Gauss, Bolyai, Lobacheswky and Rienann's studies. In this sense, a chronology is presented with the main mathematical results and people who contributed directly or indirectly for such discovery. The elements of the Spherical Geometry were also presented by means of definitions and theorems with the intention of comparing it with the Euclidean Geometry. Another question reflected upon was the relation between the Cartesian and geographical coordinates. And, finally, some applications for the Spherical Geometry in the context of navigation over the Earth surface are approached, showing how distance between two distinct points is calculated on a spherical surface, particularly on Earth and how can the Global Positioning System - GPS – locate a point on Earth surface. Another highlight is that along the paper there are many solved examples followed by proposed activities.

Keywords: Non-Euclidean geometries. Spherical geometry. Applications of the spherical geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Euclides de Alexandria	18
Figura 2 – Ptolomeu I	19
Figura 3 – Representação geométrica para o quinto postulado	21
Figura 4 – Playfair	22
Figura 5 – Representação geométrica para provar o axioma de Playfair.....	23
Figura 6 – Existência da paralela	24
Figura 7 – As retas e se intersectam	24
Figura 8 – Provando o quinto postulado a partir dos quatro primeiros mais o axioma de Playfair	25
Figura 9 – Representação geométrica do axioma de Playfair	25
Figura 10 – Argumento de Ptolomeu I.....	27
Figura 11 – Proclus	27
Figura 12 – Raciocínio de Proclus.....	28
Figura 13 – Nasîr ed-dîn	29
Figura 14 – Quadrilátero de Nasîr ed-dîn.....	29
Figura 15 – John Wallis.....	30
Figura 16 – Quadrilátero de Saccheri.....	31
Figura 17 – Comportamento das retas paralelas quando se nega o quinto postulado.....	31
Figura 18 – Lambert	32
Figura 19 – Quadrilátero de Lambert	33
Figura 20 – Legendre	33
Figura 21 – O fato de por todo ponto P no interior do ângulo \widehat{ABC} passar uma reta que intersecta as retas e é equivalente ao quinto postulado.....	34
Figura 22 – Gauss.....	35
Figura 23 – Janos Bolyai	37
Figura 24 – Representação geométrica para H_1	
Figura 25 – Representação geométrica para H_2	
Figura 26 – Lobachewsky	39
Figura 27 – Riemann.....	40
Figura 28 – Esfera de centro O e raio r	43

Figura 29 – Superfície esférica de centro O e raio r	43
Figura 30 – Cordas AB , CD e EF	44
Figura 31 – Diâmetros AB e CD , cuja medida vale $2r$	45
Figura 32 – Interseção da superfície esférica S com um plano Ω passando pelo seu centro O	46
Figura 33 – Elementos notáveis da superfície esférica	47
Figura 34 – O plano Ω divide a superfície esférica S em duas regiões chamadas de calota esférica.....	47
Figura 35 – Zona esférica: parte amarela	48
Figura 36 – Ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas	48
Figura 37 – Fuso esférico ou biângulo esférico cujo ângulo mede α	49
Figura 38 – Fuso esférico completo, isto é, duplo. φ' é o fuso antípoda de φ	49
Figura 39 – Distância entre a Terra e o astronauta	51
Figura 40 – Triângulo esférico ABC e seu antípoda $A' B' C'$	55
Figura 41 – A região hachurada (parte colorida) $R = t U s$ é a parte de um fuso completo a qual pertence a um hemisfério H arbitrário. A área da região R é igual a $2\alpha r^2$	55
Figura 42 – Triângulos esféricos t e t' , com os três vértices coincidindo.....	56
Figura 43 – Triângulos esféricos t e t' coincidindo um ângulo de t com outro ângulo igual de t'	57
Figura 44 – O Ponto P está no interior do triângulo esférico ABC	58
Figura 45 – O Ponto P está no exterior do triângulo esférico ABC	58
Figura 46 – Hemisfério H , triângulo esférico e a região R_α	59
Figura 47 – Triângulo esférico ABC cobrindo quase todo o hemisfério H	61
Figura 48 – Triângulo trirretângulo	61
Figura 49 – AB e CD – menor arco de circunferência máxima	66
Figura 50 – Sistema $OXYZ$	74
Figura 51 – Superfície esférica com centro na origem do sistema $OXYZ$	75
Figura 52 – Globo terrestre cujo centro é a origem do sistema $OXYZ$	79
Figura 53 – Linhas de latitude e longitude.....	80
Figura 54 – Menor distância entre Porto Príncipe e Manila.....	87
Figura 55 – Montecarmelo (A) e Butler Manor Woods (B)	88
Figura 56 – Distância entre Butler Manor Woods e Montecarmelo	88
Figura 57 – Relação entre o arco de paralelo PQ e o arco AB do Equador.....	89

Figura 58 – Demonstração da fórmula fundamental – parte espacial	93
Figura 59 – Demonstração da fórmula fundamental – parte planificada	94
Figura 60 – Distância entre Kingston e Bristol	96
Figura 61 – Triângulo esférico com um vértice no polo norte.....	97
Figura 62 – Rio de Janeiro – Madrid e Curitiba – Washington	99
Figura 63 – Ortodromia e Loxodromia.....	101
Figura 64 – A curva loxodrômica corta os meridianos com ângulo constante.....	102
Figura 65 – Disparo de um míssil.....	102
Figura 66 – Distribuição orbital dos satélites	103
Figura 67 – Receptores GPS recebendo sinais de 4 satélites	105
Figura 68 – Intersecção de 4 superfícies esféricas	106
Figura 69 – Paralelepípedo: os pontos <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> e <i>D</i> são não coplanares.....	108
Figura 70 – Posição da aeronave (balão vermelho).....	117
Figura 71 – Distância entre os pontos <i>P</i> e <i>Q</i>	127
Figura 72 – Demonstração da Lei dos senos para triângulos esféricos	128
Figura 73 – Quatro triângulos planos retângulos	129

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1.1 – Exemplos de diferentes superfícies	44
Quadro 2.1.2 – Geometria Euclidiana x Geometria Esférica	67
Quadro 2.1.2.1 – Polígono de menor número de lados na Geometria Euclidiana e Esférica	68
Quadro 2.1.2.2 – Uma reta e uma circunferência máxima sendo separadas por dois pontos distintos	68
Quadro 2.1.2.3 – Medindo ângulos de triângulos planos e esféricos	68
Quadro 2.1.2.4 – Posição relativa de duas retas no plano e duas circunferências máximas na superfície esférica	69
Quadro 2.1.2.5 – Número de regiões do plano e da superfície esférica.....	69
Quadro 2.1.2.6 – Ângulos retos em triângulos planos e esféricos.....	70
Quadro 2.1.2.7 – Conceito de distância na Geometria Euclidiana e Esférica.....	70
Quadro 2.1.2.8 – Quantidade de pontos da intersecção	71
Quadro 2.1.2.9 – Número de ângulos retos.....	71
Quadro 2.1.2.10 – Uma única reta passando por dois pontos distintos e infinitas circunferências máximas passando por dois pontos antípodas	72
Quadro 2.1.2.11 – Número de retas e circunferências máximas paralelas	72

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

PROFMAT: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

DCE: Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná

GPS: Sistema de Posicionamento Global

U: União

\cap : Interseção

\in : Pertence

$<$: Menor do que

\leq : Menor do que ou igual a

$>$: Maior do que

AB : Segmento de reta com extremidades nos pontos A e B

\overline{AB} : Comprimento do segmento AB

\overrightarrow{AB} : Semirreta com origem no ponto A e que passa pelo ponto B

\overleftrightarrow{AB} : Reta que passa pelos pontos A e B

R_{ab} : Figura (região) do plano formada pelos ângulos de medidas a e b

\equiv : Congruência

\perp : Perpendicular

\mathbb{R} : Conjunto dos Números Reais

\emptyset : Conjunto Vazio

H_1, H_2 : Hipóteses 1 e 2

$d(O, P)$: Distância entre os pontos O e P

Ω, Π : Planos Ômega e Pi respectivamente

LAL : Lado – Ângulo – Lado (um dos casos de congruência de triângulos)

AA : Ângulo – Ângulo (um dos casos de semelhança de triângulos)

\mathcal{C}_{ABC} : Uma circunferência que não é máxima e passa pelos pontos A , B e C da superfície esférica

φ : Latitude em graus

θ : Longitude em graus

$med(arco AB)$: medida do arco de circunferência com extremidades nos pontos A e B

$med(CQ)$: Medida do segmento CQ

$\Delta\varphi, \Delta\theta$: Variação de Latitude e Longitude respectivamente

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO I – A DESCOBERTA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	17
1.1 – O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES – O POSTULADO DAS PARALELAS	17
1.2 – ALGUMAS TENTATIVAS FRUSTRADAS DE DEMONSTRAR O POSTULADO DAS PARALELAS.....	26
1.3 – GAUSS	34
1.4 – JANOS BOLYAI	36
1.5 – LOBACHEWSKY	38
1.6 – RIEMANN	40
CAPÍTULO II – GEOMETRIA ESFÉRICA: UMA INTRODUÇÃO	43
2.1 – ELEMENTOS DA GEOMETRIA ESFÉRICA	43
2.2 – COORDENADAS CARTESIANAS.....	73
2.3 – COORDENADAS GEOGRÁFICAS	78
2.4 – RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS E GEOGRÁFICAS	81
CAPÍTULO III – APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ESFÉRICA	87
3.1 – NAVEGANDO SOBRE A SUPERFÍCIE TERRESTRE.....	87
3.2 – RELAÇÃO ENTRE UM ARCO DE PARALELO E SEU CORRESPONDENTE NO EQUADOR	89
3.3 – FÓRMULA FUNDAMENTAL PARA TRIÂNGULOS ESFÉRICOS	93
3.4 – GPS: UMA APLICAÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA	103
3.5 – FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA PARA O FUNCIONAMENTO DO GPS	107
3.6 – UMA APLICAÇÃO DO USO DO GPS	112
CAPÍTULO IV – CONSIDERAÇÕES	119
REFERÊNCIAS	123
APÊNDICE	127

INTRODUÇÃO

No que tange aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, muitos questionamentos estão presentes entre os professores, tais como a escolha das metodologias, as estratégias de ensino e os recursos didáticos. Isso ocorre com os mais diversos assuntos desta disciplina, e não deixariam de existir no que diz respeito à inserção das geometrias não-euclidianas na Educação Básica.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE (PARANÁ, 2008) da Rede Pública Estadual recomendam para o Ensino Fundamental e Médio os conteúdos estruturantes: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação.

Entende-se por conteúdos estruturantes àqueles conhecimentos que identificam e organizam os campos de estudo da disciplina de Matemática, considerados fundamentais para a compreensão desta (PARANÁ, 2008).

Para o estudo do conteúdo estruturante Geometrias, as DCE (PARANÁ, 2008) nos sugerem que este deve se desdobrar no estudo dos tópicos de Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e noções básicas de geometrias não-euclidianas.

Especificamente para o Ensino Médio, dentro do conteúdo estruturante Geometrias, as DCE orientam que a compreensão das noções de geometria não-euclidiana deve possibilitar que o educando:

[...] Perceba a necessidade das geometrias não-euclidianas para a compreensão dos conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; Compreenda a necessidade das geometrias não-euclidianas para o avanço das teorias científicas; Articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa; Conheça os conceitos básicos da Geometria Elíptica, Hiperbólica e Fractal (Geometria da superfície esférica) (PARANÁ, 2008, p.81).

Entretanto, a minha atuação como docente, na Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná, nos Ensinos Fundamental e Médio, permite aferir que a Geometria Euclidiana é praticamente a única Geometria trabalhada pelos professores em sala de aula. Um dos fatores que pode estar atrelado à resistência de não se trabalhar as geometrias não-euclidianas em sala de aula está radicado na formação inicial da maioria dos professores de Matemática, pois, geralmente, nos cursos de Licenciatura de Matemática são abordados apenas tópicos de Geometria Euclidiana.

Neste sentido, uma preocupação que tivemos foi proporcionar aos professores de Matemática uma discussão acerca da inserção das geometrias não-euclidianas na Educação Básica, visto as recomendações das DCE.

Embora este conteúdo seja sugerido pelas DCE, notamos que ele ainda não é contemplado pelos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, um dos principais apoios didáticos para o professor. De acordo com Lima (2001), um estudo detalhado com doze coleções de livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio no Brasil, verificou-se que é dado tratamento à Geometria Plana e Espacial e à Geometria Analítica. Porém, não há evidências do tratamento às geometrias não-euclidianas, em específico, à Geometria Esférica, o que justifica a escolha deste tema.

Neste sentido, este trabalho teve por objetivo propor atividades acerca da Geometria Esférica, buscando instigar professores de Matemática e alunos da Educação Básica, em particular do Ensino Médio, a trabalharem em sala de aula com esta Geometria.

Destacamos que as atividades propostas neste trabalho foram elaboradas de forma a estarem atreladas com o contexto histórico da evolução da geometria, bem como, com a construção dos conceitos iniciais da Geometria Esférica, essenciais para sua compreensão, até chegar a aplicações mais avançadas, como calcular uma distância na Geometria Esférica e a fundamentação matemática para o funcionamento do GPS.

Para a realização deste trabalho, salientamos que a Comissão Acadêmica Nacional do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT sugeriu duas modalidades para a sua elaboração, as quais estão especificadas a seguir:

- Modalidade 1: Elaboração de proposta de atividades educacionais;
- Modalidade 2: Aplicação de atividades em sala de aula e avaliação de resultados.

Assim, para este trabalho, optamos pela Modalidade 1, em que propomos atividades sobre a Geometria Esférica para sua inserção no Ensino Médio.

Para atender a tal proposta, o trabalho foi estruturado em quatro capítulos.

O primeiro capítulo contemplou, por meio de fragmentos históricos, o principal motivo que fez a Geometria Euclidiana perder o *status* de ser a única e inquestionável por mais de dois mil anos. Ao longo do tempo, várias tentativas frustradas foram feitas com o objetivo de

demonstrar o quinto postulado de Euclides a partir dos outros quatro, entretanto, só no início do século XIX, com os estudos de Gauss, Bolyai e Lobacheswsky surgiu outra estrutura distinta da Geometria de Euclides, denominada por Gauss de geometria não-euclidiana, a qual conhecemos hoje por Geometria Hiperbólica.

O fato de Gauss não ter publicado seus resultados a respeito da nova geometria, creditou-se a Bolyai e Lobacheswsky a descoberta da primeira geometria não-euclidiana. Porém, foi no início da segunda metade do século XIX, que outras geometrias não-euclidianas distintas daquela criada por Bolyai e Lobachewsky foram desenvolvidas e apresentadas em virtude dos estudos de Riemann, as quais conhecemos por Geometria Esférica e Elíptica.

No segundo capítulo, realizamos uma introdução à Geometria Esférica, em que seus elementos foram apresentados por meio de definições e teoremas para auxiliar o leitor na compreensão dos conceitos envolvidos. Também, demonstramos que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior do que dois ângulos retos. Um quadro com implicações conceituais foi apresentado com objetivo de comparar a Geometria Euclidiana e a Esférica.

Ainda neste capítulo, introduzimos o sistema de três eixos ortogonais de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas geográficas – latitude, longitude e a altitude – que possibilitaram determinar a localização de qualquer ponto sobre ou fora da superfície da Terra. Fizemos também a relação entre coordenadas cartesianas e geográficas.

No capítulo três, apresentamos aplicações da Geometria Esférica, no que tange a navegação, sobre a superfície do globo terrestre. Demonstramos a fórmula fundamental para triângulos esféricos, a qual permitiu calcular a distância entre dois pontos distintos sobre uma superfície esférica e, em particular a superfície terrestre. Esse cálculo é diferente da maneira como se calcula na Geometria Euclidiana, pois, conhecendo apenas as latitudes e as longitudes de duas localidades calcula-se a distância entre tais localidades.

Apresentamos também, o Sistema de Posicionamento Global – GPS, uma aplicação tecnológica que envolve conceitos da Geometria Esférica. O GPS localiza um ponto sobre ou fora da superfície terrestre, indicando a sua latitude, longitude e altitude. A fundamentação Matemática para o funcionamento do GPS foi demonstrada e, uma atividade foi desenvolvida passo a passo, mostrando como um receptor GPS determina as posições geográficas de um ponto.

No quarto capítulo apresentamos nossas considerações finais a respeito dos resultados advindos da pesquisa.

CAPÍTULO I – A DESCOBERTA DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

1.1 O quinto postulado de Euclides – o postulado das paralelas

O homem é o ser do reino animal que mais evidencia sua evolução. Desde os primórdios da civilização ele buscava nos recursos naturais a sua sobrevivência, sendo ela muitas vezes garantida por frutos, sementes, raízes, caça e pesca.

Com o passar do tempo e com o aumento da população, tais recursos foram tornando-se insuficientes para a demanda populacional que já apresentava evidências de uma organização hierárquica. Isso, possivelmente levou o homem a domesticar animais e cultivar determinados alimentos, dando início assim, ao que tudo indica, à produção agrícola. Estas alternativas se tornaram cada vez mais uma “obrigação” para assegurar a sua subsistência.

Entretanto, para garantir a continuidade de tais alternativas, era preciso manter um controle do que detinha e, também, armazenar o que não era consumido. Isso gerou a necessidade de registrar suas atividades e criar locais de armazenamento do que produzia.

Segundo Eves (2004), esses fatos parecem ser os primeiros indícios da necessidade da contagem, isto é, o surgimento da Matemática na vida humana, uma das ciências mais antigas de que se têm conhecimento.

Assim, com o decorrer dos anos cada vez mais o homem se apropriava do conhecimento desta ciência e, para demarcar a divisa de suas terras e as áreas de plantio, que muitas vezes eram desfeitas pelas enchentes de rios, buscou na geometria um respaldo para esse novo desafio (EVES, 2004).

Os registros bibliográficos nos trazem informações referentes aos conhecimentos geométricos não triviais, que já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia, na Índia e, também, na Grécia (CARMO, 1987).

Entretanto, pode-se dizer que foram os gregos que difundiram tais conhecimentos geométricos para o resto do mundo, pois, segundo Carmo (1987), foi Euclides de Alexandria (c. 325-265 a. C.) o primeiro a apresentar de maneira sistemática a Matemática como ciência

dedutiva. Isso quer dizer que qualquer “afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente”.

Figura 01 – Euclides de Alexandria.



Fonte: <http://www.portalplanetasedna.com.ar/archivos_varios3/euclides.jpg> Acesso em 12/11/2012.

Sobre a vida de Euclides se tem poucos registros, exceto, que ensinou em Alexandria. Este matemático estabeleceu um rol de regras – axiomas e teoremas – que são usados até hoje. A geometria organizada por Euclides foi denominada Geometria Euclidiana. Segundo Coutinho (2001), foi a primeira teoria matemática axiomática, isto é, construída a partir de axiomas ou postulados, afirmações aceitas sem comprovação. Entretanto, quando um axioma pode ser demonstrado a partir de outros, tal axioma passa a ser um teorema. Esta geometria permaneceu por quase dois mil anos como única e absoluta e, apenas no início século XIX surgiram outras estruturas, denominadas geometrias não-euclidianas.

Segundo Silva e Martins (2006) a Matemática já era desenvolvida no Egito e na Mesopotâmia a mais de 2000 anos a.C.. Esses povos utilizavam-na para fins práticos como a agrimensura, arquitetura e astronomia e, também, para fins religiosos.

Nos documentos deixados pelos egípcios e babilônicos encontram-se as soluções de muitos problemas geométricos, como por exemplo, o cálculo da altura de uma pirâmide e a quantidade de vinho que é possível estocar em um tonel cilíndrico. Para Silva e Martins (2006), os registros históricos dos egípcios e babilônicos eram “receitas de bolo”, pois apresentavam as soluções dos problemas apenas por meio de exemplos numéricos e, não sistematizavam e/ou justificavam os resultados obtidos.

Na introdução da obra *Os Elementos* de Euclides, Bicudo (2009) evidencia que o conhecimento matemático, tanto egípcio, quanto o babilônico, era considerado verdadeiro a partir da experiência, ou seja, não era necessário demonstrá-lo.

De acordo com Bicudo, tradução de Euclides (2009), foram os gregos que assumiram uma identidade com a geometria, pois, por meio dela, puderam promover o desenvolvimento intelectual e a divulgação da cultura grega.

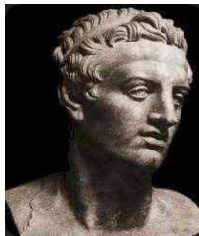
A busca dos gregos pela expansão intelectual, fez com que esta civilização fosse uma das primeiras a sistematizar as demonstrações geométricas. Para provar alguns resultados geométricos, os gregos apresentavam passos sistematizados e rigorosos.

Os registros escritos fazem referência à Thales de Mileto¹ (c.624 – c.547 a.C.) e Pitágoras de Samos (c.569 – c.480 a.C) como os primeiros matemáticos que apresentaram demonstrações com tal rigor e sistematização matemática. De acordo com Wagner (2012, p.1) “foi a partir das ideias desses dois grandes personagens que a Matemática se inicia como ciência e pode ser desenvolvida enormemente nos séculos seguintes”.

No entanto, os matemáticos gregos além de tentarem demonstrar os resultados geométricos, “procuravam sistematizar toda geometria como uma teoria unificada, em que cada resultado poderia ser provado a partir de um pequeno número de suposições básicas” (SILVA, MARTINS, 2006, p. 16).

Com base no formalismo empregado por seus predecessores, Euclides compilou e apresentou em um único texto uma obra clássica que ficou conhecida no meio científico como *Os Elementos* de Euclides, elaborada por volta do ano 300 a.C. em Alexandria – Egito, na época do primeiro Ptolomeu².

Figura 02 – Ptolomeu I.



Fonte: <<http://www.egipto.com/nefera/ptolomeo1.jpg>> Acesso em 12/11/2012.

¹ Parece ser o primeiro filósofo grego conhecido, cientista e matemático, porém, ele se ocupava com a engenharia. Proclus, o último grande filósofo grego, que viveu por volta de 450 d.C. escreveu: “[Thales] primeiro foi ao Egito e apresentou este estudo [geometria] para a Grécia”. Disponível em: <<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Thales.html>> Acesso em 08/01/2013.

² Rei egípcio (c. 367-283 a.C.) que sucedeu Alexandre, o Grande. Ele Transformou Alexandria numa cidade comercial cosmopolita dominada por uma aristocracia grega.

A obra *Os Elementos* de Euclides serviu de livro-texto para milhões de estudantes em todo o mundo. Segundo Coutinho (2001), com exceção da Bíblia, *Os Elementos*, foi a obra mais editada.

Ao longo do tempo muitos matemáticos estudaram e analisaram a obra *Os Elementos*, e consideraram que a obra de Euclides foi escrita visando apresentar a teoria dos sólidos de Platão³ e a teoria dos números irracionais de Teeteto⁴ (c.417 – 369 a.C.).

Preocupado com os detalhes e o formalismo, Euclides escreveu *Os Elementos* em treze livros. No primeiro livro, Euclides exhibe três tipos de princípios matemáticos: vinte e três (23) definições, cinco (5) postulados e nove (9) noções comuns. Outros autores como, por exemplo, Barbosa (2002) e Coutinho (2001) reescreveram as noções comuns em apenas cinco (5).

Para Bicudo, tradução de Euclides (2009, p. 82), uma definição de uma coisa ou objeto “é a expressão das suas relações com as coisas conhecidas. E, por consequência, nem todas as coisas podem ser definidas, pois que, para isso, seria necessário conhecer já as outras”.

Os conceitos que não tem definição são chamados de conceitos ou termos primitivos. No que tange a distinção entre as noções comuns e os postulados, Barbosa (2002, p. 2), afirma que “as noções comuns parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou admissíveis por qualquer pessoa inteligente, enquanto que os postulados seriam hipóteses peculiares da Geometria”. Salienta-se que as proposições admitidas sem demonstração são denominadas por axiomas ou postulados, e as demais, aquelas demonstradas, são ditas teoremas.

Para Silva e Martins (2006, p. 16), “Euclides procurou apresentar a matemática na forma dedutiva, partindo de definições e certos princípios básicos (axiomas e postulados) e construindo gradualmente, a partir deles, as provas de todos os outros conhecimentos geométricos”. A seguir têm-se as noções comuns e os postulados de acordo com Euclides (2009).

³ Um dos mais importantes filósofos gregos (c. 427-347 a. C). Ele fundou a Academia em Atenas, uma instituição dedicada à investigação e instrução na filosofia e nas ciências. Suas obras sobre filosofia, política e matemática eram muito influentes e lançou as bases para a abordagem sistemática de Euclides para a Matemática.

⁴ Foi um matemático grego que fez contribuições muito importantes para a teoria dos números irracionais.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Postulados

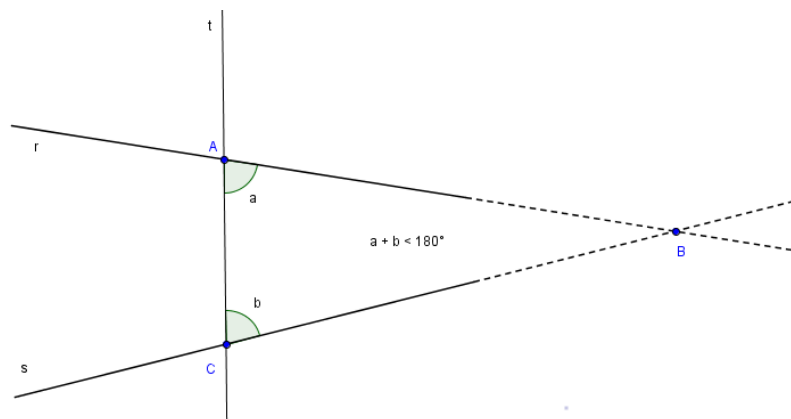
1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98-99, 2009).

Dentre os cinco postulados, pode-se notar que o último, pelo seu extenso enunciado, é aquele que mais chama atenção quando comparado com os demais. Ele merece ser evidenciado, pois, acreditava-se que como os outros, um postulado deveria ser formulado de maneira simples e direta. O quinto postulado também é conhecido como o postulado das paralelas.

Segundo Coutinho (2001), com as noções comuns e os postulados, Euclides construiu toda a geometria que se ensina na escola. O Teorema de Pitágoras é característico da Geometria Euclidiana, “Tanto assim o é, que ele surge, na maioria das vezes, ao abrirmos um livro de Matemática” (COUTINHO, 2001, p. 35).

A Figura 03 mostra uma representação geométrica para o quinto postulado.

Figura 03 – Representação geométrica para o quinto postulado.



Fonte: Autores.

Essa diferença, inclusive visual, do quinto postulado para os demais levou diversos matemáticos a questionarem a sua validade, no sentido de verificar se ele realmente era um postulado ou se era um teorema que deveria ser demonstrado com a utilização dos outros quatro postulados. Entretanto, uma consequência das tentativas de demonstração do quinto postulado foi à produção do grande número de afirmações equivalentes a ele. Tais afirmações foram denominadas de substitutos para o quinto postulado (BARBOSA, 2002).

Dizer que existe um substituto para o quinto postulado significa dizer que existe uma proposição P , de tal forma que esta proposição e os quatro primeiros postulados resultam num resultado que coincide com a Geometria Euclidiana.

Assim, para provar que uma proposição P é um substituto do quinto postulado deve-se: saber que P é uma proposição da Geometria Euclidiana, em seguida, demonstrar que, na teoria desenvolvida, usando os quatro primeiros postulados e mais ela, pode-se provar o quinto postulado como uma proposição (BARBOSA, 2002).

Uma bibliografia para se estudar os substitutos do quinto postulado é o livro: Geometria Hiperbólica de Barbosa (2002) e, segundo ela, o substituto mais conhecido e que se perpetua até os dias atuais principalmente nos livros didáticos é o axioma de Playfair⁵.

Figura 04 – Playfair.



Fonte: <<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/PictDisplay/Playfair.html>> Acesso em 08/01/2013.

Axioma de Playfair:

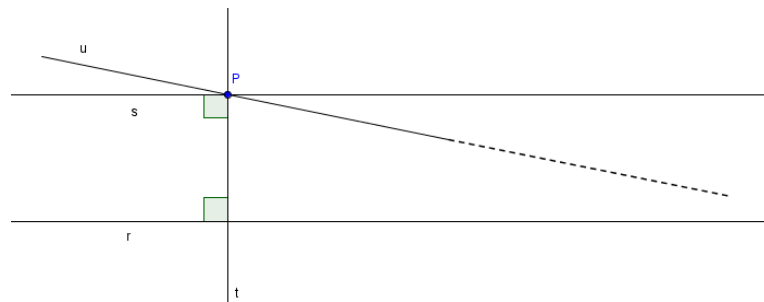
Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Prova: Para provar este substituto aplicamos o método de redução ao absurdo⁶.

⁵ Matemático e geólogo escocês (1748-1819). Trabalhou com a física, a geologia e a geometria. Estudou na Universidade de St Andrews – Escócia.

Dados uma reta r e um ponto P fora de r , como consequência dos quatro primeiros postulados é possível mostrar que existe uma reta s paralela a r passando por P . Na Figura 05 apresentamos uma representação geométrica do Axioma de Playfair. Trace a reta t perpendicular⁷ à reta r passando por P e, a partir de P , a reta s perpendicular à reta t . Então s é paralela a r .

Figura 05 – Representação geométrica para provar o Axioma de Playfair.



Fonte: Autores.

Para provar que a paralela é única, suponha que existe outra reta u paralela à reta r passando pelo ponto P . A reta u forma um ângulo agudo com t . Logo, pelo quinto postulado, concluímos que a reta u intersecta a reta r . Isto é um absurdo, pois, o resultado obtido nos dá retas concorrentes e não paralelas como o esperado. Portanto, provamos a unicidade da paralela.

Agora para provar que o quinto postulado é uma proposição na teoria desenvolvida a partir dos quatro primeiros postulados mais o axioma de Playfair, precisamos do seguinte resultado.

Proposição:

Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.

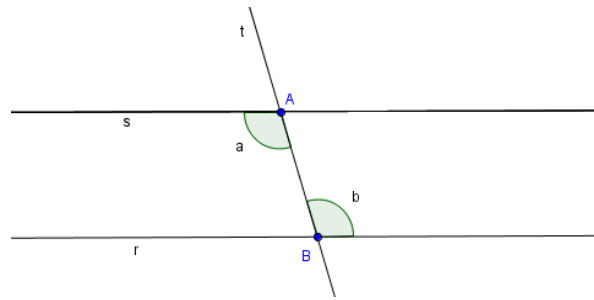
A Figura 06 representa a existência da paralela.

⁶ Segundo Oliveira e Fernandes (2010) o método de redução ao absurdo que provém do latim *reductio ad absurdum* é o método considerado como um dos instrumentos mais poderosos para fazer demonstrações em Matemática. De um modo geral, os passos para uma demonstração por redução ao absurdo são:

1. Assumimos a validade da hipótese;
2. Supomos que a nossa tese é falsa.

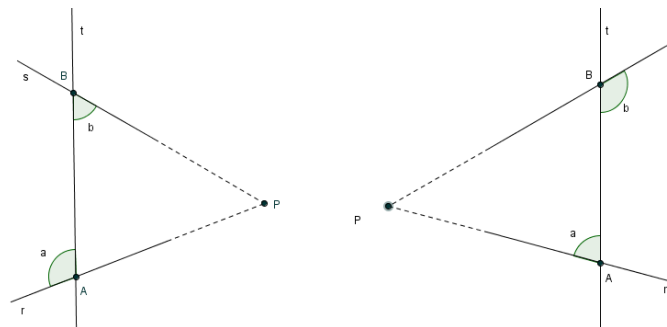
Logo, utilizando ambas as informações concluí-se, por meio de argumentos verdadeiros, uma afirmação falsa e, como tal fato não poderá ocorrer, então a nossa tese deverá ser verdadeira.

⁷ Os quatro primeiros postulados garantem a existência da reta perpendicular.

Figura 06 – Existência da paralela.**Fonte:** Autores.

Prova: De fato, se r e s não fossem paralelas, teriam um ponto P em comum, ou seja, $r \cap s = \{P\}$.

Se $r \cap t = \{A\}$ e $s \cap t = \{B\}$, teríamos o triângulo ABP .

Figura 07 – As retas r e s se intersectam.**Fonte:** Autores.

Logo, pelo teorema do ângulo externo⁸ aplicado ao triângulo ABP , tem-se:

$a > b$ ou $b > a$ o que é um absurdo, segundo a hipótese ($a = b$).

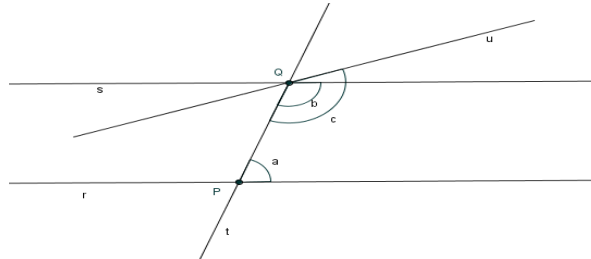
Portanto, as retas r e s são paralelas.

Por meio da proposição anterior, provaremos que o quinto postulado é uma proposição da Geometria Euclidiana, aplicando-se os quatro primeiros postulados e o axioma de Playfair.

⁸ Teorema (do ângulo externo): Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes. Uma demonstração para este teorema encontra-se em Dolce e Pompeo volume 9 (2005, p. 45).

Para isto faremos uso da Figura 08, onde, como hipótese, admitimos que $a + b < 180^\circ$ e, ainda, que as retas r e s são paralelas.

Figura 08 – Prova do quinto postulado a partir dos quatro primeiros mais o axioma de Playfair.



Fonte: Autores.

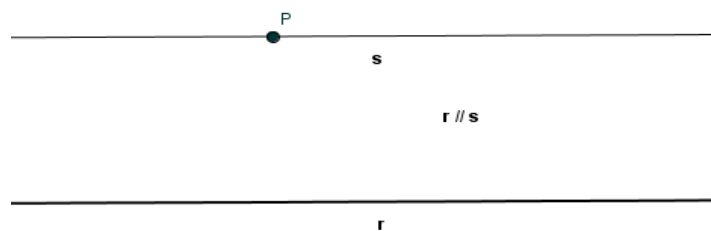
Prova:

Pelo ponto Q traçamos uma reta u formando um ângulo c tal que $a + c = 180^\circ$.

De acordo com a proposição anterior, a reta u é paralela à reta r . Mas, então, teremos duas retas distintas (s e u) passando pelo ponto Q e paralelas a uma mesma reta (r), o que é um absurdo segundo o axioma de Playfair.

Fica assim provado que o axioma de Playfair é um substituto para o quinto postulado. Também, pelo que mostramos, o axioma de Playfair pode ser interpretado geometricamente, conforme a Figura 09.

Figura 09 – Representação geométrica do axioma de Playfair.



Fonte: Autores.

Salientamos que muitos livros-texto de Geometria Euclidiana trazem o axioma de Playfair como o quinto postulado, fazendo uso da sua característica de substituto.

Para Barbosa (2002), as tentativas de provar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros, ao longo dos tempos, transformaram-se, ao final, no estudo da Geometria Absoluta de Bolyai

e permitiram entender “que havia de fato toda uma família de proposições equivalentes ao quinto postulado”, entre as quais, o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo⁹. Para esta soma levantaram-se três possíveis hipóteses: igual, menor, ou maior do que 180° .

As duas últimas hipóteses levaram, respectivamente, à descoberta da Geometria Hiperbólica por Gauss, Bolyai e Lobachewsky, porém creditada aos dois últimos e a Geometria Esférica desenvolvida por Riemann, que proporcionou a construção da Geometria Elíptica por Klein (FRANCO e MENEZES, 2012).

De acordo com Carmo (1987), o modelo para a Geometria Esférica é uma esfera e para a Geometria Elíptica o modelo é uma esfera com os pontos antípodas identificados, isto é, o plano projetivo real. Tais geometrias foram essencialmente introduzidas no trabalho de Riemann.

1.2 Algumas tentativas frustradas de demonstrar o postulado das paralelas

Segundo Carmo (1987), foi a análise do postulado das paralelas e o fracasso de todas as tentativas de demonstrá-lo que forçou, lentamente, uma nova concepção da Matemática, em que todos os elementos de uma teoria deveriam ser cuidadosamente explicitados.

Segundo Barbosa (2002), alguns sujeitos tentaram provar o quinto postulado de Euclides, mas não obtiveram sucesso. De acordo com Eves (2004, p. 97), a principal fonte de informação sobre a história dos primeiros passos da geometria grega antiga deve-se ao Sumário de Eudemo, de autoria do grego Proclus¹⁰ (410-485): “Esse sumário consiste nas páginas de abertura do Comentário¹¹ sobre Euclides, Livro I, de Proclus e é um breve resumo da geometria grega desde os primeiros tempos até Euclides”. Segundo Proclus, Euclides viveu durante o reinado do primeiro Ptolomeu o qual escreveu um livro a respeito do postulado das paralelas (BARBOSA, 2002, p. 22).

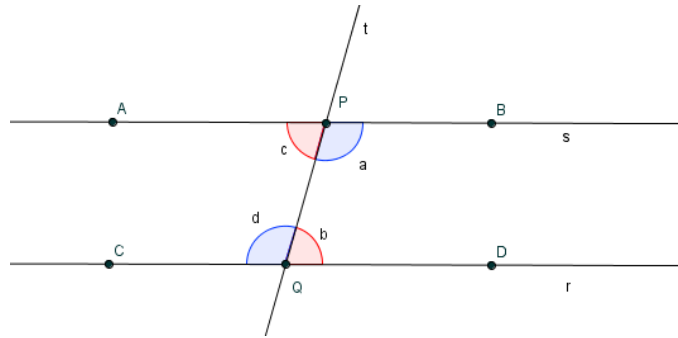
⁹ Teorema: A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois ângulos retos.

¹⁰ Oriundo de uma família rica estudou retórica, filosofia e matemática em Alexandria e, depois, mudou-se para Atenas onde se tornou chefe da Academia de Platão. Disponível em: Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Proclus>> Acesso em: 08/01/2013.

¹¹ O Comentário de Proclus sobre o Livro I dos Elementos é uma das duas principais fontes de informação sobre a história da geometria grega que existe. Outra obra é a *Coleção* de Pappus.

Nos textos de Proclus não há evidências da prova de Ptolomeu, porém, por meio de seus comentários pode-se deduzir que tal demonstração é similar ao que apresentamos na sequência. A Figura 10 representa esta demonstração, em que se considera duas retas cortadas por uma transversal formando ângulos.

Figura 10 – Argumento de Ptolomeu I.



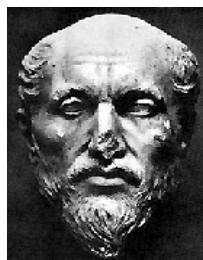
Fonte: Autores.

Se $a + b = 180^\circ$ então $d + c = 180^\circ$. Daí segue que $a = d$ e $b = c$. Logo, a figura R_{ab} formada pelas semirretas \overrightarrow{PB} e \overrightarrow{QD} e pelo segmento PQ , é congruente à figura R_{dc} formada pelas semirretas \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{QC} e pelo segmento PQ . Logo, se as retas r e s se intersectam de um lado da reta t , então também se intersectam do outro lado. Neste caso ocorre um absurdo, pois, teríamos duas retas distintas com dois pontos comuns.

Com esta argumentação, Ptolomeu I acreditou ter demonstrado o quinto postulado, mas seu erro foi assumir que o paralelismo acarretaria na congruência das duas figuras, afirmação esta que só ocorre na Geometria Euclidiana.

Proclus também apresentou uma proposta para demonstrar o quinto postulado. Se uma transversal corta uma de duas paralelas, então corta também a segunda. Esta afirmação recai em mais um substituto para o postulado das paralelas.

Figura 11 – Proclus.

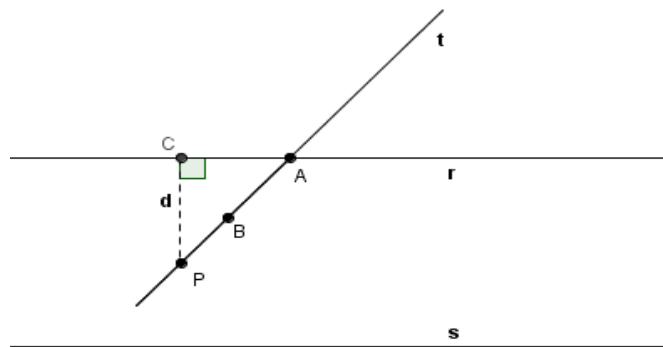


Fonte: <<http://www.astro.gr/arxaiaKeimena/images/proclus.gif>> Acesso em 12/11/2012.

O argumento de Proclus foi o seguinte: Sejam r e s duas retas paralelas e distintas. Considere uma reta t concorrente à reta r no ponto A , e seja B um ponto de t na região limitada pelas retas r e s . Seja P um ponto da semirreta \overrightarrow{AB} . Considere a distância d do ponto P à reta r . Esta é uma função do ponto P , que cresce à proporção que PA cresce. De fato, esta distância pode se tornar maior que qualquer constante $k > 0$ pré-fixada e, portanto, eventualmente, tornar-se maior do que a distância entre as retas r e s . Então, a semirreta \overrightarrow{AB} intersecta a reta s .

Pode-se verificar que o raciocínio de Proclus está correto quando se admite que retas paralelas são equidistantes, porém, a existência de retas equidistantes equivale à adoção do quinto postulado.

Figura 12 – Raciocínio de Proclus.



Fonte: Autores.

Outro geômetra que tentou demonstrar o quinto postulado foi Nasîr ed-dîn¹² (1201-1274). Ele inicialmente supôs, sem demonstração, a validade da seguinte afirmação:

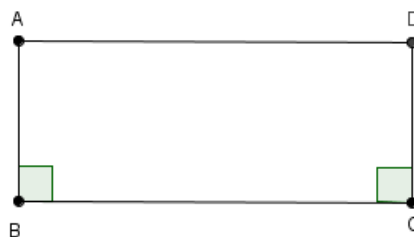
Axioma: Sejam m e n duas retas, A um ponto de m , B um ponto de n , tais que AB é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com m . Então as perpendiculares baixadas de m à reta n , do lado do ângulo agudo, são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB (BARBOSA, 2002, p. 25).

¹² Astrônomo e matemático persa, editor de uma versão dos *Elementos*. Em árabe escreveu um tratado sobre os postulados de Euclides, no qual observou pela primeira vez a importância do teorema da soma dos ângulos de um triângulo em relação ao quinto postulado. É dele o primeiro trabalho de trigonometria plana e esférica considerado independente da astronomia (EVES, 2004, p. 261-262).

Figura 13 – Nasîr ed-dîn

Fonte: <<http://www.dinbali.com/wp-content/uploads/2012/09/Nasireddin.jpg>> Acesso em 12/11/2012.

Nasîr ed-dîn aplicou este axioma para deduzir o quinto postulado. Ele considerou um quadrilátero $ABCD$ (Figura 14) em que os ângulos \hat{B} e \hat{C} são retos e os segmentos AB e CD são iguais. Ele concluiu que os ângulos \hat{A} e \hat{D} também são retos. Para isto, supôs inicialmente que o ângulo \hat{A} era agudo, deduzindo, então, que $\overline{AB} > \overline{CD}$, o que é um absurdo. O mesmo tipo de prova mostra que este ângulo não pode ser obtuso. Segundo o argumento de Nasîr ed-dîn, o quadrilátero $ABCD$, tem os quatro ângulo internos retos, e os lados opostos congruentes (um retângulo). Ao traçar uma diagonal, decompõe-se o retângulo em dois triângulos retângulos congruentes. Então, ele conclui pela existência de um triângulo cuja soma dos ângulos internos é 180° e, que o quinto postulado estava demonstrado como uma consequência dos outros. Entretanto, pode-se provar que suas afirmações também correspondem a um substituto para o quinto postulado.

Figura 14 – Quadrilátero de Nasîr ed-dîn.

Fonte: Autores.

Entre os séculos XVI e XVII vários trabalhos foram escritos na tentativa de provar o quinto postulado, dentre os quais merece destaque aquela devida ao inglês John Wallis¹³ (1616-1703), que na tentativa de demonstrá-lo, deixou de lado à ideia de seus predecessores que trabalharam com retas equidistantes e, apresentou a demonstração sob os argumentos do seguinte axioma.

¹³ Matemático e professor. Ele foi o primeiro a explicar de maneira razoavelmente satisfatória o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários; deve-se a ele também a introdução do atual símbolo de infinito (∞) e um dos pioneiros a criar um sistema de ensino para surdos-mudos (EVES, 2004, p. 431-342).

Axioma:

“Dado um triângulo é possível construir-se um outro que lhe é semelhante, com lados arbitrariamente grandes” (BARBOSA, 2002, p. 27).

Um outro enunciado para o axioma anterior é apresentado por Mlodinow (2005, p. 110): “Dado qualquer lado de qualquer triângulo, esse triângulo pode ser aumentado ou diminuído, de modo que o lado escolhido tenha qualquer tamanho que você queira, mas mantendo os ângulos do triângulo inalterados”.

A demonstração de Wallis não foi aceita pelos matemáticos uma vez que aplicou o conceito de semelhança, o qual só faz sentido se considerar a validade do quinto postulado.

Figura 15 – John Wallis.



Fonte: <<http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/files/2009/11/Wallis.jpg>>
Acesso em 12/11/2012.

Conforme Eves (2004), a primeira investigação científica que apresentava uma tentativa de provar o postulado das paralelas só foi publicada em 1733¹⁴ pelo italiano, padre jesuíta e professor universitário Girolamo Saccheri¹⁵ (1667-1733). O jesuíta contribuiu diretamente para os estudos de Legendre, Lobachewsky e Riemann

Segundo Barbosa (2002, p. 29), a contribuição do padre é considerada a mais importante, comparando com todas as anteriores, pois foi “a primeira a contemplar a possibilidade de hipóteses outras que a de Euclides e trabalhar com um grande número de suas consequências”.

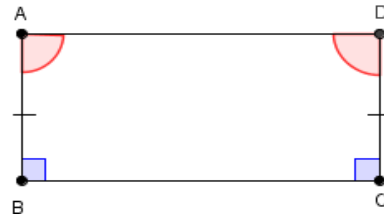
A ideia de Saccheri foi considerar um quadrilátero $ABCD$ tal que $AB \equiv CD$, $AB \perp BC$ e $CD \perp BC$ (Figura 16). Usando apenas os quatro primeiros postulados ele provou que $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

¹⁴ Título do Livro de Saccheri: “Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntut prima ipsa universae Geometriae principia”. (Euclides livre de qualquer falha: Um trabalho geométrico em que são estabelecidos os princípios fundamentais de uma geometria universal).

¹⁵ Os autores não encontraram uma imagem de Saccheri.

Assumir que estes ângulos são retos é equivalente a validar o quinto postulado. Em geral, para estes ângulos existem três hipóteses: ou são retos ou são obtusos ou são agudos.

Figura 16 – Quadrilátero de Saccheri.

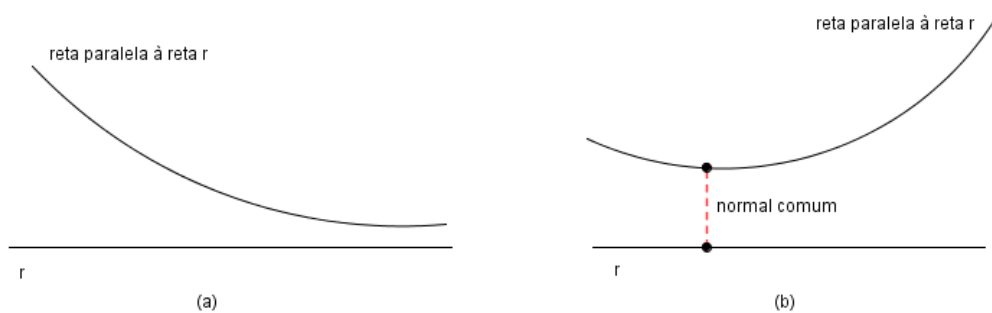


Fonte: Autores.

Saccheri assumiu a negação da hipótese dos ângulos serem retos e estudou as consequências das duas outras, na busca de contradições. Assim como Euclides, ele assumiu que a reta é ilimitada e por este fator não teve dificuldade em descartar a hipótese dos ângulos serem obtusos. Entretanto, ao buscar uma contradição para a hipótese dos ângulos agudos, ele obteve várias proposições interessantes que decorrem de se negar o postulado das paralelas.

Conclui-se, nesta hipótese, que duas retas paralelas não são equidistantes (Figura 17): ou elas se aproximam assintoticamente¹⁶, ou possuem uma normal (reta perpendicular) comum, a partir da qual se afastam indefinidamente (CARMO, 1987, p. 29).

Figura 17 – Comportamento das retas paralelas quando se nega o quinto postulado.



Fonte: Carmo (1987).

Conforme Barbosa (2002, p. 30-31), Saccheri finalmente concluiu que a hipótese dos ângulos agudos “acarretava a existência de duas retas assintóticas possuidoras de uma perpendicular comum em um ponto ideal no infinito”. Saccheri não ficou convencido de que havia

¹⁶ Duas retas que se aproximam assintoticamente [Figura 17 (a)] significam que elas se aproximam indefinidamente, ficando tão próximas uma da outra quanto se queira, porém nunca se intersectam.

realmente chegado a uma contradição e partiu para uma segunda prova na qual também não obteve sucesso.

Outro matemático que também se dedicou à provar o quinto postulado foi o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático, astrônomo, físico e filósofo, o qual forneceu a primeira prova de que o número π (pi) é irracional. Filho de um alfaiate pobre, Lambert, em grande parte de sua vida foi um autodidata. Fez investigações geométricas e astronômicas por meio de instrumentos que ele mesmo projetou e construiu (BARBOSA, 2002).

Figura 18 – Lambert.



Fonte: <<http://apprendre-math.info/history/photos/Lambert.jpeg>> Acesso em 12/11/2012.

Segundo Eves (2004), trinta e três anos após a publicação da obra de Saccheri, Lambert escreveu uma investigação semelhante, intitulada, *Die Theorie der Parallellinien* que só foi publicada após a sua morte.

Lambert escolheu um quadrilátero com três ângulos retos, e com relação ao quarto ângulo considerou três hipóteses: ângulo reto; ângulo obtuso e ângulo agudo (Figura 19). Como a primeira hipótese equivale ao quinto postulado, ele trabalhou as consequências das outras duas e alcançou um nível de conhecimento mais profundo do que Saccheri ao deduzir novas proposições. Entre elas, destaca-se a seguinte (BARBOSA, 2002).

Proposição:

A área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos.

Conforme a proposição anterior e assumindo a hipótese do ângulo agudo tem-se a seguinte expressão para a área S de um triângulo ABC :

$$S = k(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C})$$

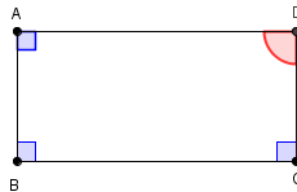
Entretanto, admitindo a hipótese do ângulo obtuso tem-se:

$$S = k(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$$

onde, π (*rad*) equivale a 180° e $k \in \mathbb{R}$, com $k > 0$.

Assim como Saccheri, Lambert também eliminou a hipótese do ângulo obtuso ao assumir que a reta é ilimitada. Porém, suas considerações finais sobre a hipótese do ângulo agudo também foram insatisfatórias, pois, segundo Barbosa (2002, p. 33) parece que ele percebeu “que os argumentos contra a Geometria baseada nesta hipótese eram muito mais resultado de noções preconcebidas sobre a validade da Geometria euclidiana”.

Figura 19 – Quadrilátero de Lambert.



Fonte: Autores.

O matemático francês Adrian-Marie Legendre (1752-1833) também fez várias tentativas de demonstrar o postulado das paralelas a partir dos outros quatro, porém, não atingiu seu objetivo. Oriundo de uma família rica lhe foi dada uma educação de qualidade superior em matemática e física no *Collège Mazarin*, em Paris (BARBOSA, 2002).

Figura 20 – Legendre.



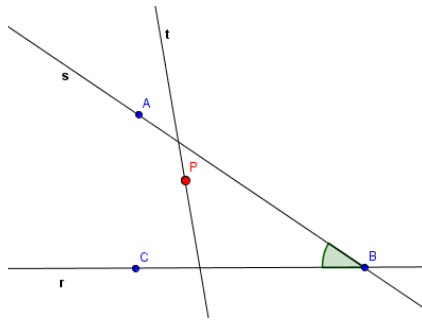
Fonte: <<http://apprendre-math.info/history/photos/Legendre.jpeg>> Acesso em 12/11/2012.

Em 1794, Legendre publicou seus *Éléments de Géométrie* (Elementos de Geometria). Tal obra reordenou e simplificou as proposições de Euclides e, foi amplamente adotada na Europa, isto é, contribuiu expressivamente para popularizar o postulado das paralelas.

Segundo Eves (2004), Legendre considerou as hipóteses da soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor do que, igual a ou maior do que dois ângulos retos. Assumiu tacitamente a infinitude da reta e descartou a hipótese da soma dos ângulos internos de um triângulo ser maior do que 180° , entretanto, apesar de várias tentativas, não foi capaz de eliminar a primeira hipótese.

Legendre, conforme Carmo (1987), também admitiu que dado um ângulo e um ponto P no seu interior, é possível passar por P uma reta que intersecta os dois lados do ângulo (Figura 21). Entretanto esta afirmação era equivalente ao quinto postulado.

Figura 21 – O fato de por todo ponto P no interior do ângulo $A\hat{B}C$ passar uma reta t que intersecta as retas r e s é equivalente ao quinto postulado.



Fonte: Autores.

As seções 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6 apresentam uma breve discussão sobre os feitos dos principais matemáticos que contribuíram diretamente para a descoberta das geometrias não-euclidianas.

1.3 Gauss

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado como um dos mais renomados matemáticos de sua geração por suas contribuições na Matemática e na Física, incluindo a teoria dos números, a análise, a geometria diferencial, a geodésica, o magnetismo, a astronomia e a ótica foi oriundo de uma família pobre.

De acordo com Mlodinow (2005) os pais de Gauss pertenciam a uma classe da população chamada de “semicidadãos”. Sua mãe se chamava Dorotéia, era analfabeta e trabalhava como

empregada doméstica. Seu pai, Gebhard, desempenhava várias atividades, mal remuneradas, desde abrir canais e assentar tijolos até fazer a contabilidade de uma sociedade funerária local.

Figura 22 – Gauss.



Fonte: <http://www.rare-earth-magnets.com/images2/johann_carl_friedrich_gauss.jpg> Acesso em 12/11/2012.

Segundo Barbosa (2002), dos problemas relacionados ao postulado das paralelas, apenas alguns resultados de Gauss tornaram-se públicos durante sua vida. Entretanto, ele contribuiu consideravelmente para o desenvolvimento das ideias que levaram a descoberta da nova Geometria. Gauss foi a primeira pessoa a chamar a nova Geometria de *não-euclidiana*.

Entretanto, o que se conhece a respeito é que ele escreveu e trocou algumas cartas com pessoas interessadas na demonstração do quinto postulado, apresentou críticas de tratados sobre as paralelas e, deixou notas inéditas entre seus trabalhos, o que evidencia ter sido o primeiro sujeito a compreender uma geometria logicamente precisa e diferente da Geometria Euclidiana (BARBOSA, 2002).

Gauss, de maneira diferente de todos os críticos que o precederam, não procurou encontrar uma forma mais aceitável para o quinto postulado, nem torná-la desnecessária demonstrando-a por meio dos quatro primeiros postulados. Ele apenas questionava se o quinto postulado era válido (MLODINOW, 2005).

Parece evidente nos documentos existentes que, no final da primeira década do século XIX, Gauss ainda estava tentando demonstrar o postulado das paralelas pelo método de redução a um absurdo (BARBOSA, 2002).

Segundo Carmo (1997), em 1824 Gauss estava de posse das ideias fundamentais das geometrias não-euclidianas as quais ele confirma por meio de uma carta a Taurinus, um advogado que era envolvido com a Matemática. De acordo com Mlodinow (2005, p. 122) a

carta dizia “A suposição de que a soma dos três ângulos de um triângulo é menor do que 180° leva a uma geometria especial, bem diferente da nossa, isto é, a euclidiana, que é absolutamente consistente, e que eu desenvolvi de modo bem satisfatório para mim mesmo”.

Gauss, porém, nunca publicou nada sobre o que acabara de descobrir, e insistiu com Taurinus e outros para não publicarem suas descobertas. Em 1829 Gauss escreve a Bessel e menciona que talvez nunca torne público seus resultados, pois, “temia a gritaria dos beócios”. Isso parece ser esclarecedor, pois, Gauss vivia numa época em que havia forte influência do mais renomado e respeitado filósofo do século XVIII, Immanuel Kant, que apoiava suas ideias em supostas verdades inquestionáveis da Geometria Euclidiana (MLODINOW, 2005).

1.4 Janos Bolyai

Durante seus estudos na Universidade de Göttingen – Alemanha, Gauss fez amizade com o húngaro Farkas (Wolfgang) Bolyai (1775-1856), com qual discutiu problemas relacionados à teoria das paralelas. Após ambos deixarem a universidade, mantiveram contato por meio de correspondências. Uma carta escrita por Gauss à Farkas em 1799 mostra que ambos estavam, simultaneamente, tentando provar o quinto postulado.

Em 1804 Farkas apresentou um tratado intitulado *Theoria parallelarum*, o qual envia à Gauss dizendo que havia conseguido provar o postulado das paralelas, entretanto, sua prova estava errada e Gauss o respondeu apontando o erro. Farkas continuou tentando provar o postulado das paralelas usando a mesma linha de raciocínio e, quatro anos mais tarde enviou novamente uma carta a Gauss com um trabalho suplementando sua prova, porém Gauss não o respondeu (BARBOSA, 2002, p. 47).

Farkas sempre esteve interessado nos fundamentos da geometria e do quinto postulado. Sua principal obra, o *Tentamen*, publicado em dois volumes no ano de 1832, apresentou uma tentativa de fundamentação rigorosa e sistemática da geometria, aritmética, álgebra e análise.

O filho de Farkas Bolyai, Janos (Johann) Bolyai (1802-1860) estudou matemática desde pequeno, e como era de se esperar, muito jovem também se interessou pela teoria das paralelas. Quando Janos Bolyai ingressou no *Royal College* de engenharia em Viena, 1817, já

havia despendido muito esforço na tentativa de provar o quinto postulado, uma vez que seu pai lhe recomendou expressamente que tal problema deveria ser deixado de lado.

Figura 23 – Janos Bolyai.



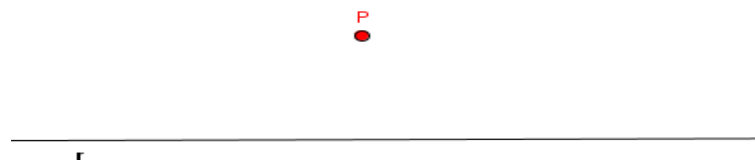
Fonte: <http://www.omikk.bme.hu/archivum/kozoskepek/bolyai_janos.jpg> Acesso em 12/11/2012.

Segundo Barbosa (2002), por volta de 1820, os esforços de Janos Bolyai na tentativa de provar o quinto postulado, por meio da substituição por uma afirmação que lhe fosse contraditória, forneceu resultados de uma natureza especial. Seu foco foi, gradativamente, mudando na direção da possibilidade de formular uma Geometria geral, uma Ciência absoluta do espaço, em que a Geometria de Euclides seria um caso particular.

Para negar o quinto postulado duas hipóteses possíveis deveriam ser consideradas, as quais são chamadas de H_1 e H_2 .

H_1 : Não existe nenhuma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora desta reta.

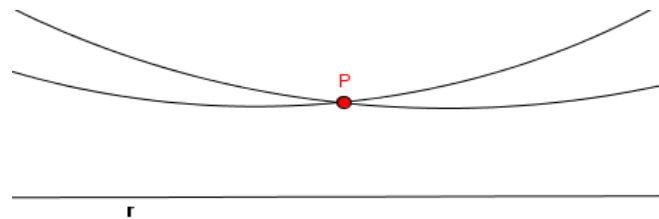
Figura 24 – Representação geométrica para H_1 .



Fonte: Autores.

H_2 : Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto que não pertence à reta dada.

Figura 25 – Representação geométrica para H_2 .



Fonte: Autores.

Partindo da segunda hipótese, Janos Bolyai observou que a existência das duas tais retas acarretaria na existência de uma infinidade delas.

Segundo Eves (2004) a grande questão que levou Janos Bolyai a não receber o *status* de ser o primeiro a descobrir outra geometria que não era a Euclidiana, foi o fato dele ter demorado para publicar suas descobertas. Isso, só ocorreu em 1832 em um apêndice do *Tentamen*. Ainda, conforme Eves (2004), após esta publicação, não há registros de outras obras, embora Janos Bolyai mantivesse suas investigações sobre o assunto.

Em 1848 Janos Bolyai teve uma grande surpresa, quando ficou sabendo que o russo Nicolai Ivanovich Lobacheswsky (1793-1856) havia publicado descobertas semelhantes em 1829, três anos antes das suas.

1.5 Lobachewsky

Segundo Smogorzhevski (1978), Lobachewsky era de uma família pobre. Sua mãe foi uma mulher enérgica e sensata, que apesar das dificuldades financeiras enviou todos os seus filhos para estudar no ginásio na cidade de Kazan – Rússia, próximo à Sibéria. Lobachewsky terminou seus estudos secundários, ingressou na Universidade de Kazan, onde viveu a maior parte de sua vida, pois, ele passou de aluno para professor e, também, ocupou por muitos anos o cargo de reitor (EVES, 2004).

Figura 26 – Lobachewsky.



Fonte: <<http://apprendre-math.info/history/photos/Lobachevsky.jpeg>> Acesso em 12/11/2012.

Em 1826, Lobachewsky realizou uma conferência para o Departamento de Física e Matemática na Universidade de Kazan e “sugeriu uma nova Geometria na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas por um ponto e onde a soma dos ângulos de um triângulo seria menor que dois ângulos retos” (BARBOSA, 2002, p. 51). A conferência, no entanto, não foi publicada, ou mesma discutida pelo Departamento, e seu conteúdo permaneceu desconhecido.

Lobachewsky, assim como Janos Bolyai, também considerou a Geometria Euclidiana um caso particular da sua, pois,

Ele notou que, quando considerava figuras geométricas cujo tamanho diminuía, as diferenças entre sua nova geometria e a de Euclides tendiam desaparecer. Para figuras geométricas grandes, comparadas com um certo comprimento característico do espaço, as diferenças entre as geometrias se tornavam importantes. (SILVA, MARTINS, 2006, p. 18).

De acordo com Eves (2004), foi entre 1829-1830 que Lobachewsky publicou o seu primeiro artigo sobre geometria não-euclidiana em um periódico - O mensageiro de Kazan, da Universidade de Kazan. Esse artigo teve pouca repercussão na comunidade científica, devido ao fato de escrevê-lo apenas em russo numa época em que o latim, o alemão e o francês eram os principais idiomas para a divulgação científica.

Lobachewsky, para dar continuidade e expor seu trabalho para atingir um número maior de leitores, publicou em 1840 um pequeno livro escrito em alemão intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas). Em 1855, já cego e um ano antes do seu falecimento, Lobachewsky fez outra publicação, desta vez em francês, expondo todos os resultados da sua pesquisa com o título de

Pangéométrie (Pangeometria), na tentativa de obter reconhecimento pelo seu trabalho (EVES, 2004).

No entanto, apenas em 1867 os artigos de Bolyai e Lobacheswsky foram incluídos na segunda edição do influente livro *Elemente der Mathematik* de Richard Baltzer. Desta forma os artigos se tornaram referência-padrão entre os que trabalhavam com as novas geometrias (MLODINOW, 2005).

Assim, a construção explícita de uma geometria a qual se descarta o quinto postulado, e que foi publicada de maneira independente e quase simultânea por Lobacheswsky e Bolyai é a geometria que hoje se chama Geometria Hiperbólica (batizada por Felix Klein em 1871). Sua existência mostra que o quinto postulado é independente dos demais.

1.6 Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 1826 Hanover – Alemanha, e morreu em 1866 Selasca – Itália, vítima de tuberculose. Suas origens são de uma família pobre, cujo pai era um pastor luterano e, sua mãe morreu antes que ele crescesse. Sempre foi uma pessoa tímida e introvertida, de saúde muito frágil.

Figura 27 – Riemann.



Fonte: <<http://content.answcdn.com/main/content/img/scitech/HSgeorgf.jpg>> Acesso em 12/11/2012.

Com 19 anos de idade e sob a orientação de seu pai, Riemann ingressou na Universidade de Göttingen, onde Gauss era professor, para estudar filosofia e teologia. Segundo Mlodinow

(2005), sua matéria favorita era história, particularmente a história do movimento nacional polonês. Entretanto, ele acabou cursando Matemática, fazendo o primeiro ano em Göttingen, transferindo-se depois para Berlim. Em 1849 Riemann volta para Göttingen para completar sua tese de doutorado e, finalmente em 1851 torna-se doutor sob a orientação de Gauss, com um trabalho brilhante que introduz as chamadas Superfícies de Riemann (EVES, 2004, p. 613).

Em 1854 Riemann tornou-se professor não remunerado da Universidade de Göttingen e para tal privilégio apresentou a famosa conferência probatória sobre as hipóteses em que se baseiam a geometria (EVES, 2004, p. 614). Na apresentação surge a distinção entre “*infinito*” e “*ilimitado*”. Por exemplo: as circunferências máximas de uma esfera são finitas (percorrendo-as sempre se volta ao ponto de partida), mas, ilimitadas (pode-se percorrê-las indefinidamente).

Sem conhecer os trabalhos de Bolyai e Lobachewsky, Riemann propôs “uma generalização da geometria que não apenas apresentava um conjunto de alternativas à de Euclides, mas introduzia a possibilidade de espaços com mais de três dimensões”. (SILVA, MARTINS, 2006, p. 18). Salientamos que em nenhum momento ele mencionou o nome geometria não-euclidiana.

Riemann deu sua própria interpretação para ponto, reta e plano. Como plano ele escolheu a superfície esférica. Seus pontos eram posições e as retas eram as circunferências máximas de uma superfície esférica (MLODINOW, 2005).

O que Riemann fez foi generalizar a geometria diferencial, que é a teoria das superfícies curvas, na qual uma superfície é descrita pelo método das coordenadas e, depois empregando-se o cálculo diferencial. A geometria diferencial deve-se a Gauss, que a desenvolveu para estudar as superfícies curvas no espaço tridimensional.

Na geometria diferencial há um formalismo muito diferente do utilizado por Bolyai e Lobachewsky, que foi o axiomático. Sem levar em consideração a validade ou não do quinto postulado “ela possibilita a descrição de diferentes tipos de espaço, em que a métrica envolve apenas as propriedades intrínsecas” (SILVA e MARTINS, 2006, p. 18).

Outras geometrias além da criada por Bolyai e Lobachewsky, e que podem ser abordadas pela geometria desenvolvida por Riemann – Geometria Riemanniana, são as Geometrias Esférica e Elíptica, esta última também batizada por Felix Klein.

No entanto, foi apenas no final da década de 1860 e início da década de 1870 que as geometrias não-euclidianas começaram a ter reconhecimento, o que ocorreu devido às traduções dos trabalhos de Bolyai, Lobachewsky e Riemann para vários idiomas e, também, pela contribuição do matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900), que em 1868 publicou um importante artigo: Ensaio de interpretação da geometria não-euclidiana, o qual descreveu e defendeu a coerência da geometria de Lobachewsky difundindo, dessa forma, o nome geometria não-euclidiana.

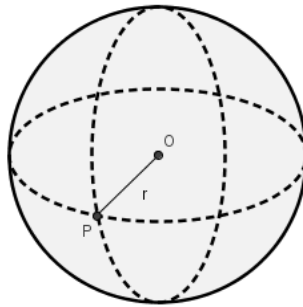
CAPÍTULO II – GEOMETRIA ESFÉRICA: UMA INTRODUÇÃO

2.1 Elementos da Geometria Esférica

Nesta seção elencamos conceitos básicos (definições e teoremas) sobre a Geometria Esférica, os quais são utilizados para a resolução dos exemplos e das atividades propostas e, comparar a Geometria Euclidiana com a Esférica.

Definição 2.1.1 - Esfera: Seja O um ponto e r um número real positivo. Chama-se *esfera* de centro O e raio r o conjunto dos pontos P do espaço, tais que, a distância entre O e P seja menor ou igual do que r , isto é, $d(O, P) \leq r$.

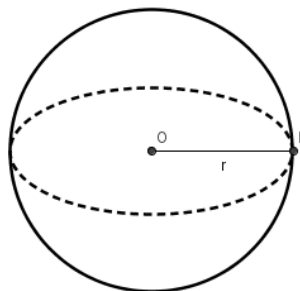
Figura 28 – Esfera de centro O e raio r .



Fonte: Autores.

Definição 2.1.2 - Superfície Esférica: Chama-se *superfície esférica* de centro O e raio r o conjunto dos pontos P do espaço, tais que, a distância entre O e P seja igual a r , isto é, $d(O, P) = r$.

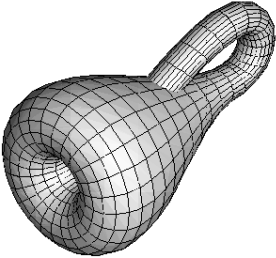
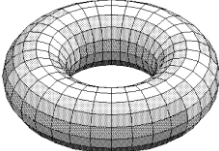
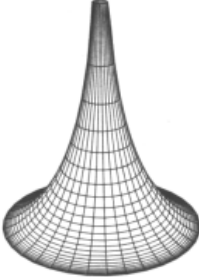

Figura 29 – Superfície Esférica de centro O e raio r .



Fonte: Autores.

A definição 2.1.2 é de uma superfície esférica. Porém, existem também outras superfícies, como por exemplo: as superfícies que representam uma folha de papel lisa, uma rosquinha, uma câmara de ar de pneu de automóvel, a Terra, um ovo, a água e etc. Como ilustração, o quadro a seguir mostra outros modelos de superfícies:

Quadro 2.1.1 – Exemplos de outras superfícies.

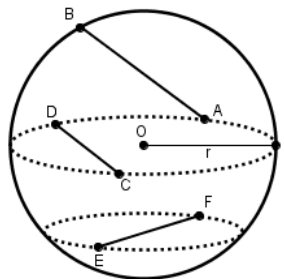
Garrafa de Klein ¹⁷	Toro ¹⁸	Pseudoesfera ¹⁹	Faixa de Möbius ²⁰
			

Fonte: Autores.

Mas, afinal o que são superfícies? Segundo Sampaio (2008) superfícies são objetos geométricos de duas dimensões que não existem no mundo real, mas somente em nossa imaginação, pois não apresentam espessura. O que acabamos de responder é apenas um conceito intuitivo, pois, o estudo das superfícies requer conceitos de topologia geral e de cálculo avançado abordado em um curso de graduação, fugindo do escopo deste trabalho²¹.

Definição 2.1.3 - Corda da superfície esférica: Chama-se *corda* da superfície esférica o segmento de reta determinado por dois pontos distintos da superfície esférica.

Figura 30 – Cordas AB , CD e EF .



Fonte: Autores.

¹⁷ Disponível em: <<http://www.geom.uiuc.edu/docs/dpvc/Pictures/KleinBottle.gif>> Acesso em 03/02/13.

¹⁸ Disponível em: <<http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/HoHonLeung/Torus.png>> Acesso em 03/02/13.

¹⁹ Disponível em: <<http://www.vialattea.net/curvatura/img/pseudosphere.gif>> Acesso em 13/02/13.

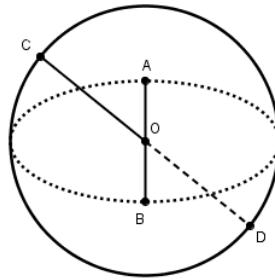
²⁰ Disponível em: <<http://utenti.quipo.it/base5/topologia/moebius05.gif>> Acesso em 13/02/13.

²¹ Para a definição formal de superfície consulte Carmo (2006).

Definição 2.1.4 - Diâmetro da Superfície Esférica: Uma corda da superfície esférica que contém o centro O é dita *diâmetro* da superfície esférica.

A Figura 31 mostra dois segmentos de reta que passam pelo centro da superfície esférica e são os seus diâmetros.

Figura 31 – Diâmetros AB e CD , cuja medida vale $2r$.



Fonte: Autores.

Definição 2.1.5 – Pontos antípodas: Dado um ponto qualquer P na superfície esférica, seu antípoda P' , é o único ponto da superfície esférica tal que o segmento de reta PP' contém o centro O .

De acordo com a Figura 31 o ponto A é o antípoda do ponto B e vice-versa e, os pontos C e D são pontos antípodas um do outro. Em resumo, dois pontos distintos de uma superfície esférica são antípodas quando são diametralmente opostos, isto é, são os extremos de um diâmetro da superfície esférica.

Teorema 2.1.1: A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência²² de mesmo centro e mesmo raio.

Prova: Sejam S uma superfície esférica com centro O e raio r e um plano Ω (Ômega) que passa por O . A interseção $\Omega \cap S$ é o conjunto dos pontos de Ω cuja distância a O é igual a r . Essa é exatamente a definição de uma circunferência de centro O e raio r .

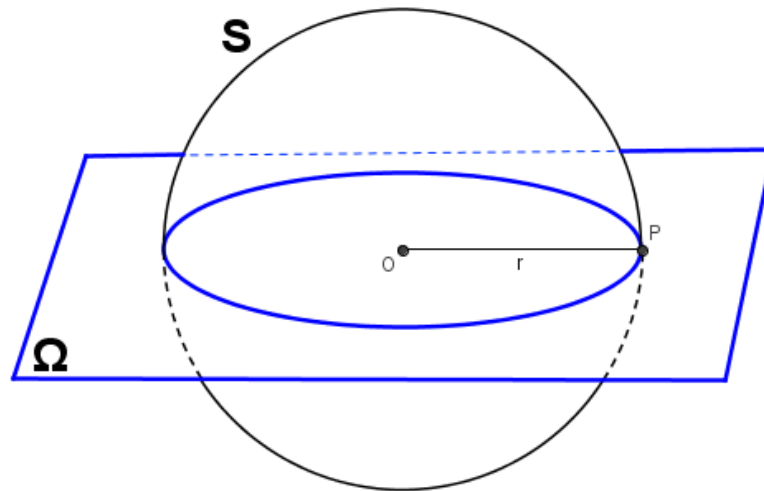
²² Neste trabalho adotamos a seguinte definição para circunferência:

Chama-se *circunferência* de centro O e raio $r > 0$ o conjunto dos pontos P do plano, tais que, a distância entre O e P seja igual a r , isto é, $d(O, P) = r$.

Outra forma seria: Dados um plano β (beta), um ponto O de β e uma distância r não nula, temos que a circunferência C de centro O e raio r é dada por: $C(O, r) = \{P \in \beta \mid d(P, O) = r\}$.

Lembre-se que o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi r$.

Figura 32 – Interseção da superfície esférica S com um plano Ω passando pelo seu centro O .



Fonte: Autores.

O plano Ω (Figura 32) divide a superfície esférica em duas partes chamadas de *hemisférios* que são superfícies semiesféricas.

Definição 2.1.5 - Circunferência Máxima: A circunferência do teorema 2.1.1 é chamada de *circunferência máxima*.

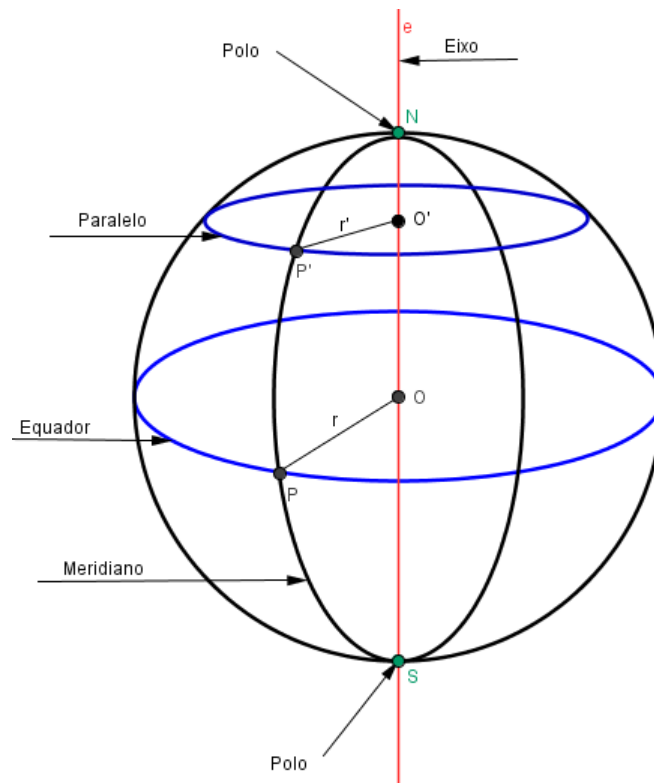
As circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica, isto é, são aquelas que têm o mesmo raio da superfície esférica.

Definição 2.1.6 - Elementos Notáveis da Superfície Esférica:

- i. **Eixo - e :** É qualquer reta que contém o centro O .
- ii. **Polos:** São os pontos de interseção do eixo e com a superfície esférica.
- iii. **Equador:** É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.
- iv. **Paralelo:** É uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo. Ela é “paralela” ao Equador.
- v. **Meridiano:** É uma semicircunferência máxima cujo plano passa pelo eixo e liga os polos. Ressalta-se que os meridianos, ao contrário dos paralelos, não são circunferências.

A Figura 33 apresenta os elementos da definição 2.16.

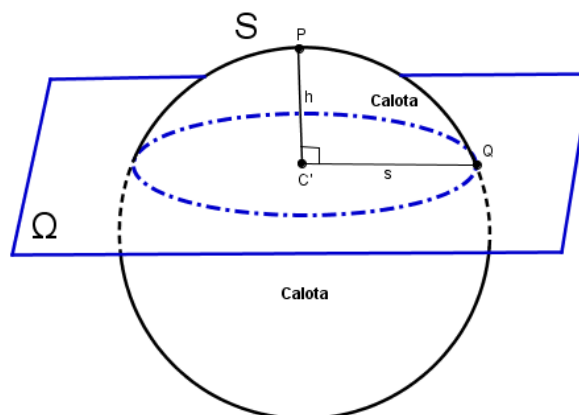
Figura 33 – Elementos Notáveis da Superfície Esférica.



Fonte: Autores.

Definição 2.1.7 – Calota Esférica: Um plano Ω que corta a superfície esférica S , divide sua superfície em duas regiões. Cada uma dessas regiões se chama *calota esférica*.

Figura 34 – O Plano Ω divide a superfície esférica S em duas regiões chamadas de *calota esférica*.



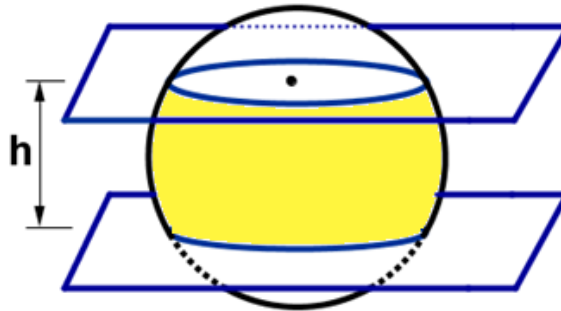
Fonte: Autores.

Se a interseção entre o plano Ω e a superfície esférica S não for uma circunferência máxima, nem um ponto (plano tangente à superfície), então tal intersecção é chamada de

“pequena circunferência”. Logo (Figura 34), C' e s são respectivamente o centro e o raio da pequena circunferência e, P e h são respectivamente o polo e a altura da calota esférica.

Definição 2.1.8 – Zona Esférica: Se dois planos paralelos cortam a superfície esférica, então a parte da superfície esférica compreendida entre eles se chama *zona esférica*.

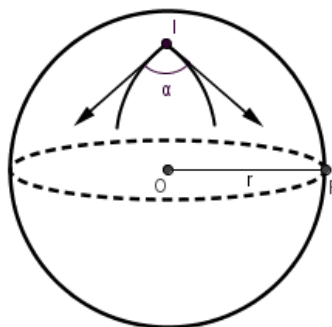
Figura 35 – Zona Esférica: parte amarela.



Fonte: Autores.

Definição 2.1.9 – Ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas: Quando dois arcos de circunferências máximas se intersectam, o ângulo α formado por esses dois arcos é o ângulo entre as semirretas tangentes a esses arcos.

Figura 36 – Ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas.



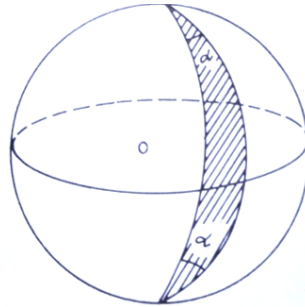
Fonte: Autores.

O ponto I (Figura 36) é ponto de intersecção dos dois arcos e, é também, a origem das semirretas que determinam o ângulo α .

Definição 2.1.10 - Fuso Esférico ou Biângulo Esférico: A região da superfície esférica compreendida entre dois meridianos é chamada de *fuso esférico*.

Esses meridianos têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum que são os vértices do fuso. Os meridianos são os lados do fuso.

Figura 37 – Fuso esférico ou biângulo esférico cujo ângulo mede α .

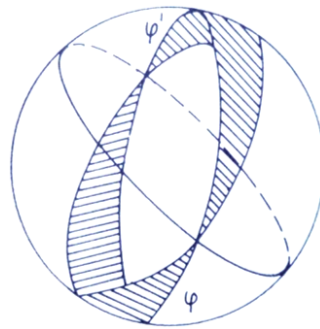


Fonte: Lima (2011, p. 96)

Definição 2.1.11 - Ângulo do Fuso Esférico: O ângulo α (Figura 37) entre os dois meridianos é o ângulo do fuso.

Note que cada um dos meridianos da Figura 37 está contido em uma circunferência máxima distinta. Logo, as duas circunferências máximas determinam dois fusos esféricos antípodas (Figura 38), isto é, um fuso completo ou duplo.

Figura 38 – Fuso esférico completo, isto é, duplo. φ' é o fuso antípoda de φ .



Fonte: Lima (2011, p. 96)

A seguir, apresentamos dois teoremas que nos permitem calcular o volume de uma esfera e a área de uma superfície esférica.

Teorema 2.1.2 – Volume de uma esfera²³: O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

²³ Uma demonstração para este teorema encontra-se em Franco e Gerônimo (2010, p.296-297). Livros do Ensino Médio também demonstram.

Teorema 2.1.3 – Área de uma superfície esférica²⁴: A área de uma superfície esférica de raio r é $4\pi r^2$.

Na sequência apresentamos dois corolários (consequências imediatas de um teorema), que permitem calcular as áreas de uma calota e uma zona esférica.

Corolário 2.1.1 – Área de uma calota esférica²⁵: A área de uma calota esférica é dada por $2\pi rh$, onde r é o raio da superfície esférica e h altura da calota.

Corolário 2.1.2 – Área da zona esférica²⁶: A área de uma zona esférica é dada por $2\pi rh$, onde r é o raio da superfície esférica e h a distância entre os planos paralelos.

Em seguida, são apresentados e resolvidos três exemplos. Os dois primeiros são aplicações diretas dos teoremas 2.1.2 e 2.1.3. Já o terceiro, usa o corolário 2.1.1 e mais alguns conceitos da Geometria Euclidiana Plana, como por exemplo, congruência e semelhança de triângulos e razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Exemplo 2.1.1: A real forma física do Planeta Terra não é uma esfera, pois apresenta um achatamento nos polos Norte e Sul e outras irregularidades que chamamos de relevo (superfície topográfica). Na verdade sua forma física se aproxima mais a um *elipsóide*. Entretanto, vamos desprezar o achatamento nos polos e suas irregularidades e, passamos a considerar neste trabalho, o modelo esférico para a Terra, cujo raio médio é igual a 6370 km . Assim, calcule a área aproximada da superfície terrestre composta por solo, sabendo que aproximadamente 73% de toda superfície é composta por água.

Resolução:

Como adotamos o modelo esférico para a Terra, vamos calcular a área total da superfície terrestre aplicando o teorema 2.1.3.

$$A_{total} = 4\pi r^2 = 4\pi(6370\text{km})^2 = 509\,904\,363,8\text{km}^2.$$

Como 73% da superfície é composta por água, então 27% é composta pelo solo.

Portanto, 27% de A_{total} é igual a $137\,674\,178,2\text{km}^2$.

²⁴ Uma dedução da área de uma superfície esférica encontra-se em Dolce e Pompeo (2005, p.264).

²⁵ Uma demonstração para este corolário encontra-se em Lima et al. (2007, p.270).

²⁶ Uma demonstração para este corolário encontra-se em Franco e Gerônimo (2010, p.301-302).

No exemplo anterior citamos que a Terra se aproxima a um elipsóide. Desta forma, sugerimos que o leitor pesquise o que é um elipsóide e calcule o achatamento da Terra. Este achatamento é dado pela razão $\frac{a-b}{b}$, onde a é a medida do segmento de reta que tem extremos no Equador e no centro da Terra e, b é a medida do segmento de reta que tem extremos nos polos e no centro da Terra. Realizando o cálculo da razão acima, o leitor notará que o valor obtido será extremamente pequeno. Em virtude disso, neste trabalho, o modelo adotado para a Terra é a esfera.

Exemplo 2.1.2: Considere a Lua uma esfera cujo raio mede $1737,4 \text{ km}$. Qual é a razão entre o volume da Lua e o da Terra?

Resolução: Vamos aplicar o teorema 2.1.2.

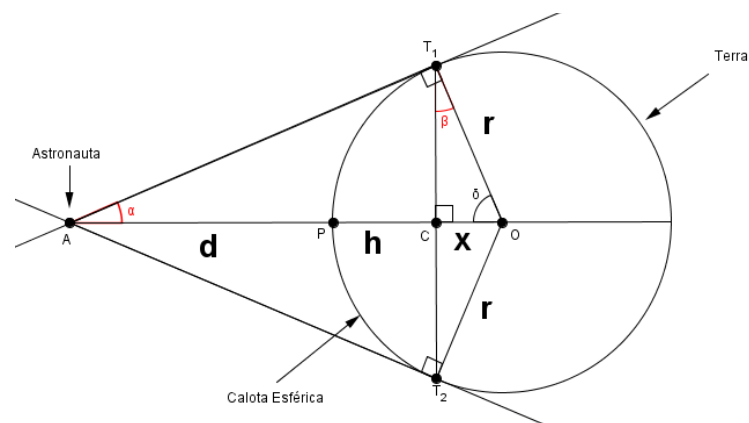
$$\text{Logo, } \frac{V_L}{V_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1737,4\text{km})^3}{\frac{4}{3}\pi(6370 \text{ km})^3} \cong 0,0203 \Rightarrow V_T = \frac{1}{0,0203} \cdot V_L \cong 49V_L. \text{ Daí, conclui-se que o volume}$$

da Lua é aproximadamente 49 vezes menor do que o da Terra.

Exemplo 2.1.3: Um astronauta em sua nave espacial consegue visualizar em certo momento exatamente $\frac{1}{6}$ da superfície da Terra. Determine a que distância ele está da superfície do nosso planeta, considerando 6370 km o raio da Terra. [Extraído e adaptado de Lima et al. (2006, p.299)].

Resolução: A fração visível da Terra pelo astronauta é uma calota esférica. Essa fração é o quociente entre a área da calota esférica e a área da superfície terrestre. Esta situação do astronauta é representada pela Figura 39.

Figura 39 – Distância entre a Terra e o Astronauta.



Fonte: Autores

Identificando elementos:

Os pontos A, P, C e O representam respectivamente o astronauta, o polo da calota esférica, o centro da circunferência que determina a calota e o centro da Terra. Tais pontos são colineares. Da Geometria Euclidiana Plana as retas $\overrightarrow{AT_1}$ e $\overrightarrow{AT_2}$ são tangentes à circunferência de centro O . Logo, os triângulos AT_1O e AT_2O são retângulos em T_1 e T_2 respectivamente e, também, congruentes (caso LAL). Os triângulos AT_1O e CT_1O são semelhantes (caso AA), logo, $\alpha = \beta$ e, também, retângulos. A distância entre o astronauta e a Terra é a distância entre os pontos A e P que é representada por d . A altura da calota é h , o raio da Terra é r e $x = r - h \Rightarrow h = r - x$.

Aplicando as relações trigonométricas (seno) no triângulo retângulo CT_1O , temos:

$$\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\text{sen}\alpha.$$

Pelo corolário 2.1.1 a área da calota esférica é

$$A_{calota} = 2\pi rh = 2\pi r(r - x) = 2\pi r(r - r\text{sen}\alpha) = 2\pi r^2(1 - \text{sen}\alpha).$$

Vamos chamar de F a fração visível.

$$\text{Logo, } F = \frac{2\pi r^2(1 - \text{sen}\alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1 - \text{sen}\alpha}{2}.$$

Agora, aplicando as relações trigonométricas (seno) no triângulo retângulo AT_1O , temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{r}{d+h+x} = \frac{r}{d+r}.$$

Então, segue que:

$$F = \frac{1 - \text{sen}\alpha}{2} = \frac{1 - \left(\frac{r}{d+r}\right)}{2} = \frac{\frac{d+r-r}{d+r}}{2} = \frac{d}{2(d+r)} \quad (2.1.1)$$

Portanto,

$$d = \frac{2Fr}{1-2F} \quad (2.1.2)$$

Vamos agora aplicar os dados na equação 2.1.2, onde $F = 1/6$ e $r = 6370 \text{ km}$.

$$\text{Então, } d = \frac{2 \times \frac{1}{6} \times 6370 \text{ km}}{1 - 2 \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{6370 \text{ km}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{6370 \text{ km}}{2} = 3185 \text{ km}.$$

Portanto, a distância entre o astronauta e a superfície da Terra é 3185 km.

As equações 2.1.1 e 2.1.2 são úteis para determinarmos a distância (d), o ângulo de visualização (2α) e a fração visível (F) de um astronauta ou um satélite em relação ao Planeta Terra e, também, em relação a outros corpos celestes.

Teorema 2.1.4 - Área do Fuso Esférico: A área do fuso esférico é $2\alpha r^2$, onde r é o raio da superfície esférica e α o ângulo do fuso.

Prova: A área do fuso esférico A_{fuso} está para a área da superfície esférica $4\pi r^2$, assim como o ângulo do fuso α (em radianos) está para 2π .

Logo,

$$\frac{A_{fuso}}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow A_{fuso} = 2\alpha r^2.$$

Na sequência, são apresentados e resolvidos outros três exemplos. O primeiro é uma aplicação direta do teorema 2.1.4. Para o segundo, se aplicam os teoremas 2.1.3 e 2.1.4. O terceiro, também se aplica o teorema 2.1.4, porém é necessário determinar o ângulo do fuso, uma vez que se conhece o raio da superfície esférica (raio da Terra). Para isso, uma conexão com a Geografia é realizada.

Exemplo 2.1.4: Um fuso de ângulo $\alpha = \pi$ é um hemisfério cuja área é $A_{fuso} = 2\pi r^2$, isto é, a área de um fuso de ângulo $\alpha = \pi$ é igual à metade da área da superfície esférica que o contém.

Exemplo 2.1.5: Qual é a razão entre a área de um fuso de ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e a área da superfície esférica que o contém?

Resolução: Pelo teorema 2.1.4, temos: $A_{fuso} = 2\alpha r^2 = \pi r^2$.

Logo, $\frac{A_{fuso}}{A_S} = \frac{\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow A_S = 4A_{fuso}$. Neste exemplo, a área da superfície esférica é 4 vezes maior do que a área do fuso.

Exemplo 2.1.6: A Terra leva 24 horas ou um dia para dar uma volta completa em torno do seu eixo (movimento de rotação). Determine a área de um fuso esférico contido na superfície terrestre que corresponde ao intervalo de uma hora.

Resolução: A área do fuso é dada por $2\alpha r^2$, onde $r = 6370 \text{ km}$ é o raio da Terra e α (radiano) o ângulo do fuso. Devemos determinar o valor de α .

Para isso temos que 2π (uma volta completa) está para α , assim como $24h$ está para $1h$.

$$\text{Logo, } \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{24h}{1h} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} = 15^\circ.$$

A necessidade de dividir a Terra em 24 partes aproximadamente iguais, uma vez que ela leva 24 horas para realizar seu movimento de rotação, resultou no que se chama de **fuso horário**. Cada fuso horário corresponde a uma faixa limitada por dois meridianos, distantes 15° um do outro. Isto quer dizer que no intervalo de uma hora a Terra girou entorno do seu eixo polar (da esquerda para a direita) 15° .

Um fato interessante é que temos localidades distintas situadas dentro de um mesmo fuso horário. A hora marcada nos relógios de tais localidades será a mesma. Isso se chama **hora oficial**. Por exemplo: as cidades de Brasília, Londrina e Foz do Iguaçu estão situadas em meridianos distintos, porém, estão no mesmo fuso horário e têm a mesma hora oficial, que neste caso é o de Brasília, entretanto não têm a mesma hora verdadeira em virtude de estarem localizadas em diferentes meridianos.

Voltando ao enunciado do exemplo vamos calcular a área do fuso.

$$\text{Então, } A_{fuso} = 2\alpha r^2 = 2 \times \frac{\pi}{12} \times (6370 \text{ km})^2 = 21\,246\,015,16 \text{ km}^2.$$

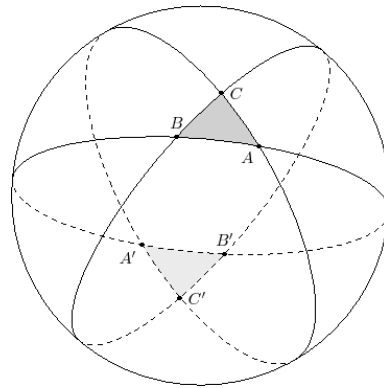
Portanto a área de um fuso esférico contido na superfície terrestre que corresponde ao intervalo de uma hora, isto é, 15° é igual a $21\,246\,015,16 \text{ km}^2$. Isso equivale aproximadamente à área de $1\,967\,223\,626$ campos de futebol cujas dimensões são $(120m \times 90m)$. Aqui sugerimos que o leitor verifique que a área do fuso corresponde a área da quantidade de campos de futebol informada.

Na sequência apresentamos alguns conceitos e resultados a respeito de triângulos esféricos.

Definição 2.1.12 – Triângulo Esférico: Uma figura sobre a superfície esférica S chama-se *triângulo esférico* quando está contida propriamente em algum hemisfério e é limitada por três arcos de circunferências máximas, os quais são os seus lados.

Tais arcos são menores do que uma semicircunferência máxima (Figura 40).

Figura 40 – Triângulo esférico ABC e seu antípoda $A'B'C'$.

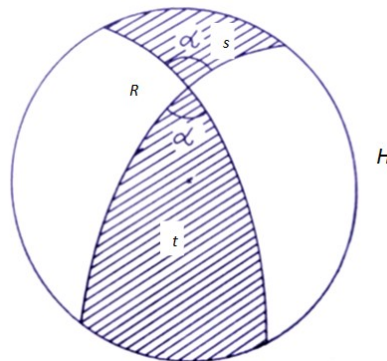


Fonte: <<http://images.planetmath.org/cache/objects/5841/js/img2.png>> Acesso em 16/03/2013.

O teorema abaixo é de grande importância, uma vez, que por meio dele provamos neste trabalho o clássico resultado da Geometria Esférica: A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que dois ângulos retos (180°).

Teorema 2.1.5: Seja Φ (fi) um fuso completo (Figura 41: $\Phi = \varphi \cup \varphi'$), cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da superfície esférica S a decompõe em dois hemisférios H e H' ($S = H \cup H'$). As partes R e R' do fuso completo Φ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.

Figura 41 – A Região hachurada (parte tracejada) $R = t \cup s$ é a parte de um fuso completo a qual pertence a um hemisfério H arbitrário. A área da região R é igual a $2\alpha r$.



Fonte: Lima (2011a, p. 97).

Prova: Baseada em Lima (2011a).

Vamos provar que as partes R e R' do fuso completo Φ tem a mesma área, pois, se $A_\Phi = A_R + A_{R'} = 2A_R$ então, $A_R = \frac{A_\Phi}{2} = 2\alpha r^2$.

Onde, A_Φ : é a área do fuso completo, A_R e $A_{R'}$ são respectivamente as áreas de R e R' .

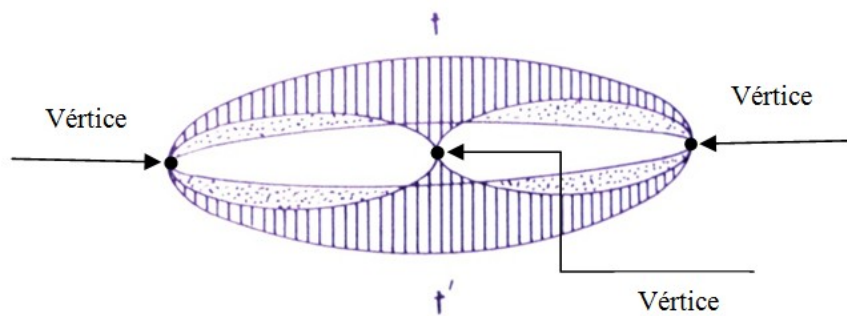
Pode-se notar que R e R' formam *figuras antípoda*s, isto é, cada ponto de R é o antípoda de um ponto de R' e vice-versa.

Conforme a Figura 41, R é a reunião de dois triângulos esféricos s e t com um vértice em comum, isto é, $R = s \cup t$. Por outro lado, R' é a reunião dos *triângulos antípodas* de s e t , ou seja, $R' = s' \cup t'$. Agora, basta provarmos que um triângulo esférico, por exemplo, t e seu antípoda t' têm áreas iguais.

Podemos observar que t e t' tem ângulos de mesma medida e lados congruentes, dois a dois, porém, t e t' não são congruentes, isto é, não é possível, por um movimento rígido, mover um deles no espaço até sobrepor-se exatamente sobre o outro, ao menos que t e t' sejam isósceles.

Veremos agora, por meio das Figuras 42 e 43, duas tentativas de sobrepor t e t' .

Figura 42 – Triângulos esféricos t e t' , com os três vértices coincidindo.

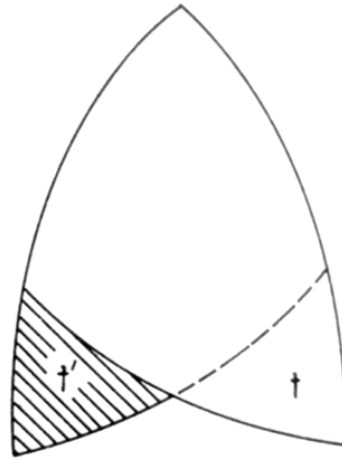


Fonte: Lima (2011a, p. 97).

Na figura acima os vértices do triângulo esférico t coincidem com os vértices do triângulo t' .

Já na Figura 43, coincide-se um ângulo de t com outro ângulo igual de t' .

Figura 43 – Triângulos esféricos t e t' , coincidindo um ângulo de t com outro ângulo igual de t' .



Fonte: Lima (2011a, p. 97).

Podemos observar que se t e t' são isósceles, então t é congruente ao seu antípoda t' . Logo, t e t' tem a mesma área, isto é, $A_t = A_{t'}$.

De um modo geral, para mostrarmos que os triângulos t e t' têm áreas iguais, procederemos assim:

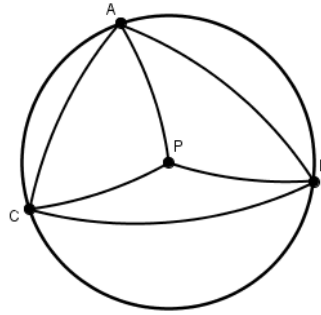
Sejam A , B e C os vértices do triângulo esférico t . A intersecção entre um plano Π que passa por A , B e C e a superfície esférica S é uma pequena circunferência \mathcal{C}_{ABC} e, portanto, o plano Π divide a superfície esférica S em duas calotas esféricas, onde uma dessas calotas contém o triângulo t .

Seja P o polo dessa calota. P é o ponto de intersecção da calota com a reta perpendicular ao plano Π que passa pelo centro da pequena circunferência \mathcal{C}_{ABC} .

Os arcos de circunferência máxima PA , PB , e PC tem o mesmo comprimento. Logo, os triângulos esféricos PAB , PAC e PBC são isósceles.

Se o ponto P estiver no interior do triângulo esférico $t = ABC$ (Figura 44), temos que $A_t = A_{PAB} + A_{PAC} + A_{PBC}$. Então, uma construção análoga pode ser feita com o triângulo antípoda $t' = A'B'C'$, decompondo-o como a reunião justaposta dos triângulos isósceles $P'A'B'$, $P'A'C'$ e $P'B'C'$, cada uma deles antípoda do seu correspondente em t . Daí segue que $A_t = A_{t'}$.

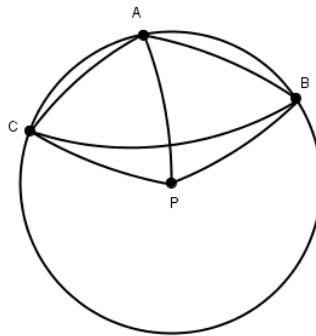
Figura 44 – O Ponto P está no interior do triângulo esférico ABC .



Fonte: Lima (2011a, p. 98)

Se o ponto P estiver no exterior do triângulo esférico $t = ABC$ (Figura 45), temos que $A_t = A_{PAB} + A_{PAC} - A_{PBC}$. Uma situação análoga ocorre com o triângulo antípoda $t' = A'B'C'$. Daí, como no caso anterior, concluímos que $A_t = A_{t'}$.

Figura 45 – O Ponto P está no exterior do triângulo esférico ABC .



Fonte: Lima (2011a, p. 98)

Portanto, o teorema 2.1.5 está provado.

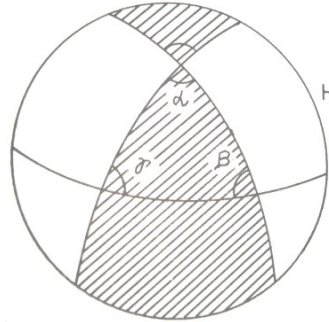
Vamos agora, provar o teorema que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que dois ângulos retos. Na Geometria Euclidiana essa soma é sempre igual a dois ângulos retos. Para provar este resultado euclidiano, basta traçar por um dos vértices de um triângulo plano uma reta paralela à reta que passa pelos outros dois lados e considerar ângulos alternos internos.

Teorema 2.1.6 – Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico: Se α , β e γ são as medidas (em radianos) dos ângulos internos de um triângulo esférico, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, onde a é a área desse triângulo e r o raio da superfície esférica.

Prova: Baseada em Lima (2011a).

Vamos considerar um hemisfério H da superfície esférica que contenha o triângulo dado. Veja a Figura 46.

Figura 46 – Hemisfério H , triângulo esférico e a região R_α .



Fonte: Lima (2011a, p. 99).

Prolongando os lados que formam o ângulo α nos dois sentidos até intersectarem o bordo do hemisfério H , obtemos uma região R_α contida em H tal que, pelo teorema 2.1.5, a área dessa região é igual a $2\alpha r^2$, isto é, $A_{R_\alpha} = 2\alpha r^2$.

Analogamente para os ângulos β e γ , obtemos as regiões R_β e R_γ , cujas áreas são respectivamente $A_{R_\beta} = 2\beta r^2$ e $A_{R_\gamma} = 2\gamma r^2$.

Reunindo as regiões R_α , R_β e R_γ obtemos o hemisfério H . Entretanto, fazendo isso, o triângulo esférico foi contado três vezes, duas vezes a mais do que devia.

Pelo teorema 2.1.3 a área do hemisfério H é igual a $2\pi r^2$, isto é, $A_H = 2\pi r^2$.

Logo, $A_{R_\alpha} + A_{R_\beta} + A_{R_\gamma} = A_H + 2a$

Fazendo as substituições, temos: $2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2a$

Dividindo a equação acima por $2r^2$, obtemos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2} \quad (2.1.3)$$

O que conclui a nossa prova.

A equação (2.1.3) é conhecida como a fórmula de Girard, um geômetra francês que a demonstrou em 1629. Ela, também mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que dois ângulos retos, isto é, $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$, pois, $\frac{a}{r^2} > 0$.

A equação (2.1.3) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{a}{r^2} = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi \quad (2.1.4)$$

A equação (2.1.4) representa o “excesso esférico”, isto é, em quanto à soma dos ângulos internos do triângulo esférico excede π . Deve-se tomar cuidado, pois, a diferença do lado direito é sempre maior do que zero.

Reescrevendo a equação (2.1.4) temos

$$a = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2 \quad (2.1.5)$$

A equação (2.1.5) representa a área do triângulo esférico que está contido em superfície esférica de raio r .

Para um triângulo esférico de área muito pequena, isto é, quando a tende para zero o excesso esférico (equação 2.1.4) é insignificante e, então a soma $\alpha + \beta + \gamma$ tende para $\pi = 180^\circ$, porém, não assume este valor.

Verificando:

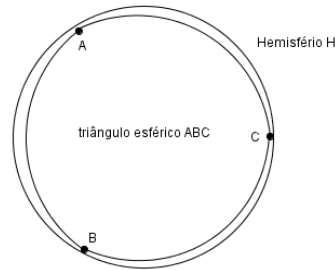
Se a tende para zero, temos: $0 = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$. Então, como $r^2 > 0$ conclui-se que $\alpha + \beta + \gamma$ tende para π (rad) = 180° .

Por outro lado podemos imaginar um triângulo esférico (Figura 47) que ocupe quase todo o hemisfério que o contém. Para isso tome os três vértices equidistantes e bem próximos da circunferência máxima que separa um hemisfério do outro. Lembre-se que no outro hemisfério temos o triângulo antípoda. Logo, se isso ocorrer a área a do triângulo esférico tende para $2\pi r^2$ que é a área do hemisfério, então a soma $\alpha + \beta + \gamma$ tende para 3π (rad) = 540° , entretanto, não assume este valor.

Verificando:

Se a tende para $2\pi r^2$, temos: $2\pi r^2 = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma$ tende para 3π .

Figura 47 – Triângulo esférico ABC cobrindo quase todo o hemisfério H .



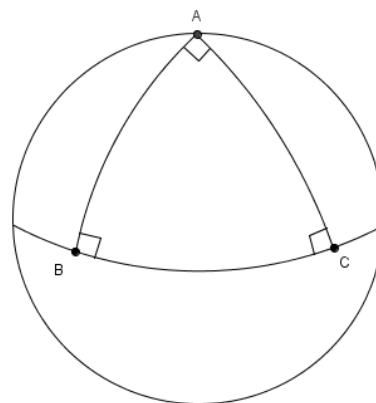
Fonte: Autores.

Assim, pela verificação realizada anteriormente, concluímos que para qualquer triângulo esférico temos $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$.

O próximo exemplo destaca que um triângulo esférico pode ter até três ângulos retos, o que não ocorre na Geometria Euclidiana.

Exemplo 2.1.7: Vamos considerar um triângulo esférico sobre uma superfície esférica de raio arbitrário que tem um lado sobre o Equador e um vértice em algum dos polos. Então os outros dois lados serão arcos de meridianos e formarão ângulos retos na intersecção com o Equador. Se a base for um arco de um quarto do Equador, os três ângulos deste triângulo serão todos retos, isto é, a soma dos ângulos internos é 270° (Figura 48).

Figura 48 – Triângulo Trirretângulo.



Fonte: Autores.

A observação a seguir traz algumas nomenclaturas a respeito de triângulos esféricos.

Observação 2.1.1: Um triângulo esférico que tem três ângulos retos é chamado de triângulo *trirretângulo*. Entretanto, se tem dois ângulos retos é dito triângulo *birretângulo*. Vale lembrar que os lados dos triângulos esféricos são arcos de circunferências máximas cuja medida (de cada lado) é menor do que πr , onde r é o raio da superfície esférica que os contém. Cada lado de um triângulo esférico está associado ao ângulo central²⁷ da circunferência máxima que o contém. Assim, um triângulo esférico que tem um lado medindo 90° é chamado de *retilátero*. Se o triângulo têm dois lados medindo 90° cada um é dito *birretilátero*. Entretanto, se os três lados medem 90° ele se chama *trirretilátero*. Convém notar que um triângulo esférico é trirretângulo se, e só se é trirretilátero. Em um triângulo trirretilátero os lados têm o mesmo comprimento.

O exemplo a seguir é uma aplicação da equação 2.1.5 (cálculo da área de um triângulo esférico)

Exemplo 2.1.8: Prove que a área de um triângulo esférico trirretilátero é igual a um oitavo da área da superfície esférica associada.

Prova: Como o triângulo é trirretilátero, ele também é trirretângulo, isto é, seus ângulos internos medem $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (*rad*). Seja r o raio da superfície esférica.

Então, aplicando a equação 2.1.5 temos:

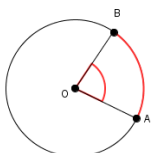
$$a = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi\right)r^2 = \frac{\pi}{2}r^2.$$

Pelo teorema 2.1.3 temos que a área da superfície esférica é $A_S = 4\pi r^2$.

Logo,

$$\frac{a}{A_S} = \frac{\frac{\pi}{2}r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{A_S}{8}.$$

²⁷ Um ângulo central de uma circunferência é um ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Se A e B são dois pontos distintos de uma circunferência então o arco AB é o correspondente ao ângulo central que determina o arco AB .



Um dos teoremas mais conhecido no meio escolar é o Teorema de Pitágoras, entretanto, o exemplo a seguir apresenta uma discussão a acerca da sua validação na Geometria Esférica.

Exemplo 2.1.9: O triângulo esférico da Figura 48 tem pelo menos um ângulo reto. Então, aí surge uma questão: Será que o Teorema de Pitágoras é válido em uma superfície esférica?

De acordo com Silva (2011) o Teorema de Pitágoras não vale na superfície esférica. Para verificar isso, vamos aplicar o método de redução a um absurdo. Então, considerando o triângulo trirretângulo da Figura 48 que também é trirretilátero (cada lado mede 90°), temos que os lados (arcos) do triângulo esférico ABC têm o mesmo comprimento $l > 0$.

Agora, supondo que o Teorema de Pitágoras vale na superfície esférica, temos:

$l^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow l = 0$, o que é um absurdo, pois, um lado não pode ter comprimento nulo.

Portanto, na Geometria Esférica o Teorema de Pitágoras não se verifica.

O próximo exemplo visa determinar a área de um triângulo esférico contido na superfície da Terra. Entretanto, os ângulos internos do triângulo são dados em graus e, para que a equação 2.1.5 seja aplicada, os ângulos devem ser convertidos em radianos.

Exemplo 2.1.10: Determine a área de um triângulo esférico que está contido na superfície terrestre, onde $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 135^\circ$ e $\gamma = 60^\circ$.

Resolução:

Considerando o raio da Terra igual a 6370 km.

Como π (rad) equivale a 180° , então $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ e $\gamma = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Agora, aplicando os dados na equação 2.1.5, temos:

$$a = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \pi\right)(6370 \text{ km})^2 = 74\,361\,053,05 \text{ km}^2.$$

Portanto, a área do triângulo esférico é igual a $74\,361\,053,05 \text{ km}^2$.

As seis atividades que propomos na sequência tem por objetivos trabalhar e fixar os resultados que elencamos sobre triângulos esféricos.

A primeira atividade objetiva uma reflexão sobre as possibilidades para a existência de um triângulo esférico, no que diz respeito à soma dos ângulos internos.

A segunda busca verificar o quanto a soma dos ângulos internos é maior do que 180° e, também, procura trabalhar com a conversão de unidades.

A terceira visa o cálculo da área de um triângulo esférico, que depende da medida do raio da esfera em que tal triângulo está contido, porém, para isso, é necessário converter unidades para aplicar a equação 2.1.5.

A quarta objetiva refletir sobre a existência de polígonos esféricos contidos em uma superfície esférica, além de realizar uma demonstração da área de um quadrilátero esférico conhecendo a área de um triângulo esférico.

A quinta é uma generalização da quarta atividade, em que objetiva deduzir a área de um polígono esférico de n lados ($n \geq 3$) a partir da área de um triângulo esférico.

A sexta atividade é uma aplicação do resultado obtido na quarta atividade.

Atividade proposta 2.1.1: Existe um triângulo esférico cujos ângulos internos medem:

- a) 152° , 136° e 148° ? Justifique.
- b) 180° , 180° e 180° ? Justifique.
- c) 90° , 55° e 35° ? Justifique.

Atividade proposta 2.1.2: Qual é o excesso esférico de um triângulo esférico cujos ângulos internos medem 117° , 84° e 96° ?

- a) Expresse em graus;
- b) Expresse em radianos;
- c) Expresse em ângulos retos.

Atividade proposta 2.1.3: Determine a área de um triângulo esférico que está contido em uma superfície esférica de diâmetro igual a 12 metros, cujos ângulos medem 82° , 98° e 100° .

Atividade proposta 2.1.4: Mostre que a área de um quadrilátero esférico é dada por, $(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi)r^2$, onde, r é o raio da superfície esférica em que o quadrilátero está

contido e, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (em radianos) os ângulos do quadrilátero. **Sugestão:** Decomponha o quadrilátero esférico em dois triângulos esféricos.

Atividade proposta 2.1.5: Deduza a área de um polígono esférico de n lados ($n \geq 3$).

Sugestão: Decomponha o polígono esférico em $(n - 2)$ triângulos esféricos.

Atividade proposta 2.1.6: Calcule a área de um quadrilátero esférico que está sobre a superfície terrestre, sabendo que todos seus ângulos são iguais a 100° .

A seguir apresentamos um exemplo que descreve uma situação real a respeito do deslocamento de um navio sobre a superfície terrestre. Para resolvê-lo vamos considerar que tal deslocamento ocorre sobre uma circunferência máxima. Da Geometria Euclidiana Plana, é possível calcular a medida de um arco de circunferência.

Exemplo 2.1.11: Em alto mar, quantos quilômetros um navio percorre quando se move em 1° de circunferência máxima.

Resolução: Queremos determinar o comprimento de um arco de circunferência máxima sobre a superfície da Terra que está associado a um ângulo central cuja medida é igual a 1° . Logo, comprimento l do arco está para o comprimento $2\pi r$ da circunferência máxima assim como o ângulo central (1°) que determina o arco está para o ângulo de uma volta (360°).

Então,

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{1^\circ}{360^\circ} \Rightarrow l = \frac{2\pi r}{360} = \frac{2\pi \times (6370 \text{ km})}{360} \cong 111,17 \text{ km}.$$

Portanto, o navio percorre $111,17 \text{ km}$ quando se desloca em 1° grau de circunferência máxima sobre a superfície terrestre.

Tomando como ponto de partida o exemplo 2.1.11, vamos definir distância entre dois pontos distintos na Geometria Esférica. Lembre-se que na Geometria Euclidiana, a trajetória de menor comprimento ligando dois pontos distintos A e B é o segmento de reta AB e seu comprimento \overline{AB} é a distância entre eles. Entretanto, na Geometria Esférica isso não se verifica. Logo, para definirmos distância na Geometria Esférica, precisamos compreender inicialmente o que é uma *geodésica*.

Definição 2.1.13 – Geodésica: A curva que minimiza a distância entre dois pontos distintos em uma superfície é chamada de *geodésica*.

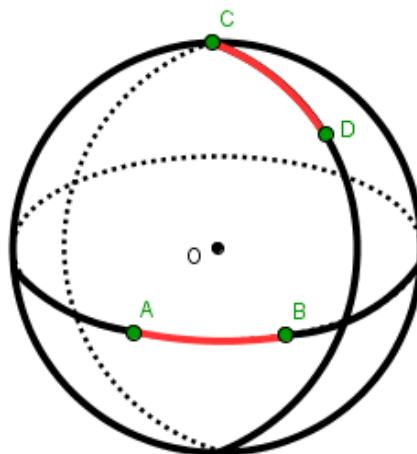
Observação 2.1.2: Na Geometria Euclidiana, uma geodésica é uma reta. Já na Geometria Esférica uma geodésica é uma circunferência máxima. Em algumas ocasiões a palavra “reta” é usada na Geometria Esférica fazendo referência a uma circunferência máxima, entretanto, deve-se enfatizar que isto é um abuso de linguagem.

Definição 2.1.14 – Distância entre dois pontos distintos em uma superfície esférica: A distância entre dois pontos distintos em uma superfície esférica é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa esses pontos.

Destacamos que Murray (1908) prova que este arco é o caminho mais curto que pode ser traçado sobre a superfície da esfera ligando tais pontos. Alves (2009, p. 74 - 76) também prova este resultado.

A Figura 49 representa uma superfície esférica e ilustra a definição 2.1.14. Nela temos uma circunferência máxima passando pelos pontos A e B e, outra passando pelos pontos C e D . Vamos fixar nossa atenção nos arcos AB e CD (em vermelho). Tais arcos são aqueles que têm o menor comprimento que une cada par de pontos respectivamente.

Figura 49 – AB e CD – menor arco de circunferência máxima.



Fonte: Autores.

Até aqui, identificamos vários resultados específicos à Geometria Esférica. Desta forma, o nosso intuito agora é apresentar, por meio do quadro 2.1.2, uma lista de implicações conceituais contendo questões formuladas baseadas na teoria da Geometria Euclidiana e da Geometria Esférica, visando compará-las.

Quadro 2.1.2 – Geometria Euclidiana x Geometria Esférica.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
1. Qual é o polígono de menor número de lados?	1. Qual é o polígono de menor número de lados?
2. Se colocarmos dois pontos distintos em uma reta, como fica dividida esta reta?	2. Se colocarmos dois pontos distintos em uma circunferência máxima, como ela fica dividida?
3. Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?	3. Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?
4. O que ocorre quando se traça duas retas em um mesmo plano?	4. O que ocorre quando se traça duas circunferências máximas em uma mesma superfície esférica?
5. Em quantas regiões podem três retas dividir o plano?	5. Em quantas regiões podem três circunferências máximas dividir a superfície esférica?
6. Quantos ângulos retos um triângulo euclidiano pode ter?	6. Quantos ângulos retos um triângulo esférico pode ter?
7. Qual é o caminho mais curto entre dois pontos distintos no plano?	7. Qual é o caminho mais curto entre dois pontos distintos na superfície esférica?
8. No plano, retas concorrentes se intersectam em quantos pontos?	8. Na superfície esférica, circunferências máximas se intersectam em quantos pontos?
9. No plano, duas retas perpendiculares determinam quantos ângulos retos?	9. Na superfície esférica, duas circunferências máximas perpendiculares determinam quantos ângulos retos?
10. Quantas retas passam por dois pontos distintos?	10. Quantas circunferências máximas passam por dois pontos antípodas?
11. Por um ponto fora de uma reta, passam quantas retas paralelas à reta dada?	11. Existem “retas” paralelas na superfície esférica? Por quê?

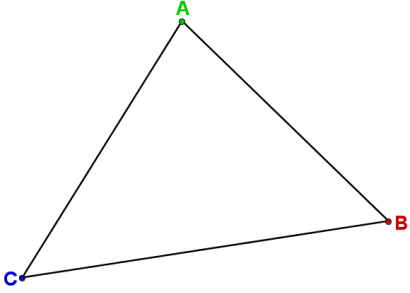

Fonte: Autores.

Uma maneira experimental de comparar a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica é trabalhar com *softwares* de geometria dinâmica, por exemplo: o *GeoGebra*²⁸ e, com materiais concretos, como: alfinetes, látex colorido, esferas de isopor, canudos de refrigerante, transferidores e etc.

Logo, com o intuito de compararmos as Geometrias Euclidiana e Esférica, apresentamos na sequência onze (11) quadros procurando responder a cada uma das questões elencadas no quadro 2.1.2, em que utilizamos os recursos didáticos citados acima.

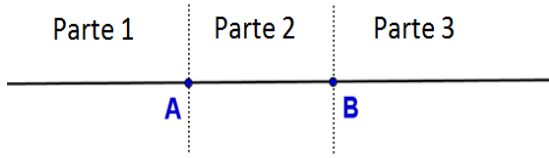
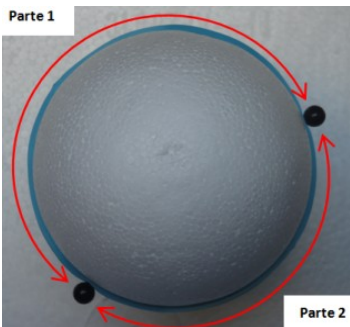
²⁸ O *GeoGebra* é um software de Matemática dinâmica gratuito para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema.

Quadro 2.1.2.1 – Polígono de menor número de lados na Geometria Euclidiana e Esférica.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Qual é o polígono de menor número de lados?	Qual é o polígono de menor número de lados?
No plano, o triângulo é o polígono de menor número de lados enquanto na superfície esférica é o biângulo, cujos lados são formados por duas semicircunferências máximas distintas e, seus vértices são diametralmente opostos.	
	

Fonte: Autores.

Quadro 2.1.2.2 – Uma reta e uma circunferência máxima sendo separadas por dois pontos distintos.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Se colocarmos dois pontos distintos em uma reta, como fica dividida esta reta?	Se colocarmos dois pontos distintos em uma circunferência máxima, como ela fica dividida?
Na Geometria Euclidiana dois pontos distintos separam uma reta em três partes, já na Geometria Esférica, separam uma circunferência máxima em apenas duas partes.	
	

Fonte: Autores.


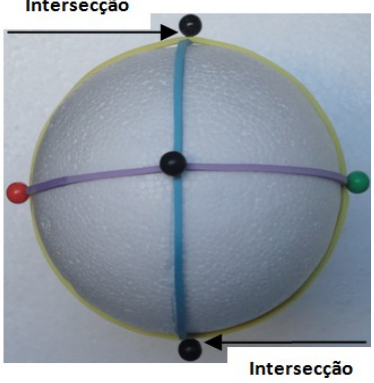
Quadro 2.1.2.3 – Medindo ângulos de triângulos planos e esféricos.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?	Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?
No plano, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos, enquanto que, na superfície esférica, a soma é maior do que 180° . Para aferir as medidas dos ângulos internos do triângulo esférico podemos utilizar o transferidor sobrepondo-o nos canudos de refrigerante, que representam as retas tangentes em cada vértice (vide definição 2.1.9), e registrar cada medida para somá-las e assim, verificar que a soma é maior do que 180° .	



Fonte: Autores.

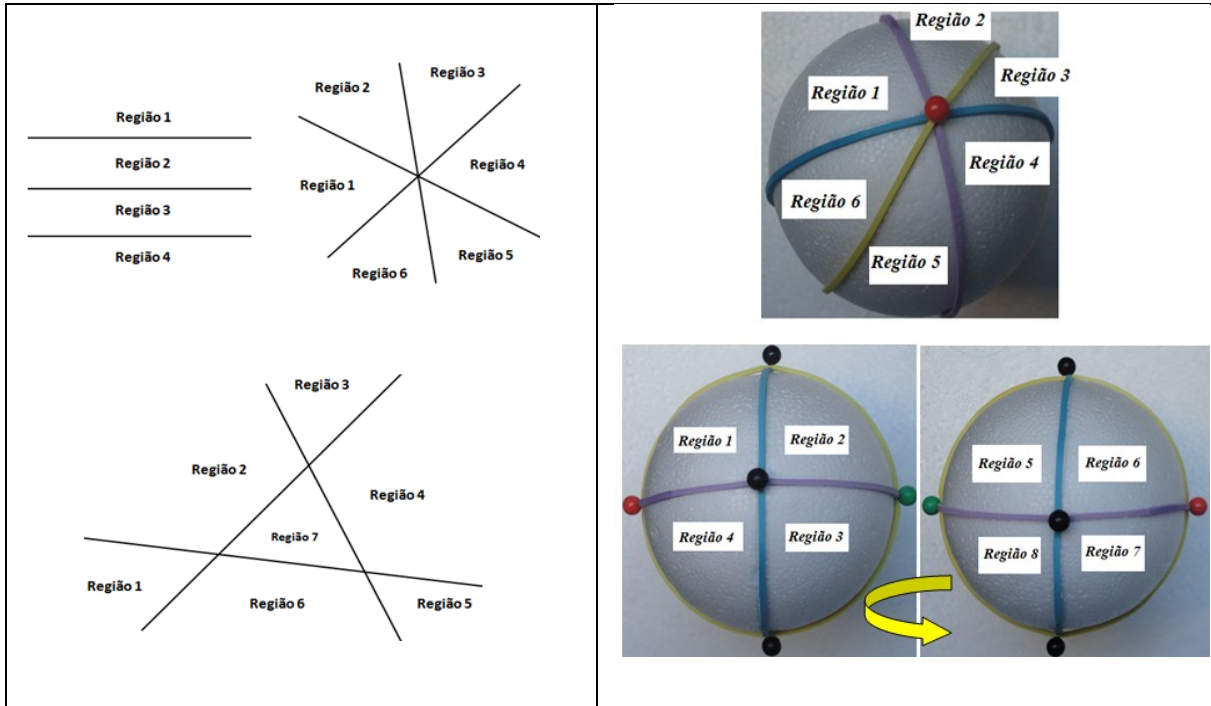
Quadro 2.1.2.4 – Posição relativa de duas retas no plano e duas circunferências máximas na superfície esférica.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
O que ocorre quando se traça duas retas em um mesmo plano?	O que ocorre quando se traça duas circunferências máximas em uma mesma superfície esférica?
No plano, duas retas podem ser coincidentes, paralelas ou concorrentes. Já na superfície esférica duas circunferências máximas podem ser coincidentes ou concorrentes uma vez, que sempre se intersectam em pontos diametralmente opostos.	
<p style="text-align: center;"> $\overline{\hspace{2cm}}$ r = s (retas coincidentes) </p> <p style="text-align: center;"> $\overline{\hspace{2cm}}$ r $\overline{\hspace{2cm}}$ s (r e s retas paralelas) </p> <p style="text-align: center;">  (r e s retas concorrentes) </p>	

Fonte: Autores.

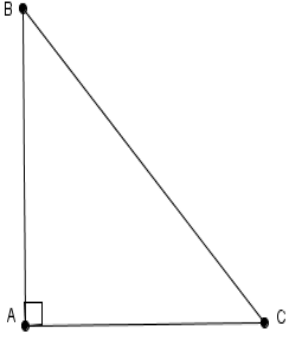
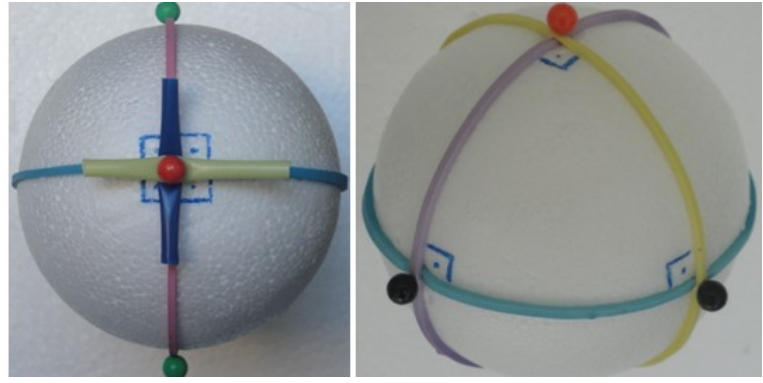
Quadro 2.1.2.5 – Número de regiões do plano e da superfície esférica.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Em quantas regiões podem três retas distintas dividir o plano?	Em quantas regiões podem três circunferências máximas distintas dividir a superfície esférica?
Quando se traça três retas distintas na Geometria Euclidiana o plano pode ser dividido em 4, 6 ou 7 regiões, entretanto, na Geometria Esférica quando se traçam três circunferências máximas distintas a superfície esférica pode ser dividida em 6 ou 8 regiões. Três circunferências máximas que passam pelos mesmos pontos diametralmente opostos dividem a superfície esférica em seis regiões. Entretanto, duas circunferências máximas que passam pelos mesmos pontos antípodas e outra que não passa, dividem a superfície esférica em oito regiões.	



Fonte: Autores.

Quadro 2.1.2.6 – Ângulos retos em triângulos planos e esféricos.

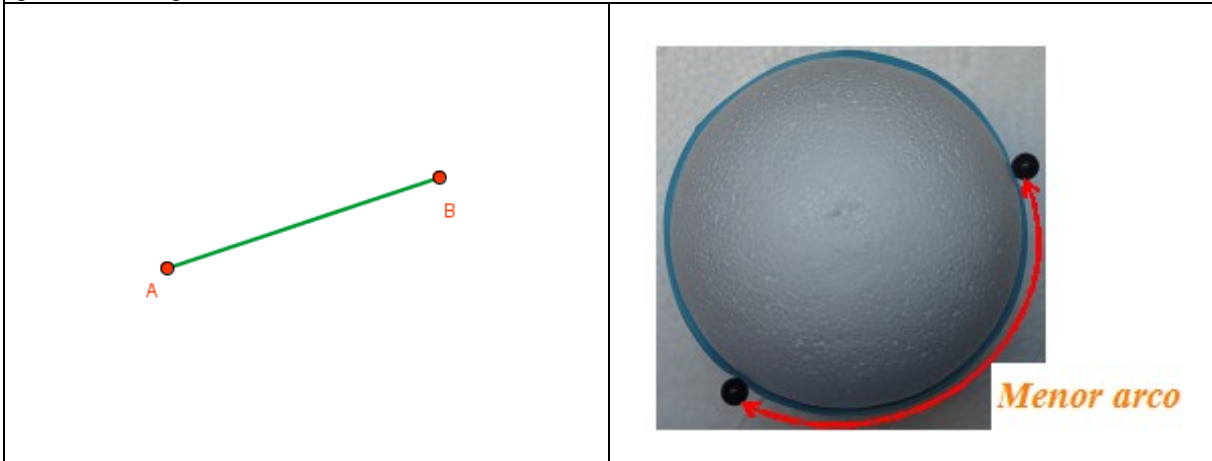
Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Quantos ângulos retos um triângulo euclidiano pode ter?	Quantos ângulos retos um triângulo esférico pode ter?
No plano um triângulo pode ter no máximo um ângulo reto, enquanto que na superfície esférica três ângulos retos. No plano, um triângulo ou tem um ou nenhum ângulo reto. Já na superfície esférica um triângulo ou tem três, ou tem dois, ou tem um ou nenhum ângulo reto. Deve-se lembrar que cada meridiano é perpendicular ao Equador (vide exemplo 2.1.7).	
	

Fonte: Autores.

Quadro 2.1.2.7 – Conceito de distância na Geometria Euclidiana e Esférica.

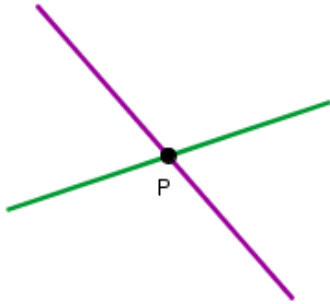
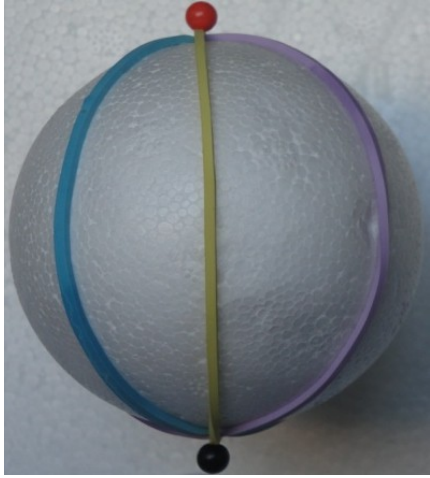
Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Qual é o caminho mais curto entre dois pontos distintos no plano?	Qual é o caminho mais curto entre dois pontos distintos na superfície esférica?
Na Geometria de Euclides o menor caminho entre dois pontos distintos é um segmento de reta que tem os extremos nesses pontos. Enquanto na Geometria Esférica é o menor arco de circunferência máxima que passa	

por esses dois pontos.



Fonte: Autores.

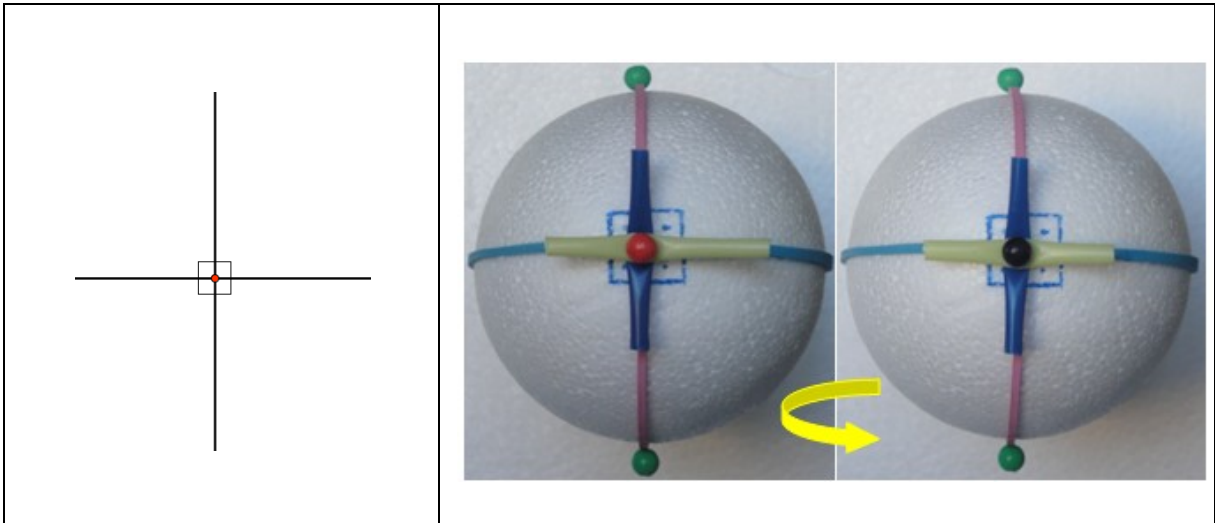
Quadro 2.1.2.8 – Quantidade de pontos da intersecção.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
No plano, retas concorrentes se intersectam em quantos pontos?	Na superfície esférica, circunferências máximas se intersectam em quantos pontos?
No plano, duas retas concorrentes se intersectam em um único ponto. Já na superfície esférica duas “retas” (circunferências máximas) se intersectam sempre em dois pontos distintos chamados de antípodas, isto é, pontos diametralmente opostos.	
	

Fonte: Autores.

Quadro 2.1.2.9 – Número de ângulos retos.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
No plano, duas retas perpendiculares determinam quantos ângulos retos?	Na superfície esférica, duas circunferências máximas perpendiculares determinam quantos ângulos retos?
Na Geometria Euclidiana duas retas perpendiculares determinam sempre quatro ângulos retos enquanto que na superfície esférica duas “retas” perpendiculares sempre determinam oito ângulos retos.	



Fonte: Autores.

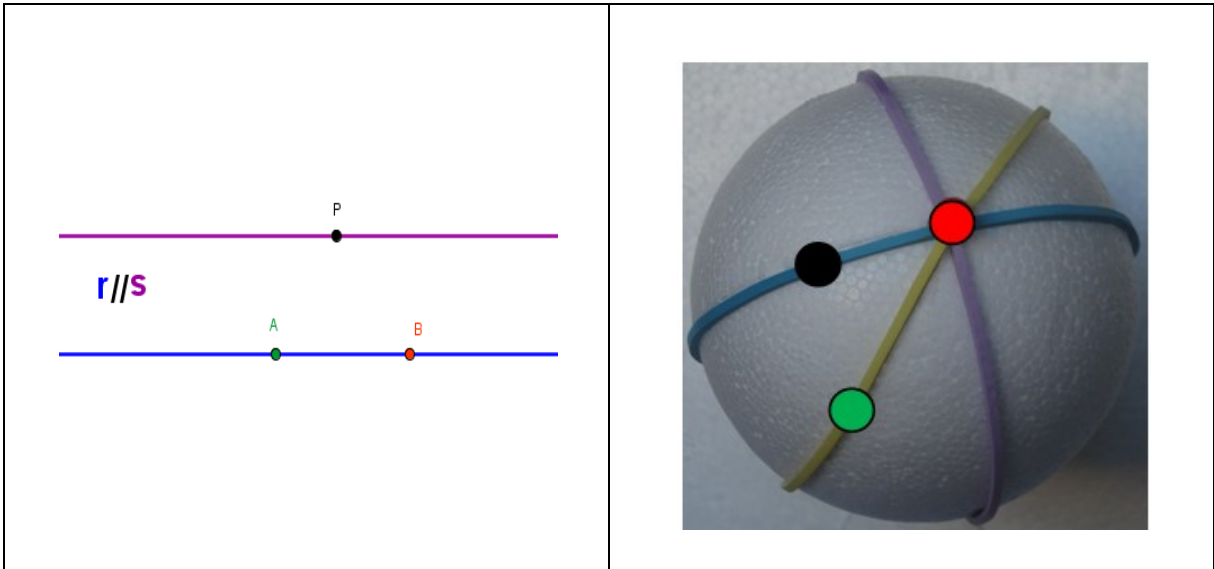
Quadro 2.1.2.10: Uma única reta passando por dois pontos distintos e infinitas circunferências máximas passando por dois pontos antípodas.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Quantas retas passam por dois pontos distintos?	Quantas circunferências máximas passam por dois pontos antípodas?
Por dois pontos distintos no plano passa uma única reta já na superfície esférica por dois pontos antípodas passam infinitas circunferências máximas.	

Fonte: Autores.

Quadro 2.1.2.11: Número de retas e circunferências máximas paralelas.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Por um ponto fora de uma reta, passam quantas retas paralelas à reta dada?	Existem “retas” paralelas na superfície esférica? Por quê?
Na Geometria de Euclides, passa uma única reta paralela por um ponto fora de uma reta dada, enquanto que na Geometria Esférica não há “retas” paralelas, uma vez que quaisquer duas circunferências máximas sempre se intersectam em dois pontos antípodas. Aqui, temos uma situação em que se nega o quinto postulado.	



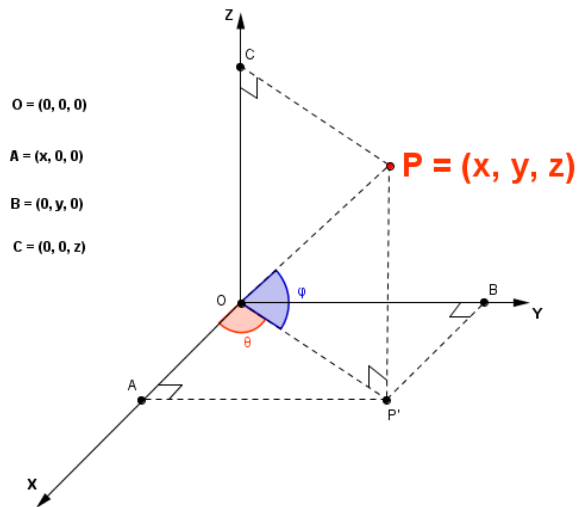
Fonte: Autores.

Acreditamos que as comparações realizadas nos onze (11) quadros, possibilitam ao leitor uma reflexão acerca das diferenças conceituais entre as Geometrias Euclidiana e Esférica e, também, ao professor uma alternativa de explorar tais geometrias em sala de aula por meio de materiais manipuláveis e *softwares* de geometria dinâmica, como por exemplo, o *GeoGebra*.

Na próxima seção vamos introduzir o sistema de coordenadas cartesianas no espaço e, com resultados da Geometria Analítica apresentamos as equações reduzida e geral de uma superfície esférica.

2.2 Coordenadas Cartesianas

Seja E o espaço euclidiano tridimensional. O espaço euclidiano tridimensional é o produto cartesiano de três conjuntos iguais a \mathbb{R} (Conjunto dos Números Reais), isto é, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y \text{ e } z \in \mathbb{R}\}$. Devemos lembrar que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ representa a reta real e, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ representa o plano cartesiano. Vamos agora, considerar um sistema de três eixos ortogonais OX , OY e OZ de coordenadas cartesianas (coordenadas retangulares) com origem no ponto O . Indicamos tal sistema por $OXYZ$. A escolha do sistema $OXYZ$ tem o objetivo de associarmos cada ponto P do espaço a um terno ordenado (x, y, z) de números reais, chamados de coordenadas do ponto P .

Figura 50 – Sistema $OXYZ$.

Fonte: Autores.

De acordo com a Figura 50, podemos notar que para o ponto P , há dois ângulos θ (teta) e φ (fi) associados. Veremos mais adiante que tais ângulos estão relacionados com a longitude e latitude, respectivamente, de um ponto sobre a superfície terrestre.

Os triângulos OAP' e $OP'P$ são retângulos. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OAP' , temos:

$$OP'^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow OP' = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.2.1)$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $OP'P$, temos:

$$OP^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \Rightarrow OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow$$

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.2.2)$$

Estendendo o raciocínio, a distância entre dois pontos distintos do espaço, por exemplo, $P = (x, y, z)$ e $C_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (as coordenadas do ponto C_0 são conhecidas) é dada por:

$$d(P, C_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.2.3)$$

Uma demonstração para a equação 2.2.3 está no apêndice A.

Se considerarmos o ponto $C_0 = (x_0, y_0, z_0)$ como sendo o centro de uma superfície esférica S de raio r e o ponto $P = (x, y, z)$ pertencente à superfície S , então temos:

Observação 2.2.1: A intersecção do plano que contém os eixos OX e OY com a superfície esférica é o Equador (definição 2.1.6 iii). O ponto P pertence a algum meridiano.

Os dois exemplos apresentados na sequência visam escrever as equações reduzida e geral da superfície esférica, conhecendo o seu centro e raio.

Exemplo 2.2.1: Escreva a equação reduzida da superfície esférica que tem centro no ponto $(1, 2, -1)$ e raio $r = 2$.

Resolução: Aplicando a equação (2.2.4) temos: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

Exemplo 2.2.2: Escreva a equação geral da superfície esférica que tem centro no ponto $(-1, 0, 2)$ e raio $r = 1$.

Resolução: Aplicando a equação (2.2.5) temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

onde,

$$A = -2(-1) = 2; B = -2(0) = 0; C = -2(2) = -4$$

e,

$$D = (-1)^2 + (0)^2 + (2)^2 - (1)^2 = 1 + 0 + 4 - 1 = 4.$$

Portanto, a equação geral é: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 4 = 0$

O exemplo 2.2.4 objetiva determinar o centro e o raio de uma superfície esférica por meio de uma técnica chamada “completar quadrados”. Para aplicar tal técnica, a equação da superfície esférica deve estar escrita na sua forma geral, com intuito de reescrevê-la na forma reduzida.

Técnica de Completar quadrado: Completar quadrado é escrever uma expressão do tipo $m^2 + 2 \cdot bm$, como: $m^2 + 2 \cdot bm = (m + b)^2 - b^2$. Porém, há casos em que o fator “2” não está presente. Quando isso ocorrer, devemos fazer com que ele “apareça”.

$$\text{Vejam: } m^2 + bm = m^2 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)m.$$

$$\text{Portanto, } m^2 + bm = m^2 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)m = \left(m + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Exemplo 2.2.3: Aplique a técnica de completar quadrado em cada caso:

$$a) m^2 + 10m = m^2 + 2 \cdot 5m = (m + 5)^2 - 5^2$$

$$b) m^2 + 3m = m^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)m = \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$c) m^2 - 6m + 1 = m^2 + 2 \cdot (-3)m + 1 = (m - 3)^2 - (-3)^2 + 1 = (m - 3)^2 - 8$$

Exemplo 2.2.4: Determine o centro e o raio da superfície esférica que tem equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$

Resolução: Neste caso vamos completar quadrados. Vejamos:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = x^2 + 2 \cdot (-1)x + y^2 + 2 \cdot 1y + z^2 + 2 \cdot (-1)z = 6$$

Então,

$$(x - 1)^2 - (-1)^2 + (y + 1)^2 - (+1)^2 + (z - 1)^2 - (-1)^2 = 6$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 - 1 - 1 - 1 = 6$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

Daí, temos que o centro é o ponto $(1, -1, 1)$ e, $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$.

O exemplo a seguir é uma aplicação direta da equação reduzida de uma superfície esférica.

Exemplo 2.2.5: Escreva a equação reduzida da superfície terrestre considerando que o seu centro é a origem do sistema $OXYZ$.

Resolução: O centro é o ponto $(0, 0, 0)$ e o raio é $r = 6370 \text{ km}$.

Logo, a equação procurada é: $x^2 + y^2 + z^2 = 6370^2$.

Na sequência apresentamos duas atividades propostas.

A primeira tem como objetivo escrever a equação geral da cada superfície esférica conhecendo o centro e o raio. A prática desta atividade vai favorecer a compreensão e o desenvolvimento dos exemplos e atividades propostas do Capítulo III sobre o GPS.

A segunda tem por objetivo determinar o centro e o raio das superfícies esféricas aplicando a técnica de completar quadrados. Entretanto, esta atividade também pode ser resolvida

comparando cada equação dada com a equação 2.2.5 a fim de se determinar os coeficientes A , B , C e D .

Atividade proposta 2.2.1: Escreva a equação geral de cada uma das superfícies esféricas a seguir:

- a) S_1 : centro $(1, 2, 3)$ e raio 4.
- b) S_2 : centro $(-1, 0, 1)$ e raio 7.
- c) S_3 : centro $(0, 2, -2)$ e raio 10.
- d) S_4 : centro $(3, -1, 1)$ e raio $\sqrt{5}$.
- e) S_5 : centro $(5, 3, 1)$ e raio $\sqrt{11}$.

Atividade proposta 2.2.2: Determine o centro e raio de cada superfície esférica abaixo:

Sugestão: Complete quadrados.

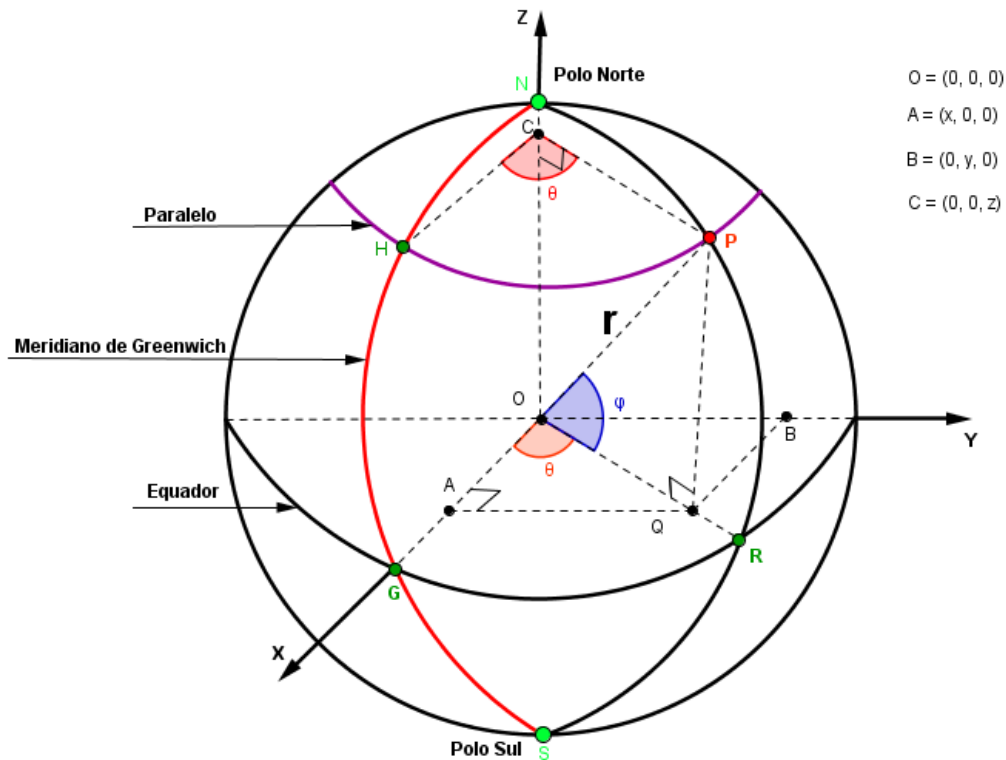
- a) $S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 1 = 0.$
- b) $S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 9 = 0.$
- c) $S_3: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z = 0$
- d) $S_4: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 2 = 0$
- e) $S_5: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 2z - 16 = 0$

2.3 Coordenadas Geográficas:

A partir daqui, vamos adotar um sistema de coordenadas que possibilita determinar a localização de qualquer ponto ou uma região sobre a superfície da Terra. Tal sistema é denominado *Sistema de Coordenadas Geográficas*. Nesse sistema as coordenadas são *latitude e longitude*.

Para fins didáticos, usamos a expressão *globo terrestre* para representar a superfície da Terra. Inicialmente, vamos considerar o sistema $OXYZ$. A Figura 52 é uma representação do globo terrestre cujo centro é a origem do sistema $OXYZ$.

Figura 52 – Globo Terrestre cujo centro é a origem do sistema $OXYZ$.



Fonte: Autores.

Na sequência apresentamos algumas definições pertinentes ao estudo da localização “lugar” de um ponto ou uma região sobre o globo terrestre, como latitude e longitude.

Definição 2.3.1 – Meridiano de Greenwich: É o meridiano mais notável e é definido como o primeiro meridiano – meridiano principal.

Tal nome deve-se ao fato deste meridiano passar por uma localidade próxima da cidade de Londres – Inglaterra, onde há um observatório astronômico. Este meridiano também é utilizado como referência para estabelecer a relação entre os fusos horários em qualquer lugar do globo terrestre.

Definição 2.3.2 – Latitude: A latitude de um ponto P é a medida (φ em graus) do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador.

A definição 2.3.2 pode ser interpretada da seguinte maneira: Considere um meridiano arbitrário. Sua intersecção com o Equador é um ponto R (Figura 52), por exemplo. Tome outro ponto P (distinto de R) sobre tal meridiano. A medida (em graus) do arco PR é a latitude do ponto P . Conforme a Figura 52, o arco citado na definição 2.3.2 é o arco PR que está associado ao ângulo central φ . A latitude se expressa em graus, minutos e segundos

($g^{\circ}m's''$). Ela é medida de 0° a 90° norte (N) ou de 0° a 90° sul (S). Para fins de cálculos futuros, a parte norte (N) é positiva e a parte sul (S) é negativa, respectivamente, acima e abaixo da linha do Equador.

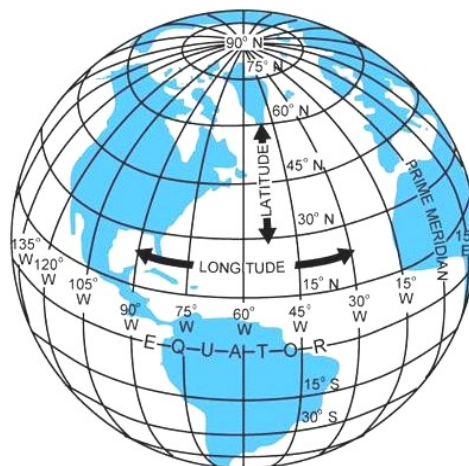
Definição 2.3.3 – Longitude: A longitude de um ponto P é a medida (θ em graus) do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich.

A definição 2.3.3 pode ser interpretada da seguinte maneira: A longitude de um “lugar” é o ângulo medido ao longo do Equador da Terra, tendo origem na intersecção do meridiano de Greenwich com o Equador, e extremidade em outro meridiano que também se intersecta com o Equador. Conforme a Figura 52, o arco citado na definição 2.3.3 é o arco PH que está associado ao ângulo central θ .

Podemos notar também que o arco GR (Figura 52) contido no Equador também está associado ao ângulo θ , que é o ângulo do fuso esférico determinado pelo meridiano de Greenwich e o meridiano que contém o ponto P . A longitude se expressa em graus, minutos e segundos ($g^{\circ}m's''$). Ela é medida de 0° a 180° leste (E) ou de 0° a 180° oeste (W). Para fins de cálculos futuros, a parte leste (E) é positiva e a parte oeste (W) é negativa, respectivamente, à direita e a esquerda do meridiano de Greenwich.

Com base nas três definições anteriores, a Figura 53 representa o globo terrestre com suas linhas de latitude e longitude, destacando o Equador e o meridiano de Greenwich (*Prime Meridian*).

Figura 53 – Linhas de Latitude e Longitude.



Fonte: <http://static.yousaytoo.com/post_images/37/2e/6f/9143452/remote_image_96447bfafe.jpg> Acesso em 04/12/2012.

O exemplo a seguir apresenta latitudes e longitudes de algumas cidades situadas nos hemisférios Norte e Sul e, também, Leste e Oeste do meridiano de Greenwich.

Exemplo 2.3.1: Latitudes e Longitudes de algumas cidades:

Cidade	Latitude	Longitude
Foz do Iguaçu – Brasil	$25^{\circ}32'S = -25^{\circ}32'$	$54^{\circ}35'W = -54^{\circ}35'$
Maringá – Brasil	$23^{\circ}25'S = -23^{\circ}25'$	$51^{\circ}56'W = -51^{\circ}56'$
Londrina – Brasil	$23^{\circ}18'S = -23^{\circ}18'$	$51^{\circ}11'W = -51^{\circ}11'$
Lisboa – Portugal	$38^{\circ}43'N = +38^{\circ}43'$	$9^{\circ}9'W = -9^{\circ}9'$
Berlim – Alemanha	$52^{\circ}31'N = +52^{\circ}31'$	$13^{\circ}24'E = +13^{\circ}24'$
Tóquio – Japão	$35^{\circ}41'N = +35^{\circ}41'$	$139^{\circ}42'E = +139^{\circ}42'$

Observação 2.3.1: Tanto a latitude quanto a longitude, podem ser obtidas apenas em graus, pois, valem as seguintes relações:

- 1° corresponde a $60'$;
- $1'$ corresponde a $60''$

O exemplo a seguir tem por objetivo escrever o ângulo dado somente em graus.

Exemplo 2.3.2: Transforme $20^{\circ}45'$ em apenas graus.

Resolução: Como 1° corresponde a $60'$, então $45'$ corresponde a $0,75^{\circ}$.

Logo, $20^{\circ}45' = 20,75^{\circ}$.

Dica: Para transformar segundos em minutos e minutos em graus, divide-se por 60, caso contrário multiplica-se por 60.

Nas seções 2.2 e 2.3 definimos as coordenadas cartesianas no espaço e as geográficas de um ponto P que pertence à superfície terrestre. Assim, na próxima seção vamos relacionar tais coordenadas.

2.4 Relação entre coordenadas cartesianas e geográficas

Podemos relacionar as coordenadas cartesianas com as coordenadas geográficas? Sim.

Para isso, vamos considerar o sistema $OXYZ$ (Figura 52) tal que o centro do globo terrestre coincida com a origem O , o eixo OZ positivo com direção para o polo norte (N), o plano OXY sendo o plano que contém o Equador, o eixo OX positivo intersectando o meridiano de Greenwich e o eixo OY positivo intersectando o meridiano de longitude 90° E, isto é, 90° a leste do meridiano principal.

Quando o ponto $P = (x, y, z)$ está sobre a superfície terrestre os ângulos φ e θ (Figura 52) são respectivamente à latitude e longitude do ponto P .

Agora, se considerarmos o triângulo retângulo OPC (Figura 52), temos que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (equação 2.2.2).

Aplicando a razão trigonométrica cosseno, temos:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{OC}{OP} = \frac{z}{r} \quad (2.4.1)$$

Como $\cos(90^\circ - \varphi) = \cos 90^\circ \cos \varphi + \sin 90^\circ \sin \varphi = \sin \varphi$, obtemos:

$$\sin \varphi = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \sin \varphi \quad (2.4.2)$$

Por meio da equação (2.4.3), φ assume um único valor entre 0° e 90° quando $z > 0$ e um único valor entre -90° e 0° quando $z < 0$. No primeiro caso a latitude do ponto P é (φ) “Norte” e, no segundo é ($-\varphi$) “Sul”.

A latitude do ponto P é dada por:

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{z}{r}\right) = \arcsen\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (2.4.3)$$

Quando $z = 0$, a latitude do ponto P será $\varphi = 0^\circ$, isto é, o ponto P estará sobre a linha do Equador.

Agora, vamos considerar o triângulo retângulo OAQ (Figura 52) e, aplicar as razões trigonométricas seno e cosseno.

Temos:

$$\sin \theta = \frac{AQ}{OQ} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.4.4)$$

e,

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (2.4.5)$$

Por meio das equações (2.4.6) e (2.4.7), θ assume um único valor entre 0° e 180° quando $y > 0$ e um único valor entre -180° e 0° quando $y < 0$. No primeiro caso a longitude do ponto P é (θ) “Leste” e, no segundo é $(-\theta)$ “Oeste”.

A longitude do ponto P é dada por:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad (2.4.6)$$

e,

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad (2.4.7)$$

Observação 2.4.1: Para a longitude ser determinada quando são conhecidas as coordenadas x e y , as equações (2.4.6) e (2.4.7) devem ser satisfeitas. Os valores de φ (equação 2.4.3) e θ (equações 2.4.6 e 2.4.7) podem ser obtidos por meio de uma calculadora eletrônica que disponha das funções “ $\sin^{-1} = \arcsen$ ” e “ $\cos^{-1} = \arccos$ ”.

Vamos considerar agora o triângulo retângulo OQP (Figura 52). Aplicando nele a razão trigonométrica cosseno, temos:

$$\cos\varphi = \frac{OQ}{OP} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r\cos\varphi \quad (2.4.8)$$

Combinando as equações (2.4.4) e (2.4.8), obtemos:

$$y = r\cos\varphi\sen\theta \quad (2.4.9)$$

Por outro lado, combinando as equações (2.4.5) e (2.4.8), obtemos:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta \quad (2.4.10)$$

Portanto, as coordenadas cartesianas e geográficas relacionam-se por meio das seguintes equações:

$$z = r\sen\varphi \quad (2.4.2)$$

$$y = r \cos \varphi \sin \theta \quad (2.4.9)$$

$$x = r \cos \varphi \cos \theta \quad (2.4.10)$$

Logo, um ponto P do espaço e que pertença à superfície terrestre pode ser escrito assim:

$$P = (x, y, z) = r(\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi) \quad (2.4.11)$$

onde, φ e θ são respectivamente a latitude e a longitude do ponto P e, $r = 6,37 \cdot 10^6 m$ o raio da Terra.

Observação 2.4.2: Conhecendo as coordenadas cartesianas de um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer do espaço e aplicando-as em $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tal que o valor obtido seja maior do que o raio da Terra, então a diferença entre o valor encontrado e o raio da Terra é chamada de **altitude** ou **elevação** do ponto P . Caso a diferença seja nula, então dizemos que a altitude é nula, isto é, o ponto está ao nível do mar. Se a diferença for negativa o ponto está no interior do globo terrestre.

Os dois próximos exemplos tem por objetivos relacionar as coordenadas cartesianas de um ponto do espaço com as coordenadas geográficas e vice-versa.

Exemplo 2.4.1: Vamos determinar a latitude, a longitude e a elevação de um ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas por:

$$P = (3,6678 \cdot 10^6 m, -4,5587 \cdot 10^6 m, -2,5199 \cdot 10^6 m).$$

Resolução:

Lembre-se que o modelo adotado para representar a superfície terrestre é uma superfície esférica de raio $r = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 m$.

A latitude é dada pela equação (2.4.3), isto é, $\varphi = \arcsen\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$.

Então,

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{(-2,5199 \cdot 10^6 m)}{\sqrt{(3,6678 \cdot 10^6 m)^2 + (-4,5587 \cdot 10^6 m)^2 + (-2,5199 \cdot 10^6 m)^2}}\right) = -23,30^\circ = 23^\circ 18' S.$$

A longitude é dada pelas equações 2.4.6 e 2.4.7. Como o valor da coordenada y é menor do que zero então θ será negativo, isto é, longitude Oeste (W).

Neste caso, vamos aplicar os dados na equação (2.4.6), uma vez que $\cos\theta = \cos(-\theta)$.

Então,

$$\theta = \arcsen\left(\frac{(-4,5587 \cdot 10^6 m)}{\sqrt{(3,6678 \cdot 10^6 m)^2 + (-4,5587 \cdot 10^6 m)^2}}\right) = -51,18^\circ = 51^\circ 11' W.$$

Calculando a elevação do ponto P :

$$\sqrt{(3,6678 \cdot 10^6 m)^2 + (-4,5587 \cdot 10^6 m)^2 + (-2,5199 \cdot 10^6 m)^2} = 6370589 m.$$

Então, a elevação é dada por:

$$6370589 m - 6,37 \cdot 10^6 m = 589 m.$$

Portanto, consultando o exemplo 2.3.1 temos que ponto P está localizado na cidade de Londrina a uma altitude de 589 m.

Exemplo 2.4.2: Determine as coordenadas cartesianas de um ponto sobre a superfície do globo terrestre que tem latitude 30° S e longitude 50° W.

Resolução: Como o ponto P está sobre a superfície do globo terrestre, vamos utilizar a equação (2.4.11), isto é, $P = (x, y, z) = r(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sen\theta, \sen\varphi)$, onde r é raio da Terra, φ é latitude e θ a longitude.

Então,

$$P = 6,37 \cdot 10^6 m(\cos(-30^\circ)\cos(-50^\circ), \cos(-30^\circ)\sen(-50^\circ), \sen(-30^\circ))$$

Portanto,

$$P = (3\,545\,990,443 m, -4\,225\,946,850 m, -3\,185\,000 m).$$

As atividades a seguir tem por objetivos fixar o conceito e o procedimento de como se obter as coordenadas geográficas conhecendo as coordenadas cartesianas de um ponto. Salientamos para que as atividades sejam realizadas, o professor e os alunos devem fazer uso de calculadoras e *softwares* capazes de realizar cálculos como aqueles apresentados no exemplo

2.4.1. E, para finalizar as atividades, uma pesquisa deve ser realizada, por exemplo, em um atlas geográfico ou em um sítio da internet que forneça recursos para informar com maior precisão os locais em que se encontram tais pontos.

Atividade proposta 2.4.1: Dadas as coordenadas cartesianas do ponto $P = (1\,741\,705m, -6\,108\,639m, 511\,523m)$, determine a latitude, a longitude e a altitude do ponto P . Considere o raio da superfície terrestre igual a $6,37 \cdot 10^6m$ e, para finalizar, pesquise qual é a cidade e o país onde está localizado tal ponto.

Atividade proposta 2.4.2: Joaquim, um pescador, encontrou nas quinilharias de seu pai um mapa que informa a posição de um excelente ponto de pescaria. Segundo o mapa este ponto tem as seguintes coordenadas cartesianas:

$$P = (4\,208\,636,187m, -4\,779\,363,066m, -148\,223,252m).$$

Ajude Joaquim a encontrar este local de pescaria por meio das coordenadas geográficas.

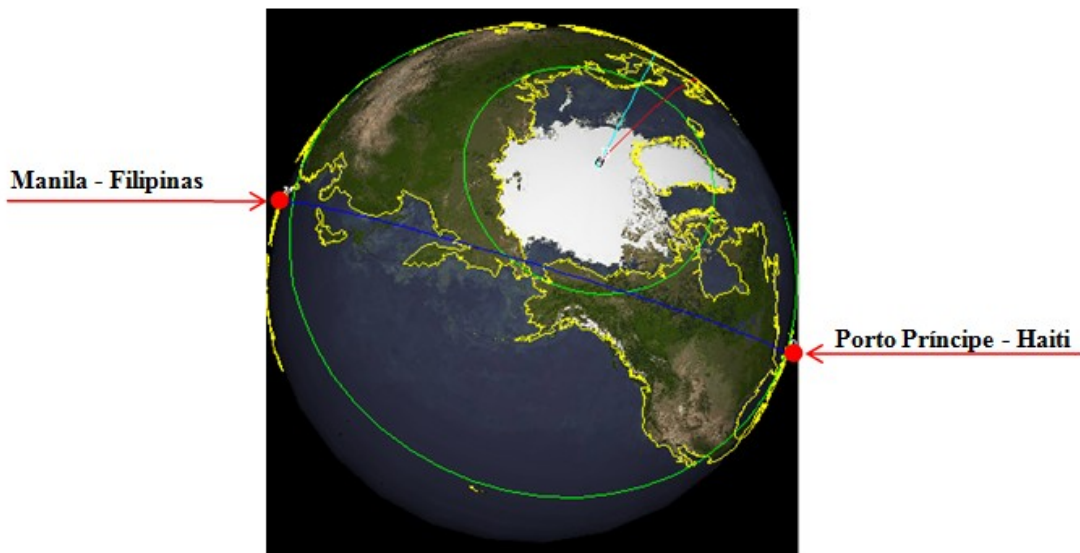
CAPITULO III – APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ESFÉRICA

3.1 Navegando sobre a superfície terrestre

A Geometria esférica é usada por pilotos de aeronaves e capitães de navios que navegam ao redor do planeta. Porém, ao se trabalhar com a Geometria Esférica surgem resultados não intuitivos como, por exemplo, escolher a menor rota entre duas localidades do globo terrestre. Sabemos (definição 2.1.14) que tal rota deve ser o menor arco de circunferência máxima que passa por tais localidades.

Você sabia que a menor distância para voar de Porto Príncipe, no Haiti para Manila, nas Ilhas Filipinas é um caminho através do Alasca? As Ilhas Filipinas estão ao Sul do Haiti, desta forma, voar ao Norte (Alasca) é o menor caminho, pois, pelo Porto Príncipe, pelo Alasca, e pela Manila passa um menor arco de circunferência máxima comum a estas três localidades (Figura 54).

Figura 54 – Menor distância entre Porto Príncipe e Manila.



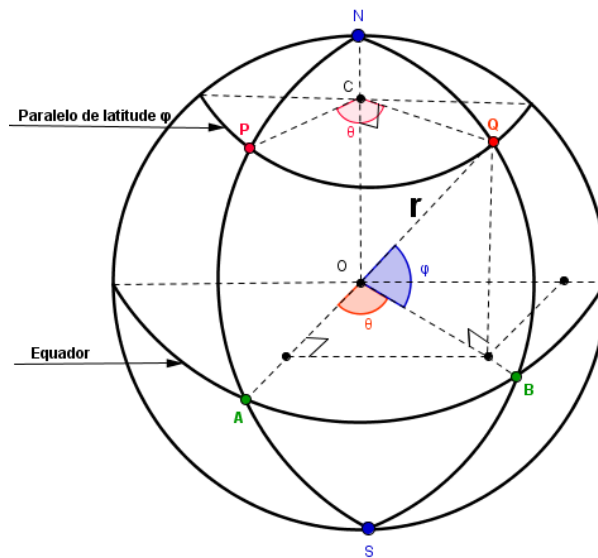
Fonte: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2006.1/applets/earth_br.html> Acesso em 22/01/2013.

Os resultados que são apresentados a seguir nos possibilitam relacionar qualquer arco de paralelo ao seu correspondente no Equador (seção 3.2) e, principalmente, calcular a menor distância entre quaisquer dois pontos distintos sobre a superfície terrestre (seção 3.3).

3.2 Relação entre um arco de paralelo e seu correspondente no Equador

Inicialmente vamos considerar a Figura 57 que representa o globo terrestre.

Figura 57 – Relação entre o arco de paralelo PQ e o arco AB do Equador.



Fonte: Autores.

Do triângulo OCQ retângulo em C e aplicando a razão trigonométrica seno, temos:

$$\text{sen}(90^\circ - \varphi) = [\cos(\varphi)] = \frac{\text{med}(CQ)}{\text{med}(OQ)}$$

$$\Rightarrow \text{med}(CQ) = \text{med}(OQ) \times \cos(\varphi) \quad (3.2.1)$$

Por outro lado,

$$\frac{\text{med}(\text{arco } PQ)}{\text{med}(\text{arco } AB)} = \frac{\text{med}(CQ)}{\text{med}(OB)} = \frac{\text{med}(CQ)}{\text{med}(OQ)}$$

$$\Rightarrow \text{med}(\text{arco } PQ) = \frac{\text{med}(\text{arco } AB) \times \text{med}(CQ)}{\text{med}(OQ)} \quad (3.2.2)$$

Observação 3.2.1: A medida de um arco na superfície esférica significa calcular a distância entre os pontos extremos deste arco.

Combinando as equações (3.2.1) e (3.2.2), obtemos:

$$\text{med}(\text{arco } PQ) = \text{med}(\text{arco } AB) \times \cos(\varphi) \quad (3.2.3)$$

A equação (3.2.3) nos diz que conhecendo a latitude φ de um paralelo, podemos determinar a medida de um arco deste paralelo conhecendo a medida de um arco corresponde no Equador e, vice-versa.

Podemos notar que o comprimento do arco AB (arco contido no Equador) está associado a uma variação de longitude, isto é, $\Delta\theta = \theta_{\text{final}} - \theta_{\text{inicial}}$. Vamos considerar como longitude inicial aquela mais ao Oeste (W) e como longitude final aquela mais ao Leste (E), uma vez que o movimento de rotação em torno de seu eixo é da esquerda para a direita, isto é, do Oeste para o Leste.

Mas, afinal, qual é o comprimento do arco AB ? Como o arco AB está contido em uma circunferência máxima, o Equador, seu comprimento é dado pela seguinte relação:

$$\frac{\text{med}(\text{arco de Equador})}{2\pi r} = \frac{\Delta\theta}{360}$$

$$\Rightarrow \text{med}(\text{arco de Equador}) = \frac{2\pi r \times \Delta\theta}{360}$$

onde, r é o raio da Terra.

Então, pelo exemplo 2.1.11, temos que:

$$\text{med}(\text{arco de Equador}) = 111,17 \times \Delta\theta \quad (3.2.4)$$

A unidade para a equação (3.2.4) é o quilômetro (km). Na verdade, esta equação possibilita calcular a distância entre dois pontos distintos que estão sobre o Equador.

Um raciocínio análogo no que tange a distância entre dois pontos distintos que estão sobre um mesmo meridiano. Com isso, temos:

$$\text{med}(\text{arco de meridiano}) = 111,17 \times \Delta\varphi \quad (3.2.5)$$

Logo, substituindo a equação (3.2.4) na equação (3.2.3) temos:

$$med(arco PQ) = 111,17 \times \Delta\theta \times \cos(\varphi) \quad (3.2.6)$$

Portanto, conhecendo a latitude de um paralelo e as longitudes dos extremos de um arco deste paralelo, podemos calcular o comprimento deste arco, isto é, calcular a distância entre os extremos deste arco por meio da equação (3.2.6).

Os quatro exemplos da sequência tem por objetivos mostrar como se obtém a distância entre dois pontos que se encontram na linha do Equador, ou em um mesmo meridiano, ou em um mesmo paralelo.

Exemplo 3.2.1: Suponha que um navio mantenha sua rota navegando em um paralelo de latitude 30° S e, seus pontos de partida e chegada tem, respectivamente, as seguintes longitudes: 45° W e 15° W. Calcule quantos quilômetros o navio irá navegar.

Resolução: Queremos determinar o comprimento do arco de paralelo, onde:

A latitude do navio é 30° S, ou seja, $\varphi = -30^\circ$.

A longitude inicial do navio é 45° W, ou seja, $\theta = -45^\circ$.

A longitude final do navio é 15° W, ou seja, $\theta = -15^\circ$.

$$\Delta\theta = \theta_{final} - \theta_{inicial} = -15^\circ - (-45^\circ) = 30^\circ.$$

Logo, aplicando a equação (3.2.6), temos:

$$med(arco) = 111,17 \times 30 \times \cos(-30^\circ) = 2\,888,28.$$

Portanto, o navio navegará $2\,888,28$ km.

Exemplo 3.2.2 [Extraído e adaptado de Coutinho (2001)]: Um navio cargueiro transatlântico, sob os comandos do capitão André, percorre $5\,000,4$ km sobre o Equador, enquanto outro navio de cruzeiro sob os comandos do Capitão Hércules cobre o correspondente arco no paralelo de latitude 60° . Determine a distância percorrida pelo navio de cruzeiro.

Resolução: Neste caso aplicar-se-á a equação (3.2.3).

Logo, a distância percorrida = $5\,000,4$ km \times $\cos(60^\circ)$ = $2\,500,2$ km.

Exemplo 3.2.3 [Extraído de Alves (2009)]: As cidades de Quito, Equador, e Entebe, em Uganda, estão ambas sobre o a linha do Equador. A longitude de Quito é 79° W enquanto que a de Entebe é 32° E. Assim, determine a distância entre elas.

Resolução: Vamos aplicar os dados na equação (3.2.4).

A longitude de Quito é 79° W, ou seja, $\theta = -79^\circ$.

A longitude de Entebe é 32° E, ou seja, $\theta = +32^\circ$.

$$\Delta\theta = +32^\circ - (-79^\circ) = 111^\circ.$$

$$\text{Logo, } med(\text{arco de equador}) = 111,17 \times 111 = 12\,339,87$$

Portanto, a distância entre Equador e Entebe é $12\,339,87$ km.

Exemplo 3.2.4 [Extraído de Alves (2009)]: As cidades de Curitiba e Goiânia estão localizadas sobre o mesmo meridiano (49° W) e suas latitudes são respectivamente 26° S e 17° S. Assim, determine a distância entre elas.

Resolução: Vamos aplicar os dados na equação (3.2.5).

A latitude de Goiânia é 17° S, ou seja, $\varphi = -17^\circ$.

A latitude de Curitiba é 26° S, ou seja, $\varphi = -26^\circ$.

$$\Delta\varphi = -17^\circ - (-26^\circ) = 9^\circ.$$

$$\text{Logo, } med(\text{arco de meridiano}) = 111,17 \times 9 = 1\,000,53$$

Portanto, a distância entre Curitiba e Goiânia é $1\,000,53$ km.

Os exemplos acima mostram como se calcula a distância entre dois pontos da superfície terrestre que se encontram no Equador, ou no mesmo meridiano ou no mesmo paralelo. Assim, a próxima atividade tem por objetivo calcular o comprimento de uma circunferência máxima da superfície terrestre.

Atividade proposta 3.2.1: Qual é o comprimento do Equador terrestre?

3.3 Fórmula fundamental para triângulos esféricos

Na sequência, vamos apresentar e demonstrar a fórmula mais importante para a resolução de triângulos esféricos. Ela é conhecida como *fórmula fundamental* ou *fórmula dos quatro elementos*, pois, por meio dela é possível calcular a medida de um lado, conhecendo as medidas dos outros dois e o ângulo compreendido entre eles.

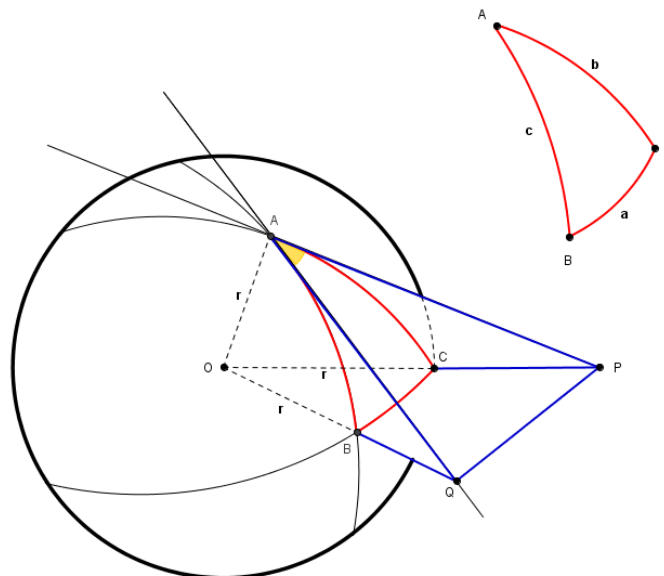
Na Geometria Euclidiana este fato se resolve aplicando a conhecida lei dos cossenos, isto é, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$. Entretanto, em um triângulo esférico ABC de lados a , b e c (medidos em graus), vale a relação:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \operatorname{sen}(c) \cos(\hat{A})$$

Na fórmula fundamental os lados a , b e c do triângulo esférico ABC não são vistos como os comprimentos de arcos de circunferência máxima, mas como as respectivas medidas em graus que determinam os comprimentos de tais arcos, conforme o exemplo 2.1.11.

Para demonstrarmos a fórmula fundamental, vamos inicialmente considerar a Figura 58, baseada em Hogben (1970), que apresenta uma superfície esférica S de centro O e raio r e, contém um triângulo esférico ABC de lados a , b e c , formado pelas intersecções de três circunferências máximas.

Figura 58 – Demonstração da fórmula fundamental – parte espacial.



Fonte: Hogben (1970).

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 \quad (3.3.5)$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2 \quad (3.3.6)$$

Somando as equações (3.3.5) e (3.3.6) e reorganizando, obtemos:

$$2\overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2) \quad (3.3.7)$$

Agora, aplicando a lei dos cossenos nos triângulos PQO e PQA , temos:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \times \overline{QO} \times \cos(a) \quad (3.3.8)$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \times \overline{AQ} \times \cos(\hat{A}) \quad (3.3.9)$$

Fazendo (3.3.8) – (3.3.9), obtemos:

$$0 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2) - 2\overline{PO} \times \overline{QO} \times \cos(a) + 2\overline{AP} \times \overline{AQ} \times \cos(\hat{A})$$

Então,

$$2\overline{PO} \times \overline{QO} \times \cos(a) = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2) + 2\overline{AP} \times \overline{AQ} \times \cos(\hat{A})$$

Substituindo a equação (3.3.7) na equação acima, temos:

$$2\overline{PO} \times \overline{QO} \times \cos(a) = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{AP} \times \overline{AQ} \times \cos(\hat{A}) \quad (3.3.10)$$

Agora, dividindo a equação (3.3.10) por $(2\overline{PO} \times \overline{QO})$, obtemos:

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \times \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} + \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}} \times \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}} \times \cos(\hat{A}) \quad (3.3.11)$$

E, finalmente substituindo as equações (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) e (3.3.4) na equação (3.3.11), obtemos a fórmula fundamental para triângulos esféricos:

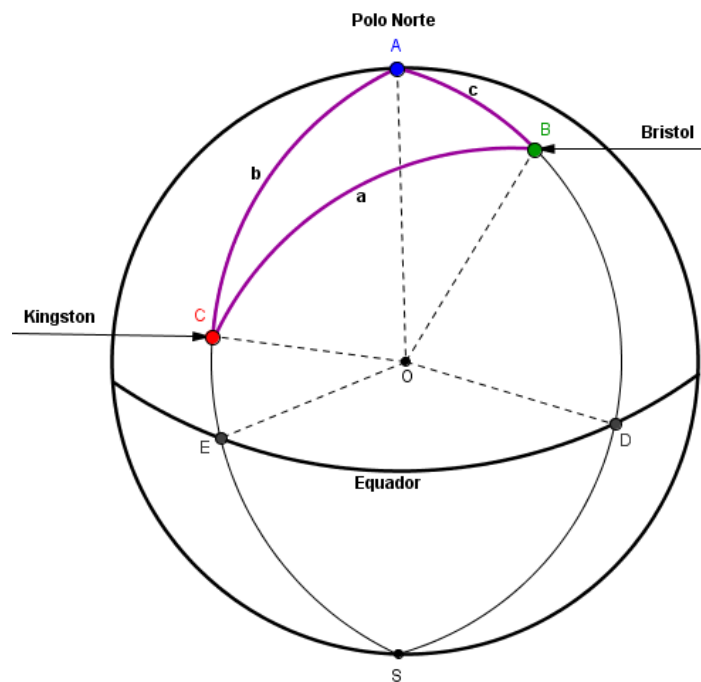
$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c) \cos(\hat{A}) \quad (3.3.12)$$

O exemplo a seguir mostra detalhadamente uma aplicação da fórmula fundamental.

Exemplo 3.3.1: [Adaptado de Hogben (1970)]. A cidade de Kingston, Jamaica, tem as seguintes coordenadas geográficas: latitude $18^{\circ}5'$ N e longitude $76^{\circ}58'$ W, enquanto que a cidade de Bristol, Inglaterra, tem latitude $51^{\circ}26'$ N e longitude $2^{\circ}35'$ W. De posse dos dados, determine a distância entre Kingston e Bristol.

Resolução: Vamos considerar o globo terrestre (Figura 60), onde o vértice A do triângulo esférico ABC coincide com o polo Norte. Esta escolha justifica-se, pois, conhecendo as latitudes e longitudes dos pontos B e C nos possibilita determinar os valores de b e c e do ângulo \hat{A} .

Figura 60 – Distância entre Kingston e Bristol.



Fonte: Autores.

Como o arco AD tem 90° e o arco BD tem $51^{\circ}26'$ (latitude de Bristol), então $c = 90^{\circ} - 51^{\circ}26' = 38^{\circ}34'$. Analogamente, temos $b = 71^{\circ}55'$. O ângulo \hat{A} está associado ao arco DE . Então, para determiná-lo, basta fazer a diferença entre as longitudes, isto é, $\hat{A} = -2^{\circ}35' - (-76^{\circ}58') = 76^{\circ}58' - 2^{\circ}35' = 74^{\circ}23'$. Agora é só aplicar os dados na fórmula fundamental.

Então,

$$\cos(a) = \cos(71^{\circ}55') \cos(38^{\circ}34') + \operatorname{sen}(71^{\circ}55') \operatorname{sen}(38^{\circ}34') \cos(74^{\circ}23')$$

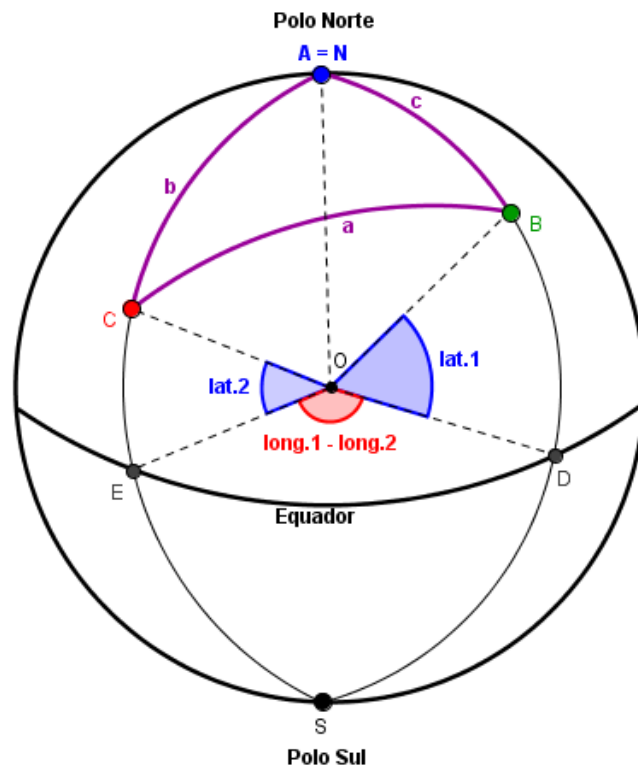
$$\Rightarrow \cos(a) = 0,40223$$

$$\Rightarrow a = \arccos(0,40223) = 66,28^\circ$$

Como 1° de circunferência máxima corresponde a $111,17 \text{ km}$ na superfície terrestre (exemplo 2.1.11), temos que: $a = 66,28 \times 111,17 \text{ km} = 7\,368,35 \text{ km}$. Portanto, a distância entre Kingston e Bristol é aproximadamente de $7\,368,35 \text{ km}$.

Porém, com o intuito de usarmos apenas as latitudes e longitudes de dois pontos distintos e, sem que haja a necessidade de fazer as subtrações como aquelas feitas para os arcos de meridiano b e c no exemplo 3.3.1, vamos considerar, a partir daqui, que o vértice A do triângulo esférico ABC construído para a fórmula fundamental coincida, por exemplo, com o polo Norte. Com isso, temos a Figura 61.

Figura 61 – Triângulo esférico com um vértice no polo norte.



Fonte: Autores.

Pela Figura 61 temos que a latitude do ponto B é dada por $lat.1$ e a latitude do ponto C é dada por $lat.2$. Já o ângulo \hat{A} é dado pelas diferenças de longitudes dos pontos B e C , onde, $long.1$ é a longitude de B e $long.2$ é a longitude de C .

Agora, vamos considerar as seguintes equações:

$$\cos(b) = \cos(90^\circ - \text{lat. } 2) = \text{sen}(\text{lat. } 2) \quad (3.3.13)$$

$$\text{sen}(b) = \text{sen}(90^\circ - \text{lat. } 2) = \cos(\text{lat. } 2) \quad (3.3.14)$$

$$\cos(c) = \cos(90^\circ - \text{lat. } 1) = \text{sen}(\text{lat. } 1) \quad (3.3.15)$$

$$\text{sen}(c) = \text{sen}(90^\circ - \text{lat. } 1) = \cos(\text{lat. } 1) \quad (3.3.16)$$

Sugestão: use o cosseno e o seno da diferença para prová-las.

Logo, como a representa em graus a distância entre os pontos B e C , a fórmula fundamental fica representada pela equação (3.3.17):

$$\cos(\text{dist.}) = \text{sen}(\text{lat. } 1) \text{sen}(\text{lat. } 2) + \cos(\text{lat. } 1)\cos(\text{lat. } 2) \cos(\text{long. } 1 - \text{long. } 2)$$

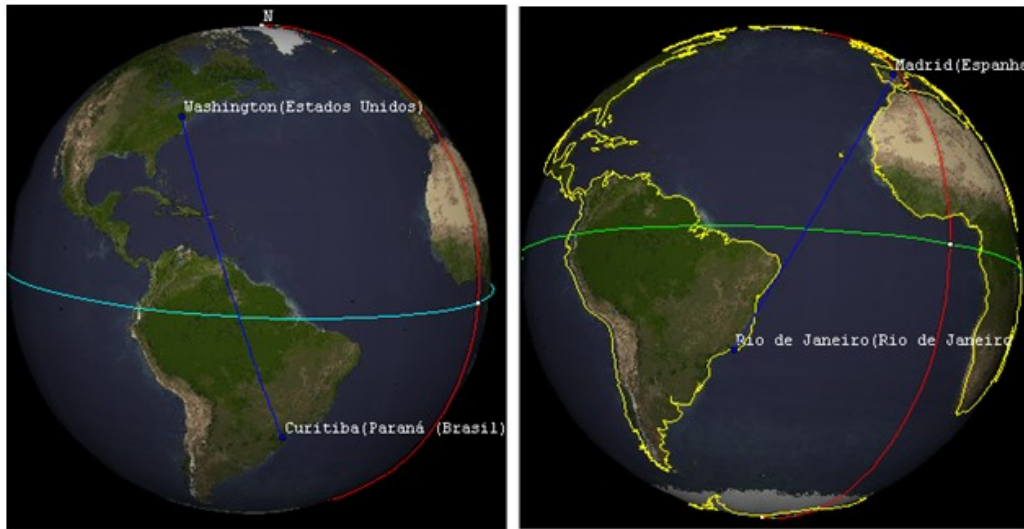
Com a equação (3.3.17) podemos calcular qualquer distância entre dois pontos distintos sobre a superfície terrestre. Para isto, basta conhecer as latitudes e as longitudes dos pontos.

Assim, o próximo exemplo apresenta as latitudes e as longitudes de duas capitais de estados brasileiros e das capitais dos Estados Unidos e da Espanha. Logo, de posse de tais coordenadas geográficas, a distância entre Curitiba e Washington (Figura 62) será calculada aplicando-se a equação 3.3.17.

Exemplo 3.3.2: Dadas as latitudes e longitudes das seguintes cidades:

	Latitude	Longitude
Curitiba – Brasil	$25,43^\circ S = 25^\circ 26' S$	$49,27^\circ W = 49^\circ 16' W$
Rio de Janeiro - Brasil	$22,90^\circ S = 22^\circ 54' S$	$43,20^\circ W = 43^\circ 12' W$
Washington – EUA	$38,90^\circ N = 38^\circ 54' N$	$77,04^\circ W = 77^\circ 02' W$
Madrid - Espanha	$40,42^\circ N = 40^\circ 25' N$	$3,70^\circ W = 3^\circ 42' W$

Figura 62 – Rio de Janeiro – Madrid e Curitiba – Washington.



Fonte: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2006.1/applets/earth_br.html> Acesso em 13/01/2013.

Responda os seguintes itens:

- Determine a distância entre Curitiba e Washington;
- Determine a distância entre Rio de Janeiro e Madrid;
- Determine a distância entre Curitiba e Rio de Janeiro;
- Determine a distância entre Madrid e Washington;

Resolução: item (a):

Vamos aplicar os dados na equação (3.2.17).

Inicialmente faremos: $long. 1 - long. 2 = -49,27^\circ - (-77,04^\circ) = 27,77^\circ$.

Logo,

$$\cos(dist.) = \sin(-25,43^\circ) \sin(+38,90^\circ) + \cos(-25,43^\circ) \cos(+38,90^\circ) \cos(27,77^\circ)$$

Então, $\cos(dist.) = 0,35223$

Logo, $dist. = \arccos(0,35223) = 69,36^\circ$.

Então, a $dist. = 69,36 \times 111,17 = 7\,710,75$

Portanto, a distância entre Curitiba e Washington é aproximadamente $7\,710,75\text{ km}$.

Os demais itens podem ser resolvidos usando a mesma ideia.

Sugerimos que o leitor acesse a *Home Page*²⁹ do professor Humberto José Bortolossi da Universidade Federal Fluminense – UFF. Lá há vários trabalhos e, um deles é um *Applet JAVA* intitulado "*Latitude e Longitude: Representando Pontos na Superfície da Terra*". Ele permite esclarecer o conceito de latitude e longitude, bem como visualizar os vários elementos geográficos do globo terrestre e, também, é possível calcular a distância entre algumas principais cidades do mundo.

Outra *Home Page* que sugerimos é a *National Weather Service*³⁰. Neste sítio é possível calcular a distância entre quaisquer duas localidades do globo terrestre. Para isto, basta apenas informar as latitudes e longitudes de tais localidades e solicitar o cálculo.

Também sugerimos a *Home Page Satellite Signals*³¹ que é um sítio de busca para latitudes e longitudes e, acompanha um mapa de visualização para refinar a precisão das coordenadas geográficas.

Sugerimos ao professor que desenvolva com os alunos todos os itens do exemplo 3.3.2, de três maneiras diferentes, isto é, aplicando os dados na equação 3.3.17, consultando e explorando o *applet* do professor Bortolossi e, também, fazendo os cálculos por meio do sítio *National Weather Service*. Após estas três etapas, uma discussão deve ser realizada com os alunos acerca dos resultados obtidos.

Com os resultados elencados até aqui, apresentamos na sequência, três atividades propostas que têm por objetivo determinar a distância entre duas localidades do globo terrestre.

A primeira tem o intuito de comprovar os dados informados pela Figura 56. Pode ser verificado por meio da equação 3.3.17 ou pelo recurso de cálculo disponibilizado no sítio *National Weather Service*.

A segunda tem o objetivo de calcular a menor distância entre as localidades informadas. Para isto deve-se realizar uma pesquisa, por exemplo, por meio do sítio *Home Page Satellite Signals*, com o intuito de conhecer as coordenadas geográficas de cada local.

²⁹ Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/hjbortol/>> Acesso em: 13/01/2013.

³⁰ Disponível em: <<http://www.nhc.noaa.gov/gccalc.shtml>> Acesso em: 16/01/2013.

³¹ Disponível em: <<http://www.satsig.net/maps/lat-long-finder.htm>> Acesso em 16/01/2013.

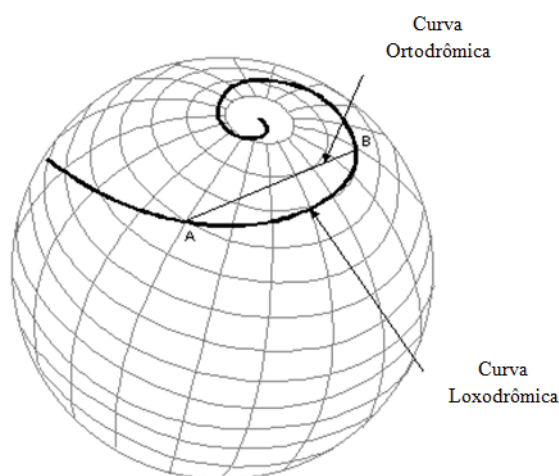
A terceira representa uma situação de guerra, onde um míssil deverá ser lançado por um submarino. Para isso, deve-se determinar a distância entre o submarino e o alvo. Ainda, nesta atividade, a direção de lançamento do míssil também deverá ser determinada aplicando a Lei dos senos para triângulos esféricos.

Atividade proposta 3.3.1: Verifique que a menor distância entre Butler Manor Woods (Latitude: $40,5^\circ N$, Longitude: $74,225^\circ W$) e Montecarmelo (Latitude: $40,5^\circ N$, Longitude: $3,7^\circ W$) é aproximadamente 3599 *milhas* conforme a Figura 56. Sugestão: Aplique as equações (3.2.6) e (3.3.17) e, use a seguinte correspondência: 1 *milha* = 1,609 *km*.

Atividade proposta 3.3.2: Consultando latitudes e longitudes como, por exemplo, na *Home Page Satellite Signals*, calcule as distâncias que, navegando sobre arcos de circunferências máximas, os navios têm de percorrer para ir do porto de (a) Paranaguá – PR ao porto da Cidade do Cabo – África do Sul (b) Itajaí – SC ao porto de Namibe – Angola (c) Natal – RN ao porto de Aveiro – Portugal. Os cálculos com manobras para entrar e sair dos portos não devem ser considerados.

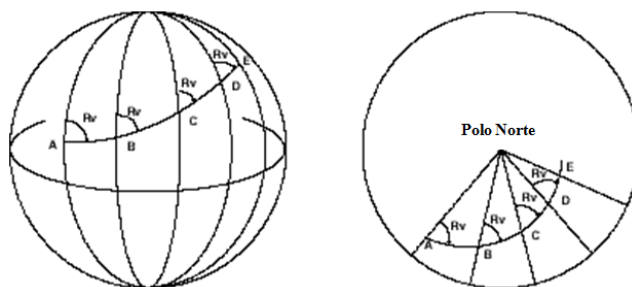
Observação 3.3.1: Na navegação marítima ou aérea é comum a utilização do termo *ortodromia* (Figura 63), que significa o menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos distintos na superfície da Terra. Há também, o termo *loxodromia*, cujo significado é uma curva que forma um ângulo constante com todos os meridianos que intersecta. Esta curva apresenta-se como uma espiral que tende para o polo (Figuras 63 e 64).

Figura 63 – Ortodromia e Loxodromia.



Fonte: <<http://www.navworld.com/navcerebrations/flight3.gif>> Acesso em 24/01/2013.

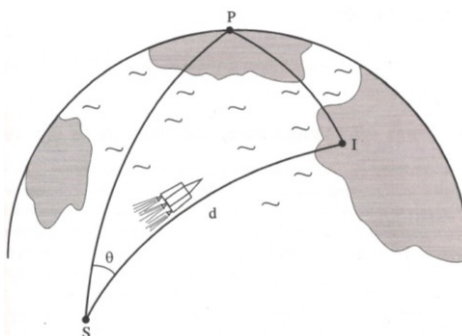
Figura 64 – A curva loxodrômica corta os meridianos com ângulo constante.



Fonte: <<https://perso-sdt.univ-brest.fr/~jacdev/ens/posi/images/image47.gif>>.

Atividade proposta 3.3.3 [Adaptada de Coutinho (2001)]: O comandante de um Submarino armado com mísseis de ogivas nucleares, localizado no ponto S de latitude $30^{\circ}15'$ N e longitude $45^{\circ}30'$ W, recebe ordem para disparar um míssil de longo alcance contra uma instalação inimiga localizada no ponto I , cujas coordenadas geográficas são, respectivamente $50^{\circ}20'$ N e $5^{\circ}40'$ W. Sabendo que o ponto P representa o polo norte, determine a distância que o míssil deve percorrer para atingir o alvo e a direção θ que ele deve ser lançado.

Figura 65 – Disparo de um míssil.



Fonte: Coutinho (2001, p. 99).

Sugestão: Para determinar o valor de θ , use a lei dos senos para triângulos esféricos e considere o arco PI e o ângulo \hat{P} .

Lei dos senos para triângulos esféricos: “Em todo triângulo esférico os senos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos”.

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$$

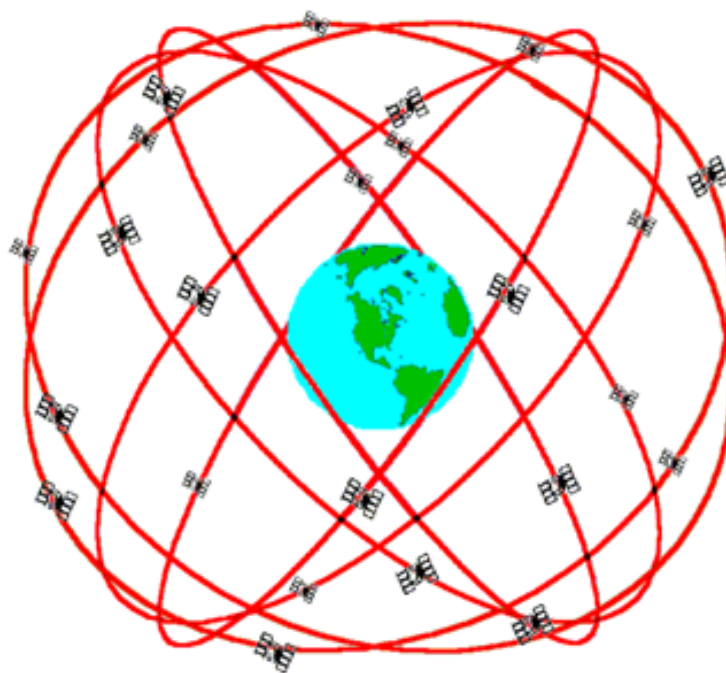
(Demonstração vide apêndice).

Nas próximas seções apresentamos informações e conceitos acerca do GPS. Inicialmente um histórico é realizado, na sequência a fundamentação matemática é demonstrada e, finalmente uma atividade é desenvolvida passo a passo mostrando como um ponto é localizado na superfície da Terra ou fora dela.

3.4 GPS: Uma aplicação da Geometria Esférica

De acordo com Langendolff (2008) foram lançados no espaço em dezembro de 1993, vinte e quatro (24) satélites, organizados em seis (6) planos orbitais, a uma altitude de 20200 *km*, aproximadamente.

Figura 66 – Distribuição orbital dos Satélites.



Fonte: <http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html> Acesso em 18/01/13.

Os satélites completam uma órbita a cada 12 horas e, cada satélite tem aproximadamente 28° de visualização sobre a Terra. O exemplo 3.4.1 prova este último resultado.

Exemplo 3.4.1: Mostre que o ângulo de visualização de um satélite sobre a Terra é próximo de 28° , quando este satélite está em uma órbita em torno do planeta a uma altitude de aproximadamente 20200 *km*.

Resolução:

A posição e a distância de cada satélite em sua órbita tem uma representação análoga àquela apresentada no exemplo 2.1.3, vide Figura 39. Entretanto, o ângulo de visualização é 2α .

A distância entre o satélite e a superfície da Terra é aproximadamente $d = 20200 \text{ km}$.

Vamos trabalhar com a equação 2.1.1.

$$F = \frac{1 - \text{sen}\alpha}{2} = \frac{d}{2(d+r)} \Rightarrow 1 - \text{sen}\alpha = \frac{d}{d+r} \Rightarrow \text{sen}\alpha = 1 - \frac{d}{d+r}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsen\left(1 - \frac{d}{d+r}\right).$$

$$\text{Portanto, } 2\alpha = 2\arcsen\left(1 - \frac{d}{d+r}\right).$$

$$\text{Logo, } 2\alpha = 2\arcsen\left(1 - \frac{20200 \text{ km}}{20200 \text{ km} + 6370 \text{ km}}\right) \cong 28^\circ \text{ como queríamos mostrar.}$$

Os satélites são utilizados até hoje em diversas atividades humanas com o chamado Sistema de Posicionamento Global – GPS:

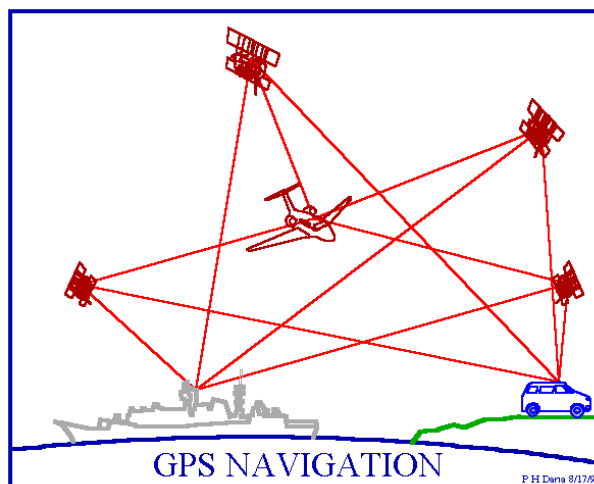
Desde o lançamento dos primeiros receptores GPS no mercado, tem havido um crescente número de aplicações nos levantamentos topográficos, cartográficos e de navegação, face às vantagens oferecidas pelo sistema quanto à precisão, rapidez, versatilidade e economia. Com o desenvolvimento da navegação espacial adjunto ao surgimento do Sistema de Posicionamento Global (GPS), vem se observando um grande interesse científico na criação de bancos de dados georreferenciados com extrema precisão, pois o sistema é uma grande ferramenta para estudos geodésicos, além de permitir em tempo real o posicionamento em 3D (BERNARDI, 2002, p. 3).

O GPS pode ser usado em diversas situações, pois expressa a posição de um ponto na superfície terrestre indicando a latitude, a longitude e a altitude.

Diversas atividades humanas dependem desse sistema de localização, por isso estudos para sua melhoria são realizados em diversos países. Bernardi (2002) cita alguns exemplos da utilização do GPS: a navegação marítima, aérea e terrestre e outros meios de transporte, além de identificar o posicionamento de objetos no espaço.

A Figura 67 ilustra geometricamente o funcionamento do GPS, que foi projetado de forma que em qualquer lugar e a qualquer momento da superfície da Terra existam pelo menos quatro satélites acima do plano horizontal do observador, que permite visualizar todo ponto do globo terrestre ou fora dele.

Figura 67 – Receptores GPS recebendo sinais de quatro satélites.



Fonte: <http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html> Acesso em 18/01/13.

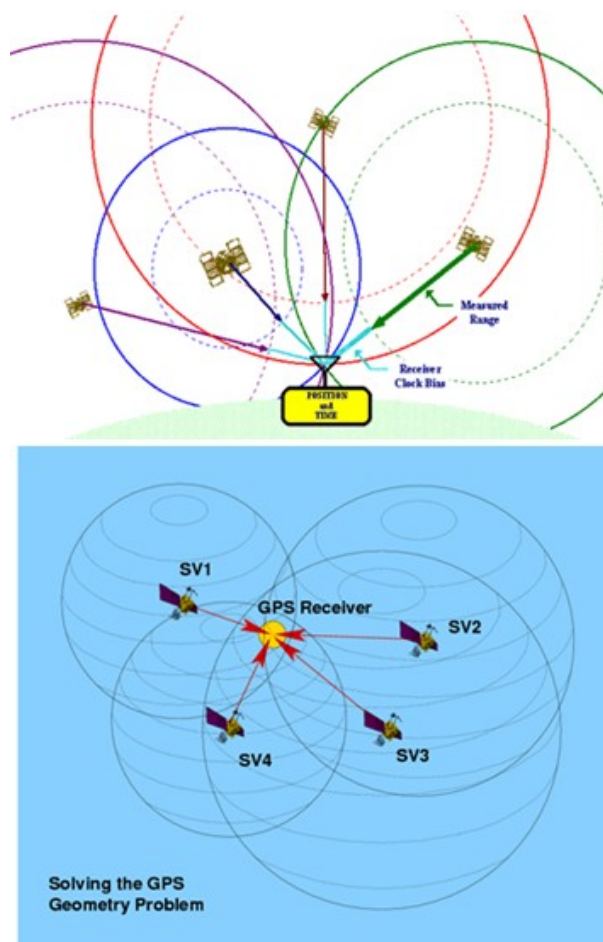
Inicialmente, o projeto lançado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos tinha o objetivo de determinar com exatidão a posição de aeronaves e navios militares para auxiliar no lançamento de mísseis contra tropas inimigas durante a Guerra Fria. Entretanto, o GPS também foi projetado para uso civil, com menor precisão do que para as operações militares. Contudo, após o fim da Guerra fria, o GPS passou a oferecer uma precisão muito maior para o usuário civil, disponibilizando assim a mesma precisão que os militares tinham (ALVES, 2006).

Atualmente, todos os satélites são controlados por seis estações terrestres de gerenciamento, sendo que a principal está localizada em Colorado, EUA. Juntas essas estações monitoram o desempenho do sistema e corrigem as posições dos satélites.

Para determinar a localização de um ponto sobre a superfície terrestre cada um dos satélites transmite por ondas de rádio um padrão fixado, que é recebido por um receptor GPS na Terra. Este receptor mede a diferença entre o instante de tempo que o padrão foi recebido e o instante de tempo que foi emitido, chamado lapso de tempo. Desta forma o receptor GPS funciona como um cronômetro extremamente acurado (ALVES, 2006).

Cada satélite é programado para emitir uma efeméride, que informa a posição deste satélite em determinado instante, em relação a um fixo sistema cartesiano de três eixos ortogonais, cuja origem coincide com o centro da Terra. De acordo com Alves (2006, p.19) “coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas”. A Figura 68 ilustra esta afirmação.

Figura 68 – Intersecção de 4 superfícies esféricas.



Fonte: <http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html>
<<http://www.ausairpower.net/XIMG/GPS-Spheres-Chart-1S.png>> Acesso em 18/01/13.

A localização do receptor GPS (*GPS Receiver* Figura 68) não é dada em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas: latitude, longitude e altitude.

Uma das principais funções do GPS é a navegação e por isso é utilizado em aeronaves, navios, veículos e por pessoas (que possuem um receptor portátil).

O GPS faz o monitoramento de abalos sísmicos, os quais são precedidos por alterações no campo gravitacional, que distorcem as ondas de rádio, o que permite prever a ocorrência de um terremoto com algumas horas de antecedência. Também fornece informações sobre a meteorologia, e faz um mapeamento ambiental por meio de imagens de satélites, indicando áreas infectadas por pestes por meio de fotografias aéreas. Ele é muito útil para elaborar roteiros de viagens, faz o monitoramento de trens, carros ou caminhões de carga. Para o uso militar fornece as coordenadas de ataque, orientação e controle para mísseis balísticos, rastreamento de submarinos, localização de minas e radares inimigos.

3.5 Fundamentação Matemática do Funcionamento do GPS

Matematicamente o GPS funciona por meio da aplicação de um teorema o qual iremos enunciá-lo e demonstrá-lo a seguir. Porém, inicialmente vamos elencar alguns resultados da Geometria Analítica e da Álgebra Linear disponíveis em Lima (2011b) que servirão de apoio para tal demonstração.

Sejam:

- i) $ax + by + cz = d$ (equação de um plano no espaço Euclidiano tridimensional);
- ii) $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ (equação geral de uma superfície esférica);
- iii)
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 (Sistema de três equações lineares e três incógnitas);

O sistema (iii) tem uma única solução se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, isto é, $\det(M) \neq 0$.

$$\text{iv) } M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ (matriz dos coeficientes do sistema (iii));}$$

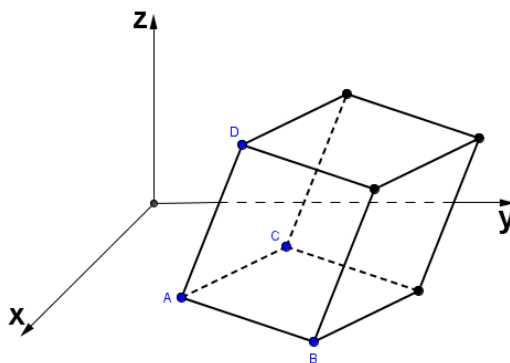
$$\text{v) } \det \begin{bmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

Onde, $A = (u_1, v_1, w_1)$, $B = (u_2, v_2, w_2)$, $C = (u_3, v_3, w_3)$ e $D = (u_4, v_4, w_4)$ são pontos do espaço Euclidiano tridimensional. O resultado do item (v) quer dizer que os pontos A , B , C e D são não coplanares.

Uma interpretação geométrica para o resultado do determinante do item (v) é a seguinte:

O módulo do determinante do item (v) é igual ao volume do paralelepípedo, que tem como quatro dos seus oito vértices os pontos A, B, C e D , sendo eles não coplanares, conforme a Figura 69.

Figura 69 – Paralelepípedo: os pontos A, B, C e D são não coplanares.



Fonte: Autores.

No plano temos um resultado semelhante envolvendo o cálculo de um determinante 3×3 .

Vejamos:

A área de um triângulo qualquer de vértices $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$ é igual à metade do módulo do determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Se o determinante é nulo, então, dizemos que os pontos pertencem a uma mesma reta.

$$\text{vi) } \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(propriedade dos determinantes: k é uma constante real).

Teorema 3.5.1:

Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 quatro superfícies esféricas distintas tais que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$. Se os seus centros, respectivamente C_1, C_2, C_3 e C_4 , não pertencem ao mesmo plano, então esta intersecção resulta em um único ponto.

Prova: A demonstração que faremos está baseada em Alves (2006).

Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 as quatro superfícies esféricas distintas de centros $C_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $C_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $C_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $C_4 = (x_4, y_4, z_4)$ respectivamente satisfazendo as hipóteses ($S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ e C_1, C_2, C_3 e C_4 são não coplanares).

As equações gerais das superfícies esféricas são [item (ii)]:

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (3.5.1)$$

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad (3.5.2)$$

$$S_3: x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \quad (3.5.3)$$

$$S_4: x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \quad (3.5.4)$$

Observação 3.5.1: Para a superfície esférica S_i com centro $C_i = (x_i, y_i, z_i)$ tem-se $a_i = -2x_i$; $b_i = -2y_i$; $c_i = -2z_i$ e $d_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r_i^2$, onde $i = 1, 2, 3, 4$ e r_i é o raio de S_i . (Vide equação 2.2.5 – equação geral de uma superfície esférica).

A seguir vamos subtrair as equações das superfícies esféricas duas a duas com o objetivo de eliminarmos os termos quadrados e obtermos equações lineares em x, y e z . Cada equação linear obtida determina a equação de um plano [item (i)] que contém a intersecção das duas superfícies esféricas envolvidas.

Por exemplo, subtraindo as equações de S_1 e S_2 , obtém-se a equação de um plano que contém a intersecção $S_1 \cap S_2$. Logo, subtraindo as equações de S_1 e S_3 e de S_1 e S_4 tem-se a equação de outros dois planos que contém respectivamente as intersecções $S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$.

Considerando as subtrações $(S_1 - S_2)$; $(S_1 - S_3)$ e $(S_1 - S_4)$, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases} \quad (3.5.5)$$

O fato do sistema 3.5.5 possuir uma única solução significa encontrar as coordenadas de um ponto que pertence simultaneamente às quatro superfícies esféricas.

Logo, se o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à intersecção $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$, isto é, satisfaz simultaneamente as equações das quatro superfícies esféricas, então (x, y, z) é solução do sistema 3.5.5.

Porém, para terminarmos a prova do teorema devemos mostrar que a solução do sistema 3.5.5 é única, pois, caso exista dois pontos distintos que pertençam à intersecção $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$, teríamos duas soluções para o sistema 3.3.5.

Para provarmos que a solução do sistema 3.5.5 é única, devemos mostrar que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema 3.5.5 é diferente de zero [itens (iii) e (iv)].

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2) & (b_1 - b_2) & (c_1 - c_2) \\ (a_1 - a_3) & (b_1 - b_3) & (c_1 - c_3) \\ (a_1 - a_4) & (b_1 - b_4) & (c_1 - c_4) \end{bmatrix} \text{ [matriz dos coeficientes do sistema 3.5.5].}$$

Pela observação 3.5.1, temos que $a_1 - a_2 = -2x_1 - (-2x_2) = 2(x_2 - x_1)$. Prosseguindo da mesma maneira para os demais casos, a matriz A fica:

$$A = \begin{bmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) & 2(z_3 - z_1) \\ 2(x_4 - x_1) & 2(y_4 - y_1) & 2(z_4 - z_1) \end{bmatrix}$$

Então,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) & 2(z_3 - z_1) \\ 2(x_4 - x_1) & 2(y_4 - y_1) & 2(z_4 - z_1) \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{vmatrix}$$

$$\text{Logo, } \det(A) = 8 \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ pois, por hipótese os centros } C_1,$$

C_2, C_3 e C_4 são não coplanares [resultado do item (v)].

Portanto, o que acabamos de provar é que o sistema 3.5.5 tem uma única solução quando os centros das quatro superfícies esféricas não pertencem ao mesmo plano. Entretanto, pode ocorrer que a intersecção das quatro superfícies esféricas não consiste em um único ponto. Por isso, a hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ é essencial para que o teorema seja válido.

Resumindo: Quatro superfícies esféricas se intersectam em um único ponto se seus centros são não coplanares.

A seguir vamos dar um exemplo prático que é uma aplicação do teorema 3.5.1, onde os centros das quatro superfícies esféricas são não coplanares e $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$.

Exemplo 3.5.1: Dados os centros e os raios de quatro superfícies esféricas, determine o ponto de interseção delas.

	Centro	Raio
S_1	(0,0,0)	1
S_2	(1,0,0)	$\sqrt{2}$
S_3	(0,4,0)	3
S_4	(0,0,2)	$\sqrt{5}$

Resolução: Os centros não pertencem a um mesmo plano. Verifique isso com uma ilustração.

Inicialmente vamos aplicar os dados na equação reduzida de uma superfície esférica, isto é, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Então,

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1^2$$

$$S_2: (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$S_3: x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 3^2$$

$$S_4: x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{5})^2$$

Logo,

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 1$$

$$S_3: x^2 + y^2 + z^2 - 8y = -7$$

$$S_4: x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 1$$

Agora, fazendo $(S_1 - S_2)$, $(S_1 - S_3)$ e $(S_1 - S_4)$, temos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = 8 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos que $x = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

Portanto, o ponto de intersecção das quatro superfícies esféricas é o ponto $P = (0,1,0)$.

Na sequência apresentamos três atividades com o intuito de determinar a quantidade de pontos da intersecção de superfícies esféricas.

A primeira e a segunda têm por objetivo listar a quantidade de pontos da intersecção entre duas e três superfícies esféricas.

A terceira tem o intuito de determinar o ponto de intersecção de quatro superfícies esféricas como uma aplicação do teorema 3.5.1

Atividade proposta 3.5.1: Liste todas as possibilidades para a quantidade de pontos de intersecção de duas superfícies esféricas. Sugestão: Faça desenhos.

Atividade proposta 3.5.2: Liste todas as possibilidades para a quantidade de pontos de intersecção de três superfícies esféricas. Sugestão: Faça desenhos.

Atividade proposta 3.5.3: Determine o ponto de intersecção das seguintes superfícies esféricas:

S_1 : Centro $(1,0,0)$ e raio $\sqrt{2}$; S_2 : Centro $(0,1,0)$ e raio $\sqrt{2}$;

S_3 : Centro $(0,0,1)$ e raio $\sqrt{2}$; S_4 : Centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{3}$;

3.6 Uma aplicação do uso do GPS

A atividade que vamos resolver a seguir foi extraída e adaptada de Alves (2006). Ela é um bom exemplo para que possamos compreender como o GPS localiza um ponto na superfície terrestre ou fora dela. A atividade tem por objetivo determinar a latitude, a longitude e a altitude de uma aeronave que tem a bordo um receptor GPS em funcionamento, que recebeu sinais de quatro satélites. Na sequência, são apresentadas as efemérides de cada um dos quatro satélites e também, os seus respectivos lapsos de tempo.

Efemérides (em metros): Posição cartesiana exata de cada satélite no instante que é emitido um sinal para o receptor GPS instalado na aeronave. O centro da Terra é considerado a origem do sistema cartesiano $OXYZ$.

	x	y	z
Satélite 1	$1,877191188 \cdot 10^6$	$-1,064608026 \cdot 10^7$	$2,428036099 \cdot 10^7$
Satélite 2	$1,098145713 \cdot 10^7$	$-1,308719098 \cdot 10^7$	$2,036005484 \cdot 10^7$
Satélite 3	$2,459587359 \cdot 10^7$	$-4,336916128 \cdot 10^6$	$9,090267461 \cdot 10^6$
Satélite 4	$3,855818937 \cdot 10^6$	$7,251740720 \cdot 10^6$	$2,527733606 \cdot 10^7$

Lapsos de tempo (em segundos): variação de tempo entre o instante em que o sinal é emitido por cada satélite e o instante que o sinal é recebido pelo receptor GPS.

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

Segundo Alves (2006) as informações transmitidas pelo GPS envolvem, por uma questão de precisão, dez ou mais dígitos decimais e números da grandeza em módulo de 10^6 , fazendo com que o uso de calculadoras ou *softwares* capazes de resolver sistemas lineares tornem-se imprescindíveis para a resolução. Entretanto, para esta atividade vamos trabalhar com um número menor de dígitos decimais (até quatro) e com a notação científica (potência de base dez).

Resolução:

A distância d entre o receptor GPS e cada satélite é dada pela equação:

$$d = c \cdot \Delta t \quad (3.4.1)$$

Onde, $c = 2,99792458 \cdot 10^8 m/s$ é o módulo da velocidade da luz no vácuo e Δt o lapso de tempo de cada satélite.

Pelo teorema 3.5.5 sabemos que a intersecção de quatro superfícies esféricas de centros não coplanares determina um único ponto. Logo precisamos de pelo menos 4 satélites para que possamos determinar a posição de um ponto no globo terrestre.

Então, cada satélite é considerado o centro de uma imaginária superfície esférica. Logo, o receptor GPS pertence a cada uma das quatro imaginárias superfícies esféricas. Assim, a

distância d entre o receptor GPS e cada satélite é o raio de cada uma das imaginárias superfícies esféricas (Figura 68).

Na sequência apresentamos os cálculos passo a passo.

Calculando os raios:

$$r_1 = d_1 = c \cdot \Delta t_1 = 2,99792458 \cdot 10^8 \times 0,08251731391 = 24738068,36$$

$$\Rightarrow r_1^2 = 611,972 \cdot 10^{12}$$

$$r_2 = d_2 = c \cdot \Delta t_2 = 2,99792458 \cdot 10^8 \times 0,07718558331 = 23139655,74$$

$$\Rightarrow r_2^2 = 535,444 \cdot 10^{12}$$

$$r_3 = d_3 = c \cdot \Delta t_3 = 2,99792458 \cdot 10^8 \times 0,06890629029 = 20657586,10$$

$$\Rightarrow r_3^2 = 426,740 \cdot 10^{12}$$

$$r_4 = d_4 = c \cdot \Delta t_4 = 2,99792458 \cdot 10^8 \times 0,07815826940 = 23431259,70$$

$$\Rightarrow r_4^2 = 549,024 \cdot 10^{12}$$

Agora, vamos escrever as equações reduzidas das quatro superfícies esféricas centradas em cada satélite.

$$S_1: (x - 1,8771 \cdot 10^6)^2 + (y + 10,6460 \cdot 10^6)^2 + (z - 24,2800 \cdot 10^6)^2 = 611,972 \cdot 10^{12}$$

$$S_2: (x - 10,9810 \cdot 10^6)^2 + (y + 13,0870 \cdot 10^6)^2 + (z - 20,3600 \cdot 10^6)^2 = 535,444 \cdot 10^{12}$$

$$S_3: (x - 24,5950 \cdot 10^6)^2 + (y + 43,3690 \cdot 10^6)^2 + (z - 9,0900 \cdot 10^6)^2 = 426,740 \cdot 10^{12}$$

$$S_4: (x - 3,8558 \cdot 10^6)^2 + (y - 7,25170 \cdot 10^6)^2 + (z - 25,2770 \cdot 10^6)^2 = 549,024 \cdot 10^{12}$$

Desenvolvendo os quadrados e reorganizando os termos, obtemos as equações gerais:

$$S_1: x^2 - 3,7542x \cdot 10^6 + y^2 + 21,292y \cdot 10^6 + z^2 - 48,56z \cdot 10^6 + 94,4072 \cdot 10^{12} = 0$$

$$S_2: x^2 - 21,962x \cdot 10^6 + y^2 + 26,174y \cdot 10^6 + z^2 - 40,72z \cdot 10^6 + 170,938 \cdot 10^{12} = 0$$

$$S_3: x^2 - 49,19x \cdot 10^6 + y^2 + 86,738y \cdot 10^6 + z^2 - 18,1804z \cdot 10^6 + 279,619 \cdot 10^{12} = 0$$

$$S_4: x^2 - 7,7116x \cdot 10^6 + y^2 - 14,5034y \cdot 10^6 + z^2 - 50,554z \cdot 10^6 + 157,357 \cdot 10^{12} = 0$$

Fazendo $(S_1 - S_2)$; $(S_1 - S_3)$; $(S_1 - S_4)$ e dividindo cada diferença por 10^6 , obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 18,2078x - 4,882y - 7,84z = 76,5307 \cdot 10^6 \\ 45,4358x + 12,6182y - 30,3796z = 185,211 \cdot 10^6 \\ 3,9574x + 35,7954y + 1,994z = 62,95 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Normalmente no Ensino Médio a técnica ensinada e utilizada para resolver um sistema linear com três equações e três incógnitas é a regra de Cramer. Entretanto, o sistema anterior tem coeficientes com até quatro dígitos decimais e termos independentes da ordem de 10^6 . Neste caso, vamos resolvê-lo aplicando uma técnica chamada de escalonamento, que consiste em zerar o coeficiente de x na segunda linha e zerar os coeficientes de x e y na terceira linha. A primeira linha do sistema não será alterada.

Escalonando o sistema:

$$\text{A nova segunda linha fica: } L_2' = (45,4358 \div 18,2078) \cdot L_1 - L_2$$

$$\text{A nova terceira linha fica: } L_3' = (3,9574 \div 18,2078) \cdot L_1 - L_3$$

Logo, obtemos um novo sistema linear que é equivalente ao primeiro.

$$\begin{cases} 18,2078x - 4,882y - 7,84z = 76,5307 \cdot 10^6 \\ \mathbf{0x} - 24,8007y + 10,8156z = 5,7639 \cdot 10^6 \\ \mathbf{0x} - 36,8564y - 3,6979z = -46,3162 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Escalonando o novo sistema:

$$\text{A nova terceira linha fica: } L_3'' = (36,8564 \div 24,8007) \cdot L_2' - L_3'$$

Então, temos:

$$\begin{cases} 18,2078x - 4,882y - 7,84z = 76,5307 \cdot 10^6 \\ \mathbf{0x} - 24,8007y - 10,8156z = 5,7639 \cdot 10^6 \\ \mathbf{0x} + \mathbf{0y} + 19,7709z = 54,8819 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Este último sistema que obtemos é equivalente ao segundo, que por sua vez é equivalente ao primeiro. Resolvendo ele, temos que a única solução procurada é dada por:

$$x = 5,6606 \cdot 10^6 m; y = 0,9781 \cdot 10^6 m \text{ e } z = 2,7758 \cdot 10^6 m.$$

Portanto, o que acabamos de determinar são as coordenadas cartesianas da aeronave, isto é, do ponto $P = (5,6606 \cdot 10^6, 0,9781 \cdot 10^6, 2,7758 \cdot 10^6)$ que é o ponto da interseção das quatro imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite.

Agora, vamos determinar a latitude, a longitude e a altitude do ponto P que representa a aeronave.

Para isso vamos aplicar as equações (2.4.3), (2.4.6) e (2.4.7), onde:

$$\text{Latitude: } \varphi = \arcsen\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right);$$

$$\text{Longitude: } \theta = \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ e } \theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);$$

A altitude ou elevação é dada pela diferença entre $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra que para esta situação será considerado como $6,378164 \cdot 10^6$ metros.

Então,

$$\text{Latitude: } \varphi = \arcsen\left(\frac{2,7758 \cdot 10^6}{\sqrt{(5,6606 \cdot 10^6)^2 + (0,9781 \cdot 10^6)^2 + (2,7758 \cdot 10^6)^2}}\right) = 25,79^\circ N$$

$$\text{Longitude: } \theta = \arcsen\left(\frac{0,9781 \cdot 10^6}{\sqrt{(5,6606 \cdot 10^6)^2 + (0,9781 \cdot 10^6)^2}}\right) = 9,80^\circ E$$

e,

$$\theta = \arccos\left(\frac{5,6606 \cdot 10^6}{\sqrt{(5,6606 \cdot 10^6)^2 + (0,9781 \cdot 10^6)^2}}\right) = 9,80^\circ E$$

Logo,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(5,6606 \cdot 10^6)^2 + (0,9781 \cdot 10^6)^2 + (2,7758 \cdot 10^6)^2} = 6379979 \text{ m.}$$

Então a altitude da aeronave é: $6379979 \text{ m} - 6378164 \text{ m} = 1815 \text{ m.}$

Assim, conhecendo a latitude e a longitude da aeronave é possível identificar a sua localização. Ela encontra-se nas aproximações da fronteira entre a Líbia e a Argélia, na África (Figura 70). Isso pode ser verificado consultando um atlas geográfico, ou um globo terrestre (aquele objeto didático usado nas aulas de Geografia) ou ainda sítios na internet, como por exemplo, o *Google Maps* ou o *Satellite Signals*.

Figura 70 – Posição da aeronave (balão vermelho).



Fonte: <<http://www.daftlogic.com/sandbox-google-maps-find-altitude.htm>> Acesso em 21/01/2013.

Observação 3.6.1: Para a resolução de uma atividade como esta que acabamos de realizar, é evidente que quanto maior for o número de dígitos decimais utilizados, maior será a precisão para a localização do receptor GPS. Pois, trabalhando com um número menor de dígitos o erro é maior, e isto implica em latitudes, longitudes e altitudes diferentes daquelas consideradas reais.

Na sequência propomos uma atividade que tem por objetivo resolver o sistema não escalonado da seção 3.6 via regra de Cramer, pois, no Ensino Médio é a técnica mais utilizada para resolver sistemas lineares. Entretanto, para resolver tal sistema será necessário calcular quatro determinantes 3×3 . A resolução via Cramer consiste em um número maior de cálculos o que consequentemente aumenta o tempo de resolução. Desta forma, queremos que o leitor faça uma reflexão ao final da resolução verificando a viabilidade desta técnica, pois, existem *softwares* e computadores que resolvem sistemas muito mais complicados.

Atividade proposta 3.6.1: Resolva o sistema não escalonado do item 3.6 aplicando a regra de Cramer. Qual resolução tem o menor custo operacional: Escalonar ou aplicar a regra de Cramer? Justifique.

A próxima atividade é uma aplicação do uso do GPS. Ela tem por objetivos fixar os conceitos matemáticos que fomentam o funcionamento de tal tecnologia e mostrar como um ponto é localizado na superfície terrestre ou fora dela. A atividade proposta deve ser resolvida etapa por etapa, pois, a princípio os raios devem ser determinados, em seguida as equações reduzida e geral de cada uma das superfícies esféricas devem ser montadas para que um sistema linear 3×3 possa ser resolvido. Com a solução de tal sistema as coordenadas geográficas são determinadas. E, finalmente por meio de uma pesquisa determina-se o local onde se encontra o receptor GPS.

Atividade proposta 3.6.2: A seguir são dadas as efemérides de quatro satélites e seus respectivos lapsos de tempo com relação a um aparelho GPS.

Efemérides (em metros):

	x	y	z
Satélite 1	$2,421342775 \cdot 10^6$	$-1,139152212 \cdot 10^7$	$2,387787032 \cdot 10^7$
Satélite 2	$9,381422224 \cdot 10^7$	$-1,200767287 \cdot 10^7$	$2,176205592 \cdot 10^7$
Satélite 3	$2,379277197 \cdot 10^7$	$-6,375254002 \cdot 10^6$	$9,952010361 \cdot 10^6$
Satélite 4	$7,868966904 \cdot 10^6$	$4,543150161 \cdot 10^6$	$2,496440495 \cdot 10^7$

Lapsos de tempo (em segundos):

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,07643363862	0,07272752562	0,06948372948	0,07173271158

Determine:

- A distância entre cada satélite e o receptor GPS;
- A equação reduzida de cada superfície esférica centrada em cada satélite;
- A equação geral de cada superfície esférica;
- O sistema linear gerado pelas diferenças $(S_1 - S_2)$; $(S_1 - S_3)$; $(S_1 - S_4)$;
- O que a solução do sistema linear representa;
- A latitude, a longitude e a elevação do receptor GPS;
- O local em que se encontra o receptor GPS sobre ou fora do globo terrestre.

CAPÍTULO IV – CONSIDERAÇÕES

Refletir sobre o que é ensinar, para quem ensinar, como ensinar e o que se ensina é a marca registrada da profissão professor. Há uma grande quantidade de recursos metodológicos que se pode dispor para facilitar o ensino e a aprendizagem, cabe então ao professor pesquisá-los, conhecê-los, aplicá-los e adaptá-los sempre que necessário.

Acreditamos que os resultados elencados neste trabalho a acerca da Geometria Esférica possam contribuir com a formação profissional dos professores de Matemática da Educação Básica. Pois, nosso estudo apresenta um material rico em informações e conceitos da Geometria Esférica o que proporciona ao professor condições para ampliar seus conhecimentos, enriquecendo suas competências e habilidades para além do que se faz tradicionalmente. Estamos convictos que a consciência desses conhecimentos faz o professor refletir em suas aulas de geometria.

Nesta perspectiva, este trabalho apresentou por meio da História da Matemática, o longo e árduo processo, porém, sem êxito, as várias tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides usando os outros quatro. Estas tentativas ao longo dos anos culminaram na descoberta das geometrias não-euclidianas no século XIX, fato este que originou-se da negação do postulado das paralelas.

Acreditamos que o conhecimento de fatos históricos como este que levou a descoberta de outras geometrias diferentes daquela de Euclides, pode despertar no professor de Matemática da Educação Básica o ensejo de melhorar o ensino e a aprendizagem em sala de aula, pois, o mesmo pode promover a discussão com os alunos sobre que tipo de geometria melhor se aplica para explicar a nossa realidade e, também, discutir a curvatura do espaço em que vivemos. Entretanto, para isso, vale uma profunda reflexão segundo as palavras do matemático Henri Poincaré, as quais afirmam que “nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é mais conveniente”.

Esta frase quer dizer que, uma geometria não é melhor do que outra, mas, se aplica aquela que melhor descreve um determinado contexto. Pois, segundo Coutinho (2001) para o pedreiro, o carpinteiro, o topógrafo, o arquiteto ou o engenheiro a geometria mais adequada é aquela que

estudamos na escola – a Geometria Euclidiana, enquanto para o piloto de um avião ou o capitão de um navio nas suas viagens a geometria que mais se usa é a Geometria Esférica.

Salientamos que para a realização deste trabalho vários resultados da Geometria Esférica foram obtidos usando previamente resultados da Geometria Euclidiana. Por exemplo, para a demonstração da fórmula fundamental para triângulos esféricos usamos as razões trigonométricas para triângulos planos retângulos, o Teorema de Pitágoras, que só é válido na Geometria Euclidiana e, também, a lei dos cossenos para triângulos planos.

O exemplo acima ressalta a importância e a presença de conceitos da Geometria Euclidiana para a compreensão de outras geometrias. Por isso, ela continua sendo a principal geometria estudada nas escolas, entretanto, cabe ao professor de Matemática explorar as geometrias não-euclidianas em sala de aula, em particular a Geometria Esférica.

Destacamos também, que a demonstração do teorema que garante a fundamentação matemática do funcionamento do GPS – uma aplicação da Geometria Esférica, só foi possível uma vez que buscamos resultados prévios em outras áreas da Matemática como a Geometria Analítica e a Álgebra Linear.

Com o intuito de compararmos a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica, elaboramos o Quadro 2.1.2 que apresenta um rol de questionamentos a respeito de implicações conceituais de ambas as geometrias. Na sequência apresentamos onze (11) quadros com o intuito de responder e exemplificar as diferenças entre as duas geometrias. É importante ressaltar que para a elaboração dos quadros comparativos foram utilizados materiais manipuláveis de fácil acesso e baixo custo, além do *software* livre de geometria dinâmica o *GeoGebra*.

As comparações elencadas nos quadros favorecem a visualização tanto do professor quanto dos alunos, pois, conceitos da Geometria Euclidiana e da Geometria Esférica são apresentados lado a lado. Destacamos a importância de realizar uma atividade baseada nos quadros comparativos com os alunos, objetivando realizar um trabalho em equipe e promover a discussão em grupo sobre os conceitos envolvidos das Geometrias Euclidiana e Esférica. Uma parte da atividade pode ser desenvolvida no laboratório de informática da Escola e a outra em sala com os materiais manipuláveis.

Outro ponto que merece destaque neste trabalho são as equações reduzida e geral da superfície esférica que dependem exclusivamente de coordenadas cartesianas no espaço.

Conforme Lima (2001) dos trinta e seis (36) volumes de doze (12) coleções de livros de Matemática, utilizados no Ensino Médio das escolas do Brasil que foram analisados, nenhum contempla as coordenadas no espaço.

É relevante destacar que durante o desenvolvimento deste trabalho pudemos relacionar diretamente a Matemática com a Geografia, pois, o modelo adotado para representar a superfície da Terra foi à superfície esférica. Outra relação que merece destaque ocorreu com as coordenadas cartesianas de um ponto no espaço e com as coordenadas geográficas: latitude, longitude e a altitude e que culminaram mais tarde na atividade do uso do GPS.

Salientamos que para realizar a conversão entre as coordenadas cartesianas e geográficas foi aplicado o cálculo da imagem inversa das funções seno e cosseno, pois, de posse das coordenadas cartesianas de um ponto no espaço, determina-se a sua latitude, longitude e altitude. Entretanto, conhecendo as coordenadas geográficas as coordenadas cartesianas são obtidas.

Porém, para obtermos as coordenadas geográficas conhecendo as cartesianas e vice-versa, o uso da calculadora eletrônica científica foi imprescindível, uma vez que por meio dela as imagens inversas dos senos e cossenos foram determinadas (vide exemplo 2.4.1).

Destacamos que as DCE sugerem que alguns recursos tecnológicos, como calculadoras e *softwares*, devem ser utilizados em sala de aula, pois favorecem as experimentações matemáticas e potencializam algumas formas de resolução de problemas. Segundo Lima (2011), o uso das calculadoras eletrônicas em atividades matemáticas possibilitam aos educandos precisão e rapidez nos cálculos aritméticos e trigonométricos, além de deixá-los com mais tempo para aprimorar sua capacidade de raciocinar e desenvolver-se mentalmente.

A escola não pode se distanciar da realidade do aluno. Ademais, a incorporação do instrumento tecnológico na sala de aula permite explorar relações matemáticas e refletir sobre a grandeza numérica.

Neste sentido, é importante destacar que os estudantes devem aprender a dominar diferentes estratégias de cálculo e, conhecer os limites de cada recurso. Foi o que propomos no desenvolvimento deste trabalho, que está estruturado com vinte e nove (29) exemplos resolvidos e dezoito (18) atividades propostas, sendo que algumas delas descrevem problemas do contexto real, que visam se apropriar de alguns conceitos da teoria desenvolvida.

Acreditamos que, com isso, o leitor possa se familiarizar e internalizar os conceitos e conteúdos que foram trabalhados. O professor pode usá-los ou mesmo adaptá-los para a sala de aula. O corpo do trabalho está estruturado com um grande número de figuras na sua maioria construída no *GeoGebra*, as quais, acreditamos que em muitas situações trazem detalhes minuciosos para a compreensão dos conceitos envolvidos.

No apêndice demonstramos como se calcula distância entre dois pontos do espaço euclidiano tridimensional e, também, a lei dos senos para triângulos esféricos. O primeiro resultado permite ao leitor comparar como se calculam distâncias tanto na Geometria Euclidiana como na Geometria Esférica (fórmula fundamental ou equação 3.3.17).

Estas distintas maneiras de realizar o cálculo da distância entre dois pontos estão atreladas ao conceito de curvatura que cada tipo de superfície possui em alguma determinada geometria. Por exemplo, a Geometria Euclidiana tem uma superfície de curvatura constante nula, enquanto que a Geometria Esférica tem uma superfície de curvatura positiva constante. Desta forma, sugerimos ao leitor que pesquise mais detalhes sobre o conceito de curvatura e que se existe alguma geometria que possui uma superfície de curvatura negativa.

Portanto, este trabalho apresentou-se por meio de uma sequência gradual de conteúdos, referindo-se a ordem em que os resultados foram sendo elencados pelos autores. Acreditamos que ele ou parte dele pode ser aplicado no Ensino Médio, possibilitando assim uma melhoria para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Assim, trabalhos futuros para o Ensino Médio podem ser desenvolvidos com a Geometria Esférica fazendo uma conexão entre a Matemática, a Geografia, a Física e a Astronomia no contexto da Trigonometria Esférica, como por exemplo, determinar a declinação de um planeta ou determinar a direção do nascer ou do ocaso de um corpo celeste em uma dada latitude.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Sérgio. A Geometria do Globo Terrestre. In: **Revista do Programa de Iniciação Científica OBMEP**, Rio de Janeiro: IMPA 2009.
- ALVES, Sérgio. A Matemática do GPS. In: **Revista do Professor de Matemática N° 59**, São Paulo: SBM, 2006.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica**. Goiânia: Ed. da UFG, 2002.
- BERNARDI, J.V.E.; LANDIM, P.M.B. **Aplicação do Sistema de Posicionamento Global (GPS) na coleta de dados**. Rio Claro: IGCE/UNESP, 2002, p. 31. Texto Didático 10.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2ª ed. 2006.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometrias Não-Euclidianas. In: **Revista Matemática Universitária N° 6**, Rio de Janeiro, 1987.
- COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. São Paulo: Atual, 2005.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica**. São Paulo: Atual, 2005.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, Editora da UNICAMP, 2004.
- FRANCO, Valdeni Soliani; MENEZES, Luana Paula Goular de. Utilizando o Geogebra para Construção e Exploração de um Modelo Plano para a Geometria Elíptica. In: **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Uruguai, 2012.
- GERÔNIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria plana e espacial: um estudo axiomático**. Maringá: Eduem, 2010.
- HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática: Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos**. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.
- LANGENDOLFF, A. PELLEGRINI, G. **Fundamentos de cartografia e o sistema de posicionamento global – GPS**. Santa Maria: UFSM, 2008.

LIMA, E. L. *et al.* **Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 2.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 4.** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 2011a.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: IMPA, 2011b.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides: A História da Geometria, das Linhas Paralelas ao Hiperespaço.** São Paulo: Geração Editorial, 2005.

MURRAY, Daniel A. **Spherical Trigonometry.** New York: Longmans, Green and Co., 1908.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDES, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** Rio de Janeiro, SBM, 2010.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.** SEED: Curitiba, 2008.

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a hipótese.** Tradução de Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora da UNB, 1984.

SAMPAIO, João Carlos Vieira. **Uma Introdução à Topologia Geométrica.** São Carlos: EdUFSCAR, 2008.

SILVA, Ana Paula Bispo da; MARTINS, Roberto de Andrade. As Geometrias Não-Euclidianas e o Fim das Verdades Inabaláveis. In: **Scientific American História.** São Paulo: Duetto Editorial, n° 6, pg. 15-19, 2006.

SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. **Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais.** Curitiba: CRV, 2011.

SMOGORZHEVSKI, A. S. **A Cerca de La Geometria de Lobachevski.** Moscou: Mir, 1978.

WAGNER, Eduardo. Teorema de Pitágoras e Áreas. In: **Revista do Programa de Iniciação Científica OBMEP,** Rio de Janeiro: IMPA 2012.

Sítios da internet consultados

<http://www.nmserveur.com/lexique/contenu/Images/couche_spherique.jpg>

Acesso em 05/10/2012.

<http://www.portalplanetasedna.com.ar/archivos_varios3/euclides.jpg> Acesso em 12/11/2012.

<<http://www.egipto.com/nefera/ptolomeo1.jpg>> Acesso em 12/11/2012.

<<http://www.astro.gr/arxaiaKeimena/images/proclus.gif>> Acesso em 12/11/2012.

<<http://www.dinbali.com/wp-content/uploads/2012/09/Nasireddin.jpg>> Acesso em 12/11/2012.

<<http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/files/2009/11/Wallis.jpg>> Acesso em 12/11/2012.

<<http://apprendre-math.info/history/photos/Lambert.jpeg>> Acesso em 12/11/2012.

<<http://apprendre-math.info/history/photos/Legendre.jpeg>> Acesso em 12/11/2012.

<http://www.rare-earth-magnets.com/images2/johann_carl_friedrich_gauss.jpg> Acesso em 12/11/2012.

<http://www.omikk.bme.hu/archivum/kozoskepek/bolyai_janos.jpg> Acesso em 12/11/2012.

<<http://apprendre-math.info/history/photos/Lobachevsky.jpeg>> Acesso em 12/11/2012.

<<http://content.answcdn.com/main/content/img/scitech/HSgeorgf.jpg>> Acesso em 12/11/2012.

<http://static.yousaytoo.com/post_images/37/2e/6f/9143452/remote_image_96447bfafe.jpg> Acesso em 04/12/2012.

<<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Thales.html>> Acesso em 08/01/2013.

<<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/PictDisplay/Playfair.html>> Acesso em 08/01/2013.

<<http://pt.wikipedia.org/wiki/Proclus>> Acesso em: 08/01/2013.

<<http://www.professores.uff.br/hjbortol/>> Acesso em: 13/01/2013.

<http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2006.1/applets/earth_br.html> Acesso em 13/01/2013.

<<http://maps.google.com.br>> Acesso em 14/01/2013.

<<http://www.nhc.noaa.gov/gccalc.shtml>> Acesso em: 16/01/2013.

<<http://www.satsig.net/maps/lat-long-finder.htm>> Acesso em 16/01/2013.

<http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html>. Acesso em 18/01/13.

<<http://www.ausairpower.net/XIMG/GPS-Spheres-Chart-1S.png>>. Acesso em 18/01/13.

<<http://www.daftlogic.com/sandbox-google-maps-find-altitude.htm>> Acesso em 21/01/2013.

<<http://www.navworld.com/navcerebrations/flight3.gif>> Acesso em 24/01/2013.

<<https://perso-sdt.univ-brest.fr/~jacdev/ens/posi/images/image47.gif>> Acesso em 24/01/2013.

<<http://www.geom.uiuc.edu/docs/dpvc/Pictures/KleinBottle.gif>> Acesso em 03/02/13.

<<http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/HoHonLeung/Torus.png>> Acesso em 03/02/13.

<<http://www.vialattea.net/curvatura/img/pseudosphere.gif>> Acesso em 13/02/13.

<<http://utenti.quipo.it/base5/topologia/moebius05.gif>> Acesso em 13/02/13.

<<http://images.planetmath.org/cache/objects/5841/js/img2.png>> Acesso em 16/03/2013.

$$d(A, Q)^2 = d(B, C)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Por outro lado os pontos P e A estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo OZ .

$$\text{Logo, } d(P, A) = |z - c|.$$

Como o triângulo PAQ é retângulo em A e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q)^2 = d(P, A)^2 + d(A, Q)^2 = (z - c)^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

isto é,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

Apêndice B: Lei dos senos para triângulos esféricos

Queremos mostrar que em um triângulo esférico vale:

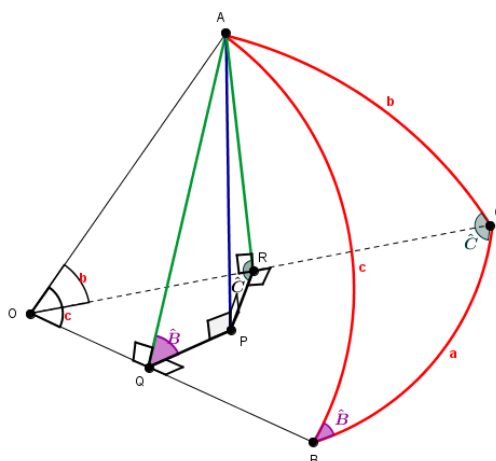
$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$$

Prova:

Seja o triângulo esférico ABC de lados a , b e c respectivamente (Figura 71).

O Ponto O é o centro da superfície esférica que contém o triângulo esférico ABC .

Figura 72 – Demonstração da Lei dos senos para triângulos esféricos.



Fonte: Hogben (1970).

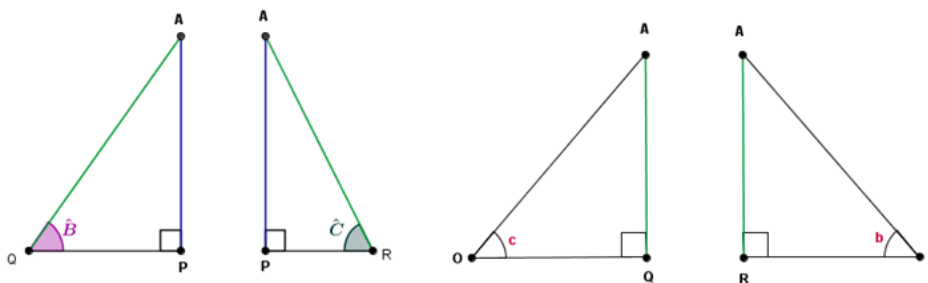
Vamos considerar a reta perpendicular ao plano BOC cuja intersecção determina o ponto P e que tal reta passa pelo vértice A . Por P traçamos as retas perpendiculares aos segmentos BO e CO que resulta nos pontos Q e R respectivamente. Agora pelo ponto A , também traçamos as perpendiculares a os segmentos BO e CO cujas intersecções são os pontos Q e R .

O ângulo \hat{B} é formado pela intersecção dos planos que passam por COA e COB . Como as retas \overline{AQ} e \overline{QP} são perpendiculares no ponto Q , então o ângulo $A\hat{Q}P$ é congruente ao ângulo \hat{B} .

O ângulo \hat{C} é formado pela intersecção dos planos que passam por BOA e BOC . Como as retas \overline{AR} e \overline{RP} são perpendiculares no ponto R , então o ângulo $A\hat{R}P$ é congruente ao ângulo \hat{C} .

No que acabamos de elencar, temos quatro triângulos planos retângulos (Figura 72).

Figura 73 – Quatro triângulos planos retângulos.



Fonte: Autores.

Logo, temos:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{AP}{AQ}; \text{sen}(\hat{C}) = \frac{AP}{AR}; \text{sen}(c) = \frac{AQ}{AO} \text{ e } \text{sen}(b) = \frac{AR}{AO};$$

Então,

$$AP = AQ \text{sen}(\hat{B}) = AR \text{sen}(\hat{C}); AR = AO \text{sen}(b) \text{ e } AQ = AO \text{sen}(c)$$

Logo,

$$AO \text{sen}(b) \text{sen}(\hat{C}) = AO \text{sen}(c) \text{sen}(\hat{B})$$

Portanto,

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$$

Uma construção análoga a que fizemos, porém, considerando o vértice B ou C temos que a igualdade anterior vale para a razão $\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})}$.

Assim, concluímos que:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$$